Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(11), 3198-3203
Published Online November 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.1311332

Hans汉斯

Fermat型函数方程的亚纯解

段江梅，杨惠娟，胡晓飞

昭通学院数学与统计学院，云南 昭通

收稿日期：2023年10月8日；录用日期：2023年11月9日；发布日期：2023年11月16日

摘 要

研究了Fermat型函数方程 $f^7(z)+\left(f^{(s)}(z)\right)^7+h^7(z)=1$ 亚纯解的存在性问题，得到新的结论。

关键词

Fermat型函数方程，亚纯函数，整函数，增长级，值分布理论

The Meromorphic Solutions of Fermat Type Functional Equations

Jiangmei Duan, Huijuan Yang, Xiaofei Hu

School of Mathematics and Statistics, Zhaotong University, Zhaotong Yunnan

Received: Oct. 8th, 2023; accepted: Nov. 9th, 2023; published: Nov. 16th, 2023

Abstract

We investigate the existence of meromorphic solutions of Fermat type functional equations $f^7(z)+\left(f^{(s)}(z)\right)^7+h^7(z)=1$ and obtain a new conclusion.

Keywords

Fermat Type Functional Equation, Meromorphic Functions, Entire Function, Growth Order, Value Distribution Theory

文章引用: 段江梅, 杨惠娟, 胡晓飞. Fermat 型函数方程的亚纯解[J]. 理论数学, 2023, 13(11): 3198-3203.
DOI: 10.12677/pm.2023.1311332

1. 引言与主要结果

文中 $f(z),g(z),h(z)$ 都是指亚纯函数，$f^{(s)}(z)$ 表示 $f(z)$ 的s阶导数(s为正整数)，p,t 均为正整数，$f(z)$ 的增长级 $\rho_f := \overline{\lim_{r\to\infty}}\dfrac{\log^{+} T(r,f)}{\log r}$，其中 $T(r,f)$ 为 $f(z)$ 的Nevanlinna特征函数。

大约在1637年左右，法国数学家Pierre de Fermat在阅读丢番图《算术》拉丁文译本时，在页边空白处写下了：当整数 $n>2$ 时，关于 x,y,z 的方程 $x^n+y^n=z^n$ 没有正整数解。这就是著名的Fermat大定理。事实上，Fermat本人并未给出证明的细节，他仅对 $n=4$ 的情形给出了少许提示。Fermat大定理被提出后，经历多人猜想辩证，历经三百多年的历史，最终在1995年英国数学家Andrew Wiles证明了这个结论。

借助亚纯函数的 Nevanlinna 理论这一强有力工具，早在 Fermat 大定理被严格证明之前，1966 年，当 $n\ge 2$ 时 Fermat 型函数方程

$$f^n(z)+g^n(z)=1 \tag{1}$$

非常数亚纯解的存在性问题就已经被刻画清楚了[1] [2]。

受 Fermat 大定理的启发，Euler 提出了如下的猜想[3]：若 $n\ge 3$，则不定方程

$$\sum_{k=1}^{n-1}(a_k)^n=b^n \tag{2}$$

无正整数解。

对于 $n=4,5$，L. J. Lander，N. D. Elkies [4] [5]给出反例表明，不定方程(2)存在非平凡正整数解。

对于 $n\ge 6$，上述的 Euler 猜想是否成立？这一问题迄今尚未解决。即使对于 $n\ge 6$，不定方程 $x^n+y^n+z^n=t^n$ 是否存在非平凡的正整数解的问题也未彻底解决。而研究不定方程 $x^n+y^n+z^n=t^n$ 整数解的存在性问题可以转化为研究方程 $x^n+y^n+z^n=1$ 有理数解的存在性问题。

类似地，不妨先考虑下述问题：是否存在非常数亚纯函数 $f(z),g(z),h(z)$ 满足 Fermat 型函数方程

$$f^n(z)+g^n(z)+h^n(z)=1 \tag{3}$$

其中 $n\ge 2$。关于函数方程(1) (3)的上述问题可以看作 Fermat 大定理在亚纯函数域上解的状况。W. K. Hayman，G. G. Gundersen 等人经过很长时间的探究，已得到如下结果。

