Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(12), 3514-3524
Published Online December 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.1312366

极大算子的交换子在 Morrey 空间的有界性以及对 Lipschitz 空间的刻画

樊 迪

牡丹江师范学院，数学科学学院，黑龙江 牡丹江

收稿日期：2023年11月12日；录用日期：2023年12月13日；发布日期：2023年12月22日

摘 要

设 M 为 **Hardy-Littlewood** 极大算子，$M^\sharp$ 为 **sharp** 极大算子，b 是局部可积函数。本文考虑了当 b 属于 **Lipschitz** 空间时，M 和 $M^\sharp$ 与 b 生成的极大交换子和非线性交换子在 **Morrey** 空间中的有界性，并给出了 **Lipschitz** 空间的一些新等价刻画。

关键词

Hardy-Littlewood 极大算子，**Sharp** 极大算子，交换子，**Lipschitz** 空间，**Morrey** 空间

Boundedness of the Commutators of the Maximal Operator on Morrey Spaces and Their Characterization of Lipschitz Spaces

Di Fan

School of Mathematical Science, Mudanjiang Normal University, Mudanjiang Heilongjiang

Received: Nov. 12^{th}, 2023; accepted: Dec. 13^{th}, 2023; published:Dec. 22^{nd}, 2023

文章引用: 樊迪. 极大算子的交换子在 Morrey 空间的有界性以及对 Lipschitz 空间的刻画[J]. 理论数学, 2023, 13(12): 3514-3524. DOI: 10.12677/pm.2023.1312366

Abstract

Let M be the Hardy-Littlewood maximal operator, $M^\sharp$ be the sharp maximal operator and b be a locally integrable function. In this paper, we consider the boundedness of maximal and nonlinear commutators generated by M and $M^\sharp$ with b on Morrey spaces when b belongs to the Lipschitz spaces, by which some new characterizations of the Lipschitz spaces are given.

Keywords

Hardy-Littlewood Maximal Operator, Sharp Maximal Operator, Commutator, Lipschitz Space, Morrey Space

1. 引言与结果

设 T 为经典奇异积分算子, b 为局部可积函数, 由 T 与 b 生成的交换子 $[b, T]$ 定义为

$$[b,T](f)(x) = T\big((b(x)-b)f\big)(x) = b(x)T(f)(x) - T(bf)(x). \tag{1.1}$$

1976年, Coifman, Rochberg 和 Weiss 在文 [1] 中证明了当 $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ 时, 交换子 $[b,T]$ 是 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 有界的 $(1<p<\infty)$. 1978 年, Janson 在文 [2] 中证明了 $b \in \dot{\Lambda}_\beta(\mathbb{R}^n)(0<\beta<1)$ 当且仅当 $[b,T]$ 是从 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 到 $L^q(\mathbb{R}^n)$ 有界的, 其中 $1<p<n/\beta$, $1/p-1/q=\beta/n$(也可见文 [3]).

用 Q 表示各边分别平行于坐标轴的方体, $|Q|$ 表示 Q 的 Lebesgue 测度, 用 χ_Q 表示 Q 的特征函数. 对于局部可积函数 f, 记 $f_Q = (f)_Q = \frac{1}{|Q|}\int_Q f(x)dx$.

设 f 为局部可积函数, Hardy-Littlewood 极大算子 M 定义为

$$M(f)(x) = \sup_{Q\ni x}\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(y)|dy,$$

sharp 极大算子 $M^\sharp$ 定义为

$$M^\sharp(f)(x) = \sup_{Q\ni x} \frac{1}{|Q|}\int_Q \big|f(y) - f_Q\big| dy,$$

其中上确界取遍 $\mathbb{R}^n$ 中所有包含 x 的方体 Q.

类似于 1.1 式, 我们可以定义 Hardy-Littlewood 极大算子的两类交换子.

