Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(11), 3358-3364
Published Online November 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.1311348

Hans汉斯

丢番图方程$(75n)^x+(308n)^y=(317n)^z$

黄日娣，邓乃娟

湛江幼儿师范专科学校数学系，广东 湛江

收稿日期：2023年10月22日；录用日期：2023年11月23日；发布日期：2023年11月30日

摘 要

设 a,b,c 是两两互素的正整数且 $a^2+b^2=c^2$ 。Jesmanowicz猜想：对于任意给定的正整数n，方程$(an)^x+(bn)^y=(cn)^z$只有正整数解$(x,y,z)=(2,2,2)$。本文利用数论中的一些方法证明了：对任意的正整数n，方程$(75n)^x+(308n)^y=(317n)^z$只有正整数解$(x,y,z)=(2,2,2)$，即当$(a,b,c)=(75,308,317)$时，Jesmanowicz猜想成立。

关键词

Jesmanowicz猜想，丢番图方程，正整数解

On the Diophantine Equation $(75n)^x+(308n)^y=(317n)^z$

Ridi Huang, Naijuan Deng

Department of Mathematics, Zhanjiang Preschool Education College, Zhanjiang Guangdong

Received: Oct. 22nd, 2023; accepted: Nov. 23rd, 2023; published: Nov. 30th, 2023

Abstract

Let a,b,c be a primitive Pythagogrean triples such that $a^2+b^2=c^2$. Jesmanowicz conjectured that, for any positive integer n, the Diophantine equation $(an)^x+(bn)^y=(cn)^z$ has only positive integer solution $(x,y,z)=(2,2,2)$. In this paper, by using some methods of number theory,we prove that, for any positive integer n, the Diophantine equation $(75n)^x+(308n)^y=(317n)^z$ has only positive integer solution $(x,y,z)=(2,2,2)$, that is the Jesmanowicz conjecture is true, when

文章引用: 黄日娣, 邓乃娟. 丢番图方程$(75n)^x+(308n)^y=(317n)^z$ [J]. 理论数学, 2023, 13(11): 3358-3364.
DOI: 10.12677/pm.2023.1311348

$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=(\mathbf{75},\mathbf{308},\mathbf{317})$.

Keywords

Jesmanowicz's Conjecture, Diophantine Equation, Positive Integer Solution

1. 引言

不定方程是数论领域中一个重要的分支，古希腊数学家丢番图曾在三世纪初就开始研究这样的方程，所以不定方程又称为丢番图方程，其中指数型不定方程是较为重要的一部分，并且它在群论、组合论和编码理论中也被广泛运用，但是对它的求解往往比较困难，因此对于不定方程的求解过程中更能体现出技巧性和趣味性。

设(a,b,c)是本原商高数组。Jesmanowicz [1]曾猜想：对于任意正整数n，丢番图方程

$$(na)^x+(nb)^z=(nc)^z \tag{1}$$

只有正整数解$(x,y,z)=(2,2,2)$。这一猜想至今只证明了对一些较为简单的商高数组是正确的。对于$n=1$，Terai [2]证明了方程

$$(m^2-4)^x+(4m)^y=(m^2+4),m>1,m\equiv1(\mathrm{mod}\,2)$$

只有正整数解$(x,y,z)=(2,2,2)$；李双志[3]证明了当$k\equiv1,2(\mathrm{mod}\,3),k\equiv2(\mathrm{mod}\,4)$时，方程