J. Molluzzo [6]、M.Green [7]、Gundersen [8] [9] [10]等人给出例子表明：对于 $2\le n\le 6$ 函数方程(3)存在非常数亚纯函数解。

1985年，Hayman [11]证明了：如果 $n\ge 9$，则不存在非常数亚纯函数 $f(z),g(z),h(z)$ 满足函数方程(3)。

2009 年，苏敏与李玉华[12]证明了：如果 $n=8$，则不存在增长级小于 1 的非常数亚纯函数 $f(z),g(z),h(z)$ 满足函数方程(3)。

对于 $n=7,8$，是否存在非常数亚纯函数 $f(z),g(z),h(z)$ 满足函数方程(3)的问题，现在还没有解决。

本文探究了当 $n=7$ 时函数方程(3)亚纯解的存在性，证明了下述定理：

定理 1 如果存在非常数亚纯函数 $f(z),f^{(s)}(z),h(z)$ 满足函数方程

$$f^7(z)+\left(f^{(s)}(z)\right)^7+h^7(z)=1 \tag{4}$$

则 τ 是整函数，其中

$$\tau=\begin{vmatrix} f^2 & \left(f^{(s)}\right)^2 & h^2 \\ ff' & f^{(s)}f^{(s+1)} & hh' \\ 6f'^2+ff'' & 6\left(f^{(s+1)}\right)^2+f^{(s)}f^{(s+2)} & 6h'^2+hh'' \end{vmatrix}$$

定理 2 如果存在非常数亚纯函数 $f(z),f^{(s)}(z),h(z)$ 满足函数方程(4)，且 $f(z)$ 的增长级 $\rho_f<\frac{28}{21}$，则存在非零常数 c，使得 $\tau\equiv c$。

2. 几个引理

引理 1 [1] 如果 $n\geq 4$，则不存在非常数亚纯函数 $f(z),g(z)$ 满足函数方程(1)。

引理 2 [13] 设 $f_j(z)(j=1,2,\cdots,k)$ 为区域 D 内 k 个亚纯函数。若 $f_1,\cdots,f_k$ 线性无关，则 $f_1,\cdots,f_k$ 的 Wronskian 行列式

$$W(f_1,\cdots,f_k)\triangleq\begin{vmatrix} f_1 & \cdots & f_k \\ f_1' & \cdots & f_k' \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(k-1)} & \cdots & f_k^{(k-1)} \end{vmatrix}\neq 0$$

引理 3 [14] 如果 $f(z)$ 是非常数亚纯函数，且增长级 $\rho_f<+\infty$，则对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists E\subset(1,+\infty)$，使得 $\int_E\frac{\mathrm{d}r}{r}<+\infty$，且

$$\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right|\leq|z|^{\rho_f-1+\varepsilon}\left(|z|\in R^+\setminus E\cup[0,1]\right)$$

引理 4 [15] 设 $f(z)$ 为 $\mathbb{C}$ 上的亚纯函数，k 为正整数，则 $f(z)$ 与 $f^{(k)}(z)$ 有相同的增长级。

3. 定理的证明

3.1. 定理 1 的证明

由于存在非常数亚纯函数 $f(z),f^{(s)}(z),h(z)$ 满足方程(4)，则 $f^7(z),\left(f^{(s)}(z)\right)^7,h^7(z)$ 线性无关。如若不然，假设 $f^7(z),\left(f^{(s)}(z)\right)^7,h^7(z)$ 线性相关，则存在三个不全为零的常数 c_1,c_2,c_3，使得 $c_1f^7(z)+c_2\left(f^{(s)}(z)\right)^7+c_3h^7(z)=0$。不妨设 $c_3\neq 0$，则

$$\left(1-\frac{c_1}{c_3}\right)f^7(z)+\left(1-\frac{c_2}{c_3}\right)\left(f^{(s)}(z)\right)^7=1 \tag{5}$$

由引理 1 可知，方程(5)只有常数解，从而得出矛盾。于是 $f^7(z),\left(f^{(s)}(z)\right)^7,h^7(z)$ 线性无关，从而由引理 2 得 $W\left(f^7,\left(f^{(s)}\right)^7,h^7\right)\neq 0$。

由方程(4)可得

$$\begin{cases} f^7+\left(f^{(s)}\right)^7+h^7=1, \\ ff'^6+f^{(s+1)}\left(f^{(s)}\right)^6+h'h^6=0, \\ \left(6f'^2+ff''\right)f^5+\left(6\left(f^{(s+1)}\right)^2+f^{(s)}f^{(s+2)}\right)\left(f^{(s)}\right)^5+\left(6h'^2+hh''\right)h^5=0. \end{cases}$$

令

$$\tau=\begin{vmatrix} f^2 & \left(f^{(s)}\right)^2 & h^2 \\ ff' & f^{(s)}f^{(s+1)} & hh' \\ 6f'^2+ff'' & 6\left(f^{(s+1)}\right)^2+f^{(s)}f^{(s+2)} & 6h'^2+hh'' \end{vmatrix}$$

