Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(11), 3193-3197
Published Online November 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.1311331

直径为3且有割边的已约简图

冶福龙，秦晓晓

青海师范大学数学与统计学院，青海 西宁

收稿日期：2023年10月7日；录用日期：2023年11月8日；发布日期：2023年11月15日

摘 要

若图$H = (V(H), E(H))$ 的任意一个偶子集 $R \subseteq V(H)$, H 有一个生成连通子图H_R, 使得 $O(H_R) = S$, 则H 是可折叠的. **Catlin** 证明任意图 G 都有唯一的两两点不交的极大可折叠子图的集合. G 的约简记为 G', 是将 G 中的每一个极大可折叠子图收缩成一个点后得到的图. 若 $G = G'$, 则 G 是已约简的. 在本文中主要刻画直径为3 且有割边的已约简图. 若割边是非平凡的, 则 $G \cong S'_{n,m}$; 否则, 除 1 度点外其余点都在一个导出i-圈, $i \in \{4, 5\}$.

关键词

直径，可折叠图，已约简图

Reduced Graphs of Diameter Three and Having Cut Edges

Fulong Ye, Xiaoxiao Qin

School of Mathematics and Statistics, Qinghai Normal University, Xining Qinghai

Received: Oct. 7^{th}, 2023; accepted: Nov. 8^{th}, 2023; published: Nov. 15^{th}, 2023

文章引用: 冶福龙, 秦晓晓. 直径为3且有割边的已约简图[J]. 理论数学, 2023, 13(11): 3193-3197.
DOI: 10.12677/pm.2023.1311331

Abstract

A graph $H = (V(H), E(H))$ is collapsible if for every subset $R \subseteq V(H)$ with $|R|$ even, H has a spanning connected sungraph H_R such that $O(H_R) = R$. Catlin showed that every graph G has unique collection of pairwise vertex-disjoint maximal collapsible subgraphs. The reduction of G, denoted by G', is the graph obtained from G by contracting each maximal collapsible subgraphs into a single vertex. A graph G is reduced if $G = G'$. In this article, we characterize the reduced graphs of diameter three and having cut edges. If the cute edge is nontrival, then $G \cong S'_{n,m}$, otherwise, all vertices in an induced i-cycle, except 1 degree vertices, $i \in \{4, 5\}$.

Keywords

Diameter, Collapsible Graph, Reduced Graph

1. 引言

本文沿用Bondy 和Murty [1]中定义的符号和术语. 设图$G = (V(G), E(G))$, 用$V(G)$、$E(G)$ 分别表示图G 的顶点集、边集. 用$|V(G)|$ 和$|E(G)|$ 分别表示图G 的顶点数和边数. 图G 的顶点v 的度是指G 中与v 关联的边的数目, 记为$d_G(v)$. 图G 的最小度记为$\delta(G) = min\{d_G(v) : v \in V(G)\}$. 对于点集$S \subseteq V(G)$, 用$G[S]$ 表示图G 中由S 导出的子图. $H \subset G$ 表示H 是G 的真子图. 设边$e = xy$, 若$G - e$ 不连通, 则称这条边为割边. 若连通图G 删去割边产生的每个连通分支都至少有两个点, 则称割边e 是非平凡的, 否则称为平凡的. 设$X \subseteq V(G)$, 若X 中的任意两点不是相邻的, 则称X 是独立集. $D_1(G)$ 表示所有1 度点的集合. 设$v \in V(G)$, $N_G(v)$ 表示与v 所相邻点的集合. 若$S \subseteq V(G)$, $N_G(S)$ 表示集合$G - S$ 与S 中的每一个点所相邻的点的集合. 对边集$X \subseteq E(G)$, G/X 是从图G 中收缩X 的所有边, 并删除所形成的自环.

完全二部图$K_{1,n-1}$ 就是n 阶星图, 记作S_n. 用一条边粘连两个星图S_n 和S_m 的中心所构成的$n+m+1$ 阶简单图称作$n+m+1$ 阶双星图, 记作$S'_{n,m}$. $K'_{2,t}(u, u', u'')$ 是从一个完全二部图$K_{2,t}(u, u')$ 添加一个只与u' 相邻的新顶点u'' 而所得到的图. 令$S_{m,l}$ 是从$K_{2,m}(u, u')$ 和$K'_{2,l}(w, w', w'')$ 中, 分别

将u 和w, u' 和w'' 粘成一个点所形成的图.具体如图 1所示.