$$(3(2k+3))^x+(2k(k+3))^y=(2k(k+3)+9)^z$$

只有正整数解$(x,y,z)=(2,2,2)$。等等。对于n为任意正整数，Miyazaki [4]证明了当$(a,b,c)=(2^{2r}-1,2^{r+1},2^{2r}+1),r\in N$时，Jesmanowicz猜想正确；陈凤娟[5]证明了当$(a,b,c)=(p^{2r}-4,4p^r,p^{2r}+4),p>3$，$p$为素数，$p\equiv3,5,7(\mathrm{mod}\,8)$时，若$P(n)|b$或$P(a)|n$，则Jesmanowicz猜想正确；孙翠芳[6]证明了当$(a,b,c)=(4p^{2r}-1,4p^r,4p^{2r}+1),p\equiv3(\mathrm{mod}\,4)$且$p$为素数时，若$P(n)|b$或$P(a)|n$，则Jesmanowicz猜想正确。等等。虽然在很多特殊情况下，Jesmanowicz猜想是正确的，但一般情形仍未解决，目前的结果大都集中在$n=1$的情形，而对于$n>1$，只有为数不多的特殊情形被解决。记$P(n)$为n的所有素因子的乘积，$\left(\frac{*}{*}\right)$为雅克比符号。

本文考虑方程(1)中$(a,b,c)=(75,308,317)$的情形，证明了Jesmanowicz猜想正确。结果如下

定理1 对于任意正整数n时，丢番图方程

$$(75n)^x+(308n)^y=(317n)^z \tag{2}$$

只有正整数解$(x,y,z)=(2,2,2)$。

2. 预备知识

定义 2.1 [7] 给定一个正整数 m，如果用 m 去除两个整数 a 和 b 所得的余数相同，我们就说 a,b 对模

m 同余，记作 $a\equiv b\pmod m$，把该式称为模 m 的同余式，简称同余式。如果余数不同，我们就说 a,b 对 m 不同余，记作 $a\not\equiv b\pmod m$。

定义 2.2 [8] 设 $m>1$，$x^2\equiv n\pmod m$，$(n,m)=1$，若该同余式有解，则 n 称为模 n 的二次剩余；若该同余式无解，则 n 称为模 m 的二次非剩余。

定义 2.3 [8] 勒让德(Legendre)符号 $\left(\frac{a}{p}\right)$ (读作 a 对 p 的勒让德符号)是一种对于给定的奇素数 p 定义在一切整数 a 上的函数，它的值规定如下：

$$\left(\frac{a}{p}\right)=\begin{cases}1, & a\text{是模 }p\text{的二次剩余},\\ -1, & a\text{是模 }p\text{的二次非剩余},\\ 0, & p\mid a\end{cases}$$

定义 2.4 [8] 雅可比符号 $\left(\frac{a}{m}\right)$ (读作 a 对 m 的雅可比符号)是一个对于给定的大于 1 的单整数 m 定义在一切整数 a 上函数，它在 a 上的函数值是

$$\left(\frac{a}{m}\right)=i=\prod_{i=1}^{r}\left(\frac{a}{p_i}\right)$$

其中 $m=p_1p_2\cdots p_r$， $p_i\,(i=1,2,\cdots,r)$ 是素数，$\left(\frac{a}{p_i}\right)$是 a 对 p_i 的勒让德符号。

性质 2.5 设 m,n 为正奇数

1) 若 $a\equiv a_1\pmod m$ 和 $(m,n)=1$，则 $\left(\frac{a}{m}\right)=\left(\frac{a_1}{m}\right)$；

2) 若 $(a,m)=(a,n)=1$，则 $\left(\frac{a}{m}\right)\left(\frac{a}{n}\right)=\left(\frac{a}{mn}\right)$；

3) 若 $(a,m)=(b,m)=1$，则 $\left(\frac{a}{m}\right)\left(\frac{b}{m}\right)=\left(\frac{ab}{m}\right)$。

性质 2.6 $\left(\frac{-1}{m}\right)=(-1)^{\frac{m-1}{2}}$；$\left(\frac{2}{m}\right)=(-1)^{\frac{m^2-1}{8}}$。

性质 2.7 若 m 和 n 是两个正奇数，且 $(m,n)=1$，则

$$\left(\frac{m}{n}\right)=(-1)^{\frac{(m-1)(n-1)}{4}}\left(\frac{n}{m}\right)。$$