则 $W\left(f^7,\left(f^{(s)}\right)^7,h^7\right)=49f^5\left(f^{(s)}\right)^5h^5\tau\not\equiv0$，因此

$$\tau\not\equiv0. \tag{6}$$

于是

$$\tau=\frac{1}{f^5}\begin{vmatrix} f^{(s)}f^{(s+1)} & hh' \\ 6\left(f^{(s+1)}\right)^2+f^{(s)}f^{(s+2)} & 6h'^2+hh'' \end{vmatrix}=\frac{f^{(s)}f^{(s+1)}hh'}{f^5}\left\{6\left(\frac{h'}{h}-\frac{f^{(s+1)}}{f^{(s)}}\right)+\left(\frac{h''}{h'}-\frac{f^{(s+2)}}{f^{(s+1)}}\right)\right\} \tag{7}$$

$$\tau=\frac{1}{\left(f^{(s)}\right)^5}\begin{vmatrix} hh' & ff' \\ 6h'^2+hh'' & 6f'^2+ff'' \end{vmatrix}=\frac{ff'hh'}{\left(f^{(s)}\right)^5}\left\{6\left(\frac{f'}{f}-\frac{h'}{h}\right)+\left(\frac{f''}{f'}-\frac{h''}{h'}\right)\right\} \tag{8}$$

$$\tau=\frac{1}{h^5}\begin{vmatrix} ff' & f^{(s)}f^{(s+1)} \\ 6f'^2+ff'' & 6\left(f^{(s+1)}\right)^2+f^{(s)}f^{(s+2)} \end{vmatrix}=\frac{ff'f^{(s)}f^{(s+1)}}{h^5}\left\{6\left(\frac{f^{(s+1)}}{f^{(s)}}-\frac{f'}{f}\right)+\left(\frac{f^{(s+2)}}{f^{(s+1)}}-\frac{f''}{f'}\right)\right\} \tag{9}$$

下面证明 τ 是整函数。

如果 τ 存在极点，那么 τ 的极点仅可能在 $f(z),f^{(s)}(z),h(z)$ 的极点处取得。设 z_0 分别为 $f(z),h(z)$ 的 p,t 重极点，且

$$f(z)=\frac{a_{-p}}{(z-z_0)^p}(1+O(1))，\quad h(z)=\frac{c_{-t}}{(z-z_0)^t}(1+O(1))$$

这里 $a_{-p}\neq0$，$c_{-t}\neq0$，$O(1)$ 为 $f(z),h(z)$ 的解析部分，每次出现不一定相同，则

$$f^{(s)}(z)=\frac{(-1)^s a_{-p}p(p+1)\cdots(p+s-1)}{(z-z_0)^{p+s}}(1+O(1))$$

从而由(8)式得

$$\tau=\frac{c_{-t}^2t}{a_{-p}^3(-1)^{5s}p^4\left[(p+1)\cdots(p+s-1)\right]^5}(z-z_0)^{5(p+s)-2p-2t-2}(1+O(1))\cdot\frac{7(t-p)}{z-z_0}(1+O(1))$$

由于 $p\geq1,s\geq1$，且由方程(4)可知 $t=p+s>p$，则

$$5(p+s)-2p-2t-3=p+3s-3>1$$

于是 τ 在点 z_0 解析。因此 τ 为整函数。

3.2. 定理 2 的证明

在定理 1 的证明基础上，证明定理 2。

将(7)~(9)式相乘得

$$\tau^3=\frac{1}{ff^{(s)}h}\left(\frac{f'}{f}\right)^2\left(\frac{f^{(s+1)}}{f^{(s)}}\right)^2\left(\frac{h'}{h}\right)^2\left\{6\left(\frac{h'}{h}-\frac{f^{(s+1)}}{f^{(s)}}\right)+\left(\frac{h''}{h'}-\frac{f^{(s+2)}}{f^{(s+1)}}\right)\right\}$$
$$\cdot\left\{6\left(\frac{f'}{f}-\frac{h'}{h}\right)+\left(\frac{f''}{f'}-\frac{h''}{h'}\right)\right\}\cdot\left\{6\left(\frac{f^{(s+1)}}{f^{(s)}}-\frac{f'}{f}\right)+\left(\frac{f^{(s+2)}}{f^{(s+1)}}-\frac{f''}{f'}\right)\right\},$$

$$\tau^7=\frac{\tau}{\left(ff^{(s)}h\right)^2}\left(\left(\frac{f'}{f}\right)^2\left(\frac{f^{(s+1)}}{f^{(s)}}\right)^2\left(\frac{h'}{h}\right)^2\left\{6\left(\frac{h'}{h}-\frac{f^{(s+1)}}{f^{(s)}}\right)+\left(\frac{h''}{h'}-\frac{f^{(s+2)}}{f^{(s+1)}}\right)\right\}\right.$$
$$\left.\cdot\left\{6\left(\frac{f'}{f}-\frac{h'}{h}\right)+\left(\frac{f''}{f'}-\frac{h''}{h'}\right)\right\}\cdot\left\{6\left(\frac{f^{(s+1)}}{f^{(s)}}-\frac{f'}{f}\right)+\left(\frac{f^{(s+2)}}{f^{(s+1)}}-\frac{f''}{f'}\right)\right\}\right)^2.$$