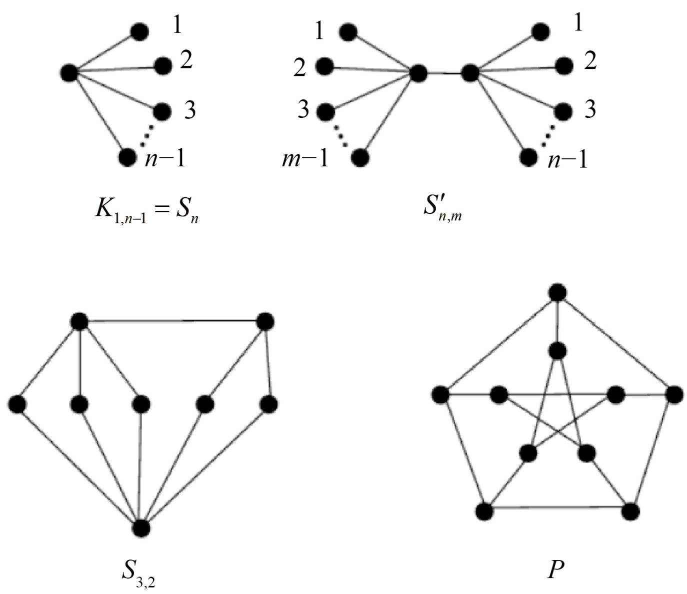

Figure 1. S_n, $S'_{n,m}$, $S_{m,l}$, P
图 1. S_n, $S'_{n,m}$, $S_{m,l}$, P

我们用$dist(u,v)$ 表示图G 中u 和v 两点的距离. 图G 的直径记为$diam(G)$, 定义如下:

$$diam(G) = \max_{u,v\in V(G)} dist(u,v).$$

对图 G, 用 $O(G)$ 表示 G 中所有的奇度点集. 如果 $O(G) = \emptyset$, 那么称 G 是欧拉图. 如果 G 有一个生成欧拉子图, 则称它是超欧拉的. 设H 是一个图, 如果对于$V(H)$ 的任何一个偶子集 R, H 都有一个生成连通子图H_R 满足$O(H) = R$, 那么称H 是可折叠的. 因此, K_1 既是超欧拉, 又是可折叠. 我们用 CL 和 SL 分别表示由可折叠图和超欧拉图组成的集合. 显然 $CL \subseteq SL$. 例如, $C_t(t \geq 4)$ 是超欧拉但不是可折叠的.

在 [2]中, Catlin 证明了任意一个图G 都可以划分为若干个两两顶点不相交的极大可折叠子图$H_1, H_2, \cdots, H_c$, 使得$\cup_{i=1}^{c} V(H_i) = V(G)$, 并且这种划分是唯一的. 图$G$ 的约简图记为G', 是指将G 的每个H_i 收缩为一个顶点v_i 所得到的图$(1 \leq i \leq c)$. 如果$G = G'$, 那么称 G 是一个已约简图. 因此, 既是已约简图又是可折叠图的图只有K_1.

Catlin 证明在 [2]中证明了如下结论：

定理A (Catlin [2])

(1) G 是已约简图当且仅当G 中没有非平凡的可折叠子图.

(2) 如果G 是已约简图, 则G 不含K_3 作为子图, 且$\delta(G) \leq 3$ 的简单图.

(3) 若H 是G 的可折叠子图, 则G 是可折叠的当且仅当G/H 是可折叠的.

直径为2 的已约简图由赖虹建教授等人在 [3]中完全解决,如定理A 所示.

定理B (Lai [3]) 设G 是直径为2 的已约简图, 则下列恰好之一成立.

(a) $G \cong K_{1,t}$, $t \geq 2$;
(b) $G \cong K_{2,t}$, $t \geq 2$;
(c) $G \cong S_{n,l}$, $n, m \geq 1$;
(d) $G \cong P$, P是皮特森图.

本文的主要结论如下:

定理 1.1. *若直径为3 的已约简图G 且有割边$e = uv$, 则:*
(i) 若G 中存在非平凡的割边e, 则G 是双星图;
(ii) 若G 仅有平凡割边e, 则除1 度点外, 其余所有点都在一个i-圈, $i \in \{4, 5\}$. 此外, $|N_G(D_1(G))| \leq 2$, 等号成立时, 当且仅当一个点是v, 另外一个点是v 的邻点.