引理 2.1 [9] 当 $k\equiv 3\pmod 8$，$3\nmid k$ 时，丢番图方程

$$\left(3(2k+3)\right)^x+\left(2k(k+3)\right)^y=\left(2k(k+3)+9\right)^z$$

只有正整数解 $(x,y,z)=(2,2,2)$。

引理 2.2 [10] 设 a,b,c 是两两互素的正整数且 $a^x+b^y=c^z$ 只有正整数解 $(x,y,z)=(2,2,2)$。如果 $(x,y,z)\neq(2,2,2)$ 是方程 $(an)^x+(bn)^y=(cn)^z$ 的正整数解，则其满足下列条件之一：

1) $x>z>y, P(n)\mid b$；

2) $y>z>x, P(n)\mid a$。

3. 定理的证明

定理 1 的证明：因为 $75=3\cdot(2\times11+3)$， $308=2\times11\times14$， $317=2\times11\times14+9$，且 $11\equiv3\pmod 8$，由

引理 1 知，方程 $75^x+308^y=317^z$ 只有正整数解 $(x,y,z)=(2,2,2)$。下面我们不妨设 $n>1$。假设 $(x,y,z)\neq(2,2,2)$ 是方程(2)的正整数解，故由引理 2 可知，$x<z<y,p(n)\mid 75$ 或 $y<z<x,p(n)\mid 308$。

下面分两种情况进行讨论：

情形 1　当 $x<z<y,p(n)\mid 75$ 时，则方程(2)可整理为

$$317^z-308^y n^{y-z}=\frac{75^x}{n^{z-x}} \tag{3}$$

不妨设 $n=3^s\cdot 5^t$，其中 s,t 均为非负整数且 $\max\{s,t\}\geq 1$。

情形 1.1：如果 $s>0,t>0$，则 $s(z-x)=x,t(z-x)=2x$，于是方程(3)可整理为

$$317^z-308^y\cdot 3^{s(y-z)}\cdot 5^{t(y-z)}=1 \tag{4}$$

对(4)式模 5 得 $2^z\equiv 1(\bmod 5)$，故 $4\mid z$。令 $z=4z_1$，于是，$\left(317^{z_1}-1\right)\left(317^{z_1}+1\right)=308^y\cdot 3^{s(y-z)}\cdot 5^{t(y-z)}=2^{2y}\cdot 7^y\cdot 11^y\cdot 3^{s(y-z)}\cdot 5^{t(y-z)}$。因为 $\gcd\left(317^{z_1}-1,317^{z_1}+1\right)=2$，由雅克比符号 $\left(\frac{-1}{11}\right)=-1,\left(\frac{-1}{7}\right)=-1,\left(\frac{-1}{3}\right)=-1$ 可得

$$\begin{cases}317^{z_1}-1=2^{2y-1}\cdot 7^y\cdot 11^y\cdot 3^{s(y-z)}\\ 317^{z_1}+1=2\cdot 5^{t(y-z)}\end{cases}。$$

即 $2^{2y-1}\cdot 7^y\cdot 11^y\mid\left(317^{2z_1}-1\right)$。但是

$2^{2y-1}\cdot 7^y\cdot 11^y>4^{y-1}\cdot 7^y\cdot 11^y>(4\cdot 7\cdot 11)^z=308^z=308^{4z_1}>(317+1)^{2z_1}>317^{2z_1}+1>317^{2z_1}-1$ 这不可能。