由引理 3 得，对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists E\subset(1,+\infty)$，使得 $\int_E\frac{\mathrm{d}r}{r}<+\infty$，且

$$|\tau|^7\le B\left(\left|\frac{f'}{f}\right|+\left|\frac{f''}{f'}\right|+\left|\frac{f^{(s+1)}}{f^{(s)}}\right|+\left|\frac{f^{(s+2)}}{f^{(s+1)}}\right|+\left|\frac{h'}{h}\right|+\left|\frac{h''}{h'}\right|\right)^{21}$$
$$\le B|z|^{21(\rho_f-1+\varepsilon)}\quad(|z|\in R^+\setminus E\cup[0,1]，B\text{ 为某一常数})。\tag{10}$$

由引理 4 和方程(4)知：$\rho_f=\rho_{f^{(s)}}=\rho_h=\rho_{h'}<\frac{28}{21}$。

又由定理 1 知 τ 为整函数，则由(10)式可得 τ 为常数。再由(6)式知 $\tau\ne0$，则必存在非零常数 c，使得 $\tau\equiv c$。

4. 结论

本文主要对是否存在非常数亚纯函数 $f(z),g(z),h(z)$ 满足函数方程

$$f^7(z)+g^7(z)+h^7(z)=1\tag{11}$$

的问题进行研究，但由于上述问题研究起来困难重重，不妨先研究 $g(z)=f^{(s)}(z)$ 时函数方程亚纯解的情况，定理 1、定理 2 是研究此问题得到的一点点结论。受文献[12]的启发，进一步将探究下述问题：是否存在增长级小于 1 的非常数亚纯函数 $f(z),g(z),h(z)$ 满足函数方程(11)。

基金项目

云南省教育厅科学研究基金项目(2023J1212, 2022J0967)；昭通学院教学改革研究项目(Ztjx202102)。

参考文献

[1] Gross, F. (1996) On the Functional Equation $f^n+g^n=1$. *Bulletin of the American Mathematical Society*, **72**, 86-89.

https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1966-11429-5

[2] Baker, I.N. (1966) On a Class of Meromorphic Functions. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **17**, 819-822. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1966-0197732-X

[3] Hardy, G.H., Wright, E.M., Wiles, A., *et al.* (2008) An Introduction to the Theory of Numbers. Oxford University Press, Oxford.

[4] Lander, L.J. and Parkin, T.R. (1996) Counterexample to Euler's Conjecture on Sums of Like Powers. *Bulletin of the American Mathematical Society*, **72**, 1079. https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1966-11654-3

[5] Elkies, N.D. (1988) On $A^4+B^4+C^4=D^4$. *Mathematics of Computation*, **51**, 825-835. https://doi.org/10.1090/S0025-5718-1988-0930224-9

[6] Molluzo, J. (1972) Monotonicity of Quadrature Formulas and Polynomial Representation. Ph.D. Thesis, Yeshiva University, New York.

[7] Green, M. (1975) Some Picard Theorems for Holomorphic Maps to Algebric Varieties. *American Journal of Mathematics*, **97**, 43-75. https://doi.org/10.2307/2373660

[8] Gundersen, G.G. and Tohge, K. (2004) Entire and Meromorphic Solutions of $f^5(z)+g^5(z)+h^5(z)=1$. In: *Symposium on Complex Differential and Functional Equations*, *Report Series No*. 6, University of Joensuu, Joensuu, Vol. 6, 57-67.

[9] Gundersen, G.G. (2001) Meromorphic Solutions of $f^5+g^5+h^5=1$. The Chuang Special Issue. *Complex Variables*, *Theory and Application*: *An International Journal*, **43**, 293-298. https://doi.org/10.1080/17476930108815320

[10] Gundersen, G.G. (1998) Meromorphic Solution of $f^6+g^6+h^6=1$. *Analysis*, **18**, 285-290. https://doi.org/10.1524/anly.1998.18.3.285

[11] Hayman, W.K. (1985) Waring's problem für analytische funktionen. Bayerische Akademie der Wissenschaften Mathematisch-Naturwissenschaftliche Klasse. *Sitzungsberichte*, 1-13.

[12] 苏敏, 李玉华. 关于函数方程非平凡亚纯解的研究[J]. 云南师范大学学报: 自然科学版, 2009, 29(2): 41-44.

[13] 顾永兴, 庞学诚, 方明亮. 正规族理论及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2007.

[14] Chiang, Y.M. and Feng, S.J. (2008) On the Nevanlinna Characteristic of $f(z+\eta)$ and Difference Equations in the Complex Plane. *The Ramanujan Journal*, **16**, 105-129. https://doi.org/10.1007/s11139-007-9101-1

[15] 杨乐. 值分布理论及其新研究[M]. 北京: 科学出版社, 1982.