2. 主要结论的证明

证明. 若G 存在非平凡的割边, 设其为e, 则$G-e$ 有两个非平凡的分支, 设为G_1 和G_2. 有$|V(G_i)| \geq 2$, $i \in \{1, 2\}$. 对任意$x \in N_{G_1}(u)$, 及任意$y \in N_{G_2}(v)$ 有$d_G(x) = d_G(y) = 1$. 否则, 存在点$x_1 \in V(G_1)$, 使得$xx_1 \in E(G_1)$, 由G 是已约简图,根据定理A 的(2), 则$x_1u \notin E(G_1)$, 那么$dist(x_1, u) = 2$. 从而,

$$dist(x_1, y) = dist(x_1, v) + dist(v, y) \geq 3 + 1 = 4.$$

与$diam(G) = 3$ 矛盾. 因此$d_G(x) = 1$. 同理可得$d_G(y) = 1$. 综上, $G_1 \cong K_{1,t_1}$, $G_2 \cong K_{1,t_2}$, t_1 和t_2 是任意正整数. 从而G 是双星图.

若G 中没有非平凡的割边, 那么设e 是一条平凡的割边. 由$diam(G) = 3$, 则$G - e$ 不会有两个平凡的分支. 因此下面只需考虑恰有一个平凡的分支. 即割边e 上其中一个点的度为1, 不妨设$d_G(u) = 1$. 显然, uv 是关于v 的一条悬挂边, 若还有一度点, 设为w , 当$vw \notin E(G)$ 时, 则点w 只能是v 的某个邻点的悬挂边. 否则, $dist(v, w) \geq 3$. 那么有

$$dist(u, w) = dist(u, v) + dist(v, w) \geq 1 + 3 = 4.$$

与$diam(G) = 3$ 矛盾. 因此, 要么w 是与v 相邻的1 度点, 要么是关于v 的某个邻点的1 度点. 若任意两个一度点w_1 和w_2 都不是与v 相邻的1 度点, 则$N_G(w_1) = N_G(w_2)$. 否则, 设$w_1v_1 \in E(G), w_2v_2 \in E(G)$, 其中$v_1, v_2 \in N_G(v)$. 有$dist(w_1, v) = dist(w_2, v) = 2$. 由$G$ 是已约简图, 则$N_G(v)$ 是独立集, 因此$dist(v_1, v_2) \geq 2$. 从而

$$dist(w_1, w_2) = dist(w_1, v_1) + dist(v_1, v_2) + dist(v_2, w_2) \geq 1 + 2 + 1 = 4.$$

与$diam(G) = 3$矛盾. 因此, 所有的1 度点所相邻的点除v 外, 最多有一个且属于$N_G(v)$. 即$|N_G(D_1(G))| \leq 2$, 等号成立时, 一个点是v, 另外一个点是v 的邻点. 此外, 任意$y \in V(G) - D_1(u) - v$, $dist(y, v) \leq 2$. 否则, $dist(u, y) = dist(u, v) + dist(v, y) \geq 4$. 由$d_G(y) \geq 2$, 则存在点$y_1 \in N_G(y)$, 假设$d_G(y_1) \geq 2$, 则$dist(y, v) \leq 2$. 由$N_G(v)$ 是独立集, 则$dist(y, v) = 1$ 和$dist(y_1, v) = 1$ 不可能同时成立. 若$dist(y_1, v) = dist(y, v) = 2$, 则$y$ 在一个5-圈上. 若$dist(y_1, v) = 2$ 且$dist(y, v) = 1$, 或者$dist(y_1, v) = 1$ 且$dist(y, v) = 2$, 则y 在一个4-圈上. 显然, v 也在i-圈上, $i \in \{4, 5\}$. □

3. 结论

本文主要刻画直径为3 且有割边的已约简图的结构性质. 已约简图在研究超欧拉问题中起到关键作用. 此外, 较小直径的已约简图也可以用来解决一些双圈覆盖问题.

参考文献

[1] Bondy, J.A. and Murty, U.S. (1976) Graph Theory and Its Applications. The Macmillan Press, London.

[2] Catlin, P.A. (1988) A Reduction Method to Find Spanning Eulerian Subgraphs. *Journal of Graph Theory*, **12**, 29-45. https://doi.org/10.1002/jgt.3190120105

[3] Lai, H.J. (1990) Reduced Graphs of Diameter Two. *Journal of Graph Theory*, **14**, 77-87. https://doi.org/10.1002/jgt.3190140109