情形 1.2：如果 $s>0,t=0$，则 $s(z-x)=x$，方程(3)可整理为

$$317^z-308^y\cdot 3^{s(y-z)}=5^{2x} \tag{5}$$

对(5)式模 3 得 $2^z\equiv 1(\bmod 3)$，于是 $2\mid z$。对(5)式模 5 得 $2^z\equiv 3^{y+s(y-z)}(\bmod 5)$，于是 $2\mid y+s(y-z)$。对(5)式模 7 得

$$308^y\cdot 3^{s(y-z)}=-5^{2x}(\bmod 317) \tag{6}$$

又因为 $317\equiv 1(\bmod 4)$，由雅克比符号的性质得

$$\left(\frac{308}{317}\right)=\left(\frac{4}{317}\right)\left(\frac{7}{317}\right)\left(\frac{11}{317}\right)=\left(\frac{2}{7}\right)\left(\frac{9}{11}\right)=1,\left(\frac{3}{317}\right)=\left(\frac{317}{3}\right)=\left(\frac{2}{3}\right)=-1,\left(\frac{-1}{317}\right)=-1。$$

结合(6)式可得 $\left(\frac{308}{317}\right)^y\cdot\left(\frac{3}{317}\right)^{s(y-z)}=\left(\frac{-1}{317}\right)\cdot\left(\frac{5}{317}\right)^{2x}$，于是 $(-1)^{s(y-z)}=1$，即 $2\mid s(y-z)$。从而 $2\mid y$。令 $y=2y_1,z=2z_1$，则 $\left(317^{z_1}-308^{y_1}\cdot 3^{s(y_1-z_1)}\right)\left(317^{z_1}+308^{y_1}\cdot 3^{s(y_1-z_1)}\right)=5^{2x}$。

又因为 $\gcd\left(317^{z_1}-308^{y_1}\cdot 3^{s(y_1-z_1)},317^{z_1}+308^{y_1}\cdot 3^{s(y_1-z_1)}\right)=1$，故

$$\begin{cases}317^{z_1}-308^{y_1}\cdot 3^{s(y_1-z_1)}=1 & ①\\ 317^{z_1}+308^{y_1}\cdot 3^{s(y_1-z_1)}=5^{2x} & ②\end{cases},$$

②−①得，$5^{2x}-1=2\cdot 308^{y_1}\cdot 3^{s(y_1-z_1)}$，即 $\left(5^x-1\right)\left(5^x+1\right)=2^{2y_1+1}\cdot 7^{y_1}\cdot 11^{y_1}\cdot 3^{s(y_1-z_1)}$，假设 $5^x-1=7t$，即 $5^x\equiv 1(\bmod 7)$，因为 $\left(\frac{5}{7}\right)^x=\left(\frac{1}{7}\right)=1$，$\left(\frac{5}{7}\right)=\left(\frac{7}{5}\right)=\left(\frac{2}{5}\right)=-1$，所以 $(-1)^x=1$，即 $2\mid x$。此时若 $5^x+1=3t$，$5^x\equiv -1(\bmod 3)$，因为 $\left(\frac{5}{3}\right)^x=\left(\frac{-1}{3}\right)=-1$，$\left(\frac{5}{3}\right)=\left(\frac{2}{3}\right)=1$，所以 $1^x=-1$，这不可能。又因为 $5^x-1<5^x+1$，

所以 $7\mid\left(5^x+1\right),3\mid\left(5^x+1\right)$，又因为 $4\mid\left(5^x-1\right),11\nmid\left(5^x+1\right)$，故

$$\begin{cases}5^x-1=2^{2y_1}\cdot 11^{y_1}\\5^x+1=7^{y_1}\cdot 3^{s(y_1-z_1)}\end{cases}$$

且 $2\nmid x$，于是 $8\nmid\left(5^x-1\right)$，即 $y=2y_1=2$，这与 $1\le x<z<y$ 矛盾。

情形 1.3：如果 $s=0,t>0$，则 $t(z-x)=2x$，于是方程(3)可整理为

$$317^z-308^y\cdot 5^{t(y-z)}=3^x \tag{7}$$

对(7)式模 16 得 $13^z\equiv 3^x\pmod{16}$，于是 $x\equiv z\equiv 2\pmod 4$ 或 $x\equiv z\equiv 0\pmod 4$。对(7)式模 3 得 $2^z\equiv 2^{y+t(y-z)}\pmod 3$，于是 $2\mid y+t(y-z)$。对(7)式模 317 得 $308^y\cdot 5^{t(y-z)}=-3^x\pmod{317}$。又因为

$$\left(\frac{308}{317}\right)=1,\left(\frac{5}{317}\right)=\left(\frac{2}{5}\right)=-1,\left(\frac{-1}{317}\right)=1,\left(\frac{3}{317}\right)=-1,$$

于是有 $(-1)^{t(y-z)}=(-1)^x$，所以 $t(y-z)$ 与 x 同奇偶，所以 $2\mid t(y-z)$，故 $2\mid y$。令 $x=2x_1,y=2y_1,z=2z_1$，(7)式整理为

$$\left(317^{z_1}-308^{y_1}\cdot 5^{t(y_1-z_1)}\right)\left(317^{z_1}+308^{y_1}\cdot 5^{t(y_1-z_1)}\right)=3^{2x_1}。$$

又因为 $\gcd\left(317^{z_1}-308^{y_1}\cdot 5^{t(y_1-z_1)},317^{z_1}3+08^{y_1}\cdot 5^{t(y_1-z_1)}\right)=1$，故

$$\begin{cases}317^{z_1}-308^{y_1}\cdot 5^{t(y_1-z_1)}=1\\317^{z_1}+308^{y_1}\cdot 5^{t(y_1-z_1)}=3^{2x_1}\end{cases}$$

所以 $3^{2x}+1=2\cdot 317^{z_1}$。又 $317^{z_1}>3^{4z_1}=3^{2z}>3^{2x}+1$，故不可能。

情形 2，当 $y<z<x$ 时，方程(2)可整理为

$$317^z-75^x n^{x-z}=\frac{308^y}{n^{z-y}} \tag{8}$$

不妨设 $n=2^s\cdot 7^t\cdot 11^w$，其中 s,t,w 均为非负整数且 $\max\{s,t,w\}\ge 1$。

情形 2.1：如果 $s>0,t>0,w>0$，则 $s(z-y)=2y,t(z-y)=y,w(z-y)=y$，即 $s=2t,w=t$。于是方程(8)可整理为

$$317^z-75^x\cdot 2^{2t(x-z)}\cdot 7^{t(x-z)}\cdot 11^{t(x-z)}=1 \tag{9}$$

对(9)式模 5 得 $2^z\equiv 1\pmod 5$，故 $4\mid z$。令 $z=2z_1$，$2\nmid z_1$，(9)式整理为

$$\left(317^{z_1}-1\right)\left(317^{z_1}+1\right)=3^x\cdot 5^{2x}\cdot 2^{2t(x-z)}\cdot 7^{t(x-z)}\cdot 11^{t(x-z)}$$

因为 $\gcd\left(317^{z_1}-1,317^{z_1}+1\right)=1$ 且 $\left(\frac{-1}{3}\right)=-1,\left(\frac{-1}{7}\right)=-1,\left(\frac{-1}{11}\right)=-1$，于是有

$$\begin{cases}317^{z_1}-1=2^{2t(x-z)-1}\cdot 3^x\cdot 7^{t(x-z)}\cdot 11^{t(x-z)}\\317^{z_1}+1=2\cdot 5^{2x}\end{cases}$$

即 $5^{2x}-3^x\cdot 2^{2t(x-z)-2}\cdot 7^{t(x-z)}\cdot 11^{t(x-z)}=1$。故 $\left(5^x-1\right)\left(5^x+1\right)=3^x\cdot 2^{2t(x-z)-2}\cdot 7^{t(x-z)}\cdot 11^{t(x-z)}$。

又因为 $\gcd\left(5^x-1,5^x+1\right)=2$ 且 $\left(\frac{5}{11}\right)=1,\left(\frac{5}{3}\right)=\left(\frac{5}{7}\right)=-1,\left(\frac{-1}{11}\right)=\left(\frac{-1}{3}\right)=\left(\frac{-1}{7}\right)=-1$，

当 $2\mid x$ 时，则 $5^x+1=2$，这不可能。

于是 $2\nmid x$ 且 $\begin{cases}5^x-1=2^{2t(x-z)-3}\cdot 11^{t(x-z)}\\ 5^x+1=2\cdot 3^x\cdot 7^{t(x-z)}\end{cases}$，即

$$3^x\cdot 7^{t(x-z)}-2^{2t(x-z)-4}\cdot 11^{t(x-z)}=1 \tag{10}$$

对(10)式模 7 得 $2^{2t(x-z)-4}\cdot 11^{t(x-z)}\equiv -1\pmod 7$。因为 $\left(\frac{11}{7}\right)=\left(\frac{4}{7}\right)=1,\left(\frac{-1}{7}\right)=-1$ 且 $2\mid 2t(x-z)-4$，于是 $1=-1$，这不可能。

情形 2.2：如果 $s>0,t>0,w=0$，则 $s(z-y)=2y,t(z-y)=y$，即 $s=2t$ 于是方程(8)可整理为

$$317^z-75^x\cdot 2^{2t(x-z)}\cdot 7^{t(x-z)}=11^y \tag{11}$$

对(11)模 5 得 $2^z\equiv 1\pmod 5$。于是 $4\mid z$，对(11)式模 11 得 $9^z=9^x\cdot 2^{2t(x-z)}\cdot 7^{t(x-z)}\pmod{11}$，因为 $\left(\frac{9}{11}\right)=1$，$\left(\frac{7}{11}\right)=-\left(\frac{11}{7}\right)=-\left(\frac{4}{7}\right)=-1$，$2\mid 2t(x-z)$，于是有 $(-1)^{t(x-z)}=1$，即 $2\mid t(x-z)$，这意味着 $4\mid 2t(x-z)$。对(11)式模 16 得 $13^z=11^y\pmod{16}$。又因为 $4\mid z$，故 $4\mid y$。令 $z=4z_1,y=4y_1$，(11)式整理为

$$\left(317^{z_1}-11^{2y_1}\right)\left(317^{2z_1}+11^{2y_1}\right)=75^x\cdot 2^{2t(x-z)}\cdot 7^{t(x-z)}。$$

因为 $\gcd\left(317^{2z_1}-11^{2y_1},317^{z_1}+11^{2y_1}\right)=2,\left(\frac{-1}{3}\right)=-1,\left(\frac{-1}{7}\right)=-1$，于是

$$\begin{cases}317^{2z_1}+11^{2y_1}=2\cdot 5^{2x}\\ 317^{2z_1}-11^{2y_1}=2^{2t(x-z)-1}\cdot 3^x\cdot 7^{t(x-z)}\end{cases},$$

但是 $5^{2x}>5^{2z}=5^{2\cdot 4z_1}=\left(25^2\right)^{2z_1}>(317+11)^{2z_1}>317^{2z_1}+11^{2y_1}$。这不可能。

情形 2.3：如果 $s>0,t=0,w>0$，则 $s(z-y)=2y,w(z-y)=y$，即 $s=2w$。于是方程(8)可整理为

$$317^z-75^x\cdot 2^{2w(x-z)}\cdot 11^{w(x-z)}=7^y \tag{12}$$

对(12)式模 3 得 $2^z\equiv 1\pmod 3$，于是 $2\mid z$。对(12)式模 4 得 $1\equiv 3^y\pmod 4$，于是 $2\mid y$。

令 $z=2z_1,y=2y_1$，故 $\left(317^{z_1}-7^{y_1}\right)\left(317^{z_1}+7^{y_1}\right)=75^x\cdot 2^{2w(x-z)}\cdot 11^{w(x-z)}$。

因为 $\gcd\left(317^{z_1}-7^{y_1},317^{z_1}+7^{y_1}\right)=2$ 且 $75=3\times 5^2$，所以有 $25^x\mid\left(317^{z_1}-7^{y_1}\right)$ 或 $25^x\mid\left(317^{z_1}+7^{y_1}\right)$。但是 $25^x>25^z=\left(25^2\right)^{z_1}>(317+7)^{z_1}>317^{z_1}+7^{y_1}>317^{z_1}-7^{y_1}$，这不可能，与事实矛盾。

情形 2.4：如果 $s=0,t>0,w>0$，则 $w(z-y)=y,t(z-y)=y$，即 $w=t$。于是方程(8)可整理为

$$317^z-75^x\cdot 7^{t(x-z)}\cdot 11^{t(x-z)}=2^{2y} \tag{13}$$

对(13)式模 3 得 $2^z\equiv 1\pmod 3$，于是 $2\mid z$。令 $z=2z_1$，(13)式整理为 $\left(317^{z_1}-2^y\right)\left(317^{z_1}+2^y\right)=75^x\cdot 7^{t(x-z)}\cdot 11^{t(x-z)}$，因为 $\gcd\left(317^{z_1}-2^y,317^{z_1}+2^y\right)=1$，故 $25^x\mid\left(317^{z_1}-2^y\right)$ 或 $25^x\mid\left(317^{z_1}+2^y\right)$。

这与 $25^x>25^z=\left(25^2\right)^{z_1}>(317+4)^{z_1}>317^{z_1}+4^{z_1}>317^{z_1}+2^y>317^{z_1}-2^y$ 矛盾。

情形 2.5：$s>0,t=0,w=0$，则 $s(z-y)=2y$，方程(8)可整理为

$$317^z-75^x\cdot 2^{s(x-z)}=7^y\cdot 11^y \tag{14}$$

对(14)式模 5 得 $2^z\equiv 2^y\pmod 5$，即 $4\mid(z-y)$。又因为 $s(z-y)=2y$，所以 $2\mid y$，从而 $2\mid z$。令 $z=2z_1,y=2y_1$，(13)式整理为

$$\left(317^{z_1}-77^{y_1}\right)\left(317^{z_1}+77^{y_1}\right)=75^x\cdot 2^{s(x-z)}。$$

因为 $\gcd\left(317^{z_1}-77^{y_1},317^{z_1}+77^{y_1}\right)=2$，所以有 $25^x\mid\left(317^{z_1}-77^{y_1}\right)$ 或 $25^x\mid\left(317^{z_1}+77^{y_1}\right)$。但是 $25^x>25^{2z_1}>(317+77)^{z_1}>317^{z_1}+77^{y_1}>317^{z_1}-77^{y_1}$，这不可能。

情形 2.6：如果 $s=0,t>0,w=0$，则 $t(z-y)=y$，(8)式可整理为

$$317^z-75^x\cdot 7^{t(z-y)}=44^y \tag{15}$$

对(15)式模 5 得 $2^z\equiv 4^y\pmod 5$，于是 $2\mid z$。对(15)式模 3 得 $2^z\equiv 2^y\pmod 3$，于是 $2\mid y$。令 $z=2z_1,y=2y_1$，(15)式整理为 $\left(317^{z_1}-44^{y_1}\right)\left(317^{z_1}+44^{y_1}\right)=75^x\cdot 7^{t(z-y)}$，

又因为 $\gcd\left(317^{z_1}-44^{y_1},317^{z_1}+44^{y_1}\right)=1$，故 $25^x\mid\left(317^{z_1}-44^{y_1}\right)$ 或 $25^x\mid\left(317^{z_1}+44^{y_1}\right)$。

这与 $25^x>25^{2z_1}>(317+44)^{z_1}>317^{z_1}+44^{y_1}>317^{z_1}-44^{y_1}$ 矛盾。

情形 2.7：如果 $s=0,t=0,w>0$，则 $w(z-y)=y$，(8)式可整理为

$$317^z-75^x\cdot 11^{w(z-y)}=28^y \tag{16}$$

对(16)式模 3 得 $2^z\equiv 1\pmod 3$，于是 $2\mid z$。对(15)式模 5 得 $2^z\equiv 3^y\pmod 5$，于是 $2\mid y$。

令 $z=2z_1,y=2y_1$，(16)式整理为 $\left(317^{z_1}-28^{y_1}\right)\left(317^{z_1}+28^{y_1}\right)=75^x\cdot 11^{e(z-y)}$，又因为 $\gcd\left(317^{z_1}-26^{y_1},317^{z_1}+28^{y_1}\right)=1$，故 $25^x\mid\left(317^{z_1}-28^{y_1}\right)$ 或 $25^x\mid\left(317^{z_1}+28^{y_1}\right)$。这与 $25^x>25^{2z_1}>(317+28)^{z_1}>317^{z_1}+28^{y_1}>317^{z_1}-28^{y_1}$ 矛盾。

4. 结语

邢静静证明了当 $k\equiv 3\pmod 8$，$3\nmid k$ 时，丢番图方程 $\left(3(2k+3)\right)^x+\left(2k(k+3)\right)^y=\left(2k(k+3)+9\right)^z$ 只有正整数解 $(x,y,z)=(2,2,2)$ [9]。由此可知令 $k=11$ 时，方程 $75^x+308^y=317^z$ 只有正整数解 $(x,y,z)=(2,2,2)$。本文证明了更一般的情况，即当 n 为任意正整数时，丢番图方程 $(75n)^x+(308n)^y=(317n)^z$ 只有正整数解 $(x,y,z)=(2,2,2)$。但是对于 k 为其他值时的情况还有待进一步研究。另外，要彻底解决 Jesmanowicz 猜想，还需要寻求一些新的方法，这就需要研究者有较深的数论基础，为数学进步贡献自己的力量。

参考文献

[1] Jesmanowicz, L. (1955-1956) Several Remarks on Pythagorean Numbers. *Wiadom Mat.*, **1**, 196-202.

[2] Terai, N. (2014) On Jesmanowicz' Conjecture Concerning Primitive Pythagorean Triples. *Journal of Number Theory*, **141**, 316-323. https://doi.org/10.1016/j.jnt.2014.02.009

[3] 李双志. 关于商高数的 Jesmanowicz 猜想[D]: [硕士学位论文]. 重庆: 西南大学, 2011.

[4] Miyazaki, T. (2015) A Remark on Jesmanowicz' Conjecture for Non-Coprimality Case. *Acta Mathematica Sinica, English Series*, **31**, 1225-1260. https://doi.org/10.1007/s10114-015-4491-2

[5] 陈凤娟. 关于丢番图方程 $(na)^x+(bn)^y=(cn)^z$ [J]. 数学进展, 2018, 47(3): 1-5.

[6] Sun, C.F. and Cheng, Z. (2015) On Jesmanowicz' Conjecture Concerning Pythagorean Triples. *Journal of Mathematical Research with Applications*, **35**, 143-148.

[7] 闵嗣鹤, 严士健. 初等数论[M]. 北京: 高等教育出版社, 2003.

[8] 柯召, 孙琦. 数论讲义(上) [M]. 北京: 高等教育出版社, 1987.

[9] 邢静静. 关于商高数的 Jesmanowicz 猜想[D]: [硕士学位论文]. 重庆: 西南大学, 2015.

[10] Deng, M.J. (2014) A Note on the Dionphantine Equation $(na)^x+(bn)^y=(cn)^z$. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, **89**, 316-321. https://doi.org/10.1017/S000497271300066X