M 和局部可积函数 b 生成的极大交换子 M_b 定义为

$$M_b(f)(x) = M\big((b(x) - b)f\big)(x) = \sup_{Q\ni x} \frac{1}{|Q|}\int_Q \big|b(x) - b(y)\big|\big|f(y)\big| dy,$$

其中上确界取遍 $\mathbb{R}^n$ 中所有包含 x 的方体 Q.

M 与局部可积函数 b 生成的非线性交换子

$$[b, M](f)(x) = b(x)M(f)(x) - M(bf)(x).$$

类似地可以定义 $M^\sharp$ 与 b 生成的非线性交换子

$$[b, M^\sharp](f)(x) = b(x)M^\sharp(f)(x) - M^\sharp(bf)(x).$$

显然, M_b 是非负的和次线性的, 而 $[b, M]$ 和 $[b, M^\sharp]$ 既不是非负的也不是次线性的. 因此, 极大交换子 M_b 和非线性交换子 $[b, M]$ 具有本质不同.

近二十几年来, 众多学者对极大算子的交换子的有界性进行了大量的研究, 例如 [4–12]. 2017 年, Zhang 在文 [11] 中给出了当 $b \in \dot{\Lambda}_\beta(\mathbb{R}^n)$ 时, 交换子 M_b 和 $[b, M]$ 在 Lebesgue 空间和 Morrey 空间中的有界性, 并给出了 Lipschitz 空间的一些新的刻画. 2019 年, Zhang 在文 [13] 中利用交换子 M_b, $[b, M]$ 和 $[b, M^\sharp]$ 在变指标空间中的有界性给出了 Lipschitz 空间一些新的等价刻画.

受上述工作的启发, 本文将研究当 b 属于 Lipschitz 函数类时, 交换子 M_b, $[b, M]$ 和 $[b, M^\sharp]$ 在 Morrey 空间中的有界性, 并给出 Lipschitz 空间的若干新的等价刻画.

为叙述本文的结果, 首先回忆几个定义和符号.

定义1.1. 令 $0 < \beta < 1$ 且 b 为局部可积函数. 若存在常数 C, 使得对任意的 $x, y \in \mathbb{R}^n$, 有

$$|b(x) - b(y)| \le C|x - y|^\beta,$$

则称 b 属于 Lipschitz 空间 $\dot{\Lambda}_\beta$. 最小常数 C 称为 b 的 $\dot{\Lambda}_\beta$ 范数并记为 $\|b\|_{\dot{\Lambda}_\beta}$.

Morrey 空间 $L^{p,\lambda}$ 首先是由 Morrey 在文 [14] 研究二阶椭圆型偏微分方程解的局部性质时所引进的. 下面我们给出 Morrey 空间的定义.

定义1.2. ([15]) 令 $1 \le p < \infty$ 且 $0 \le \lambda \le n$. Morrey 空间定义为

$$L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n) = \{f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n) \ : \|f\|_{L^{p,\lambda}} < \infty\},$$

其中

$$\|f\|_{L^{p,\lambda}} := \sup_{Q} \left(\frac{1}{|Q|^{\lambda/n}} \int_{Q} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

当 $1 \leq p < \infty$ 时, 有 $L^{p,0}(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n)$ 和 $L^{p,n}(\mathbb{R}^n) = L^{\infty}(\mathbb{R}^n)$.

设 Q_0 是一个固定方体, 限制在 Q_0 上的极大算子定义为

$$M_{Q_0}(f)(x) = \sup_{\substack{Q \ni x \\ Q \subset Q_0}} \frac{1}{|Q|} \int_{Q} |f(y)| dy,$$

其中上确界取遍所有满足 $Q \subset Q_0$ 且 $Q \ni x$ 的方体 Q.

现在可以陈述我们的结果.

定理1.1. 设 b 是局部可积函数且 $0 < \beta < 1$. 又设 $1 < p < n/\beta$, $0 < \lambda < n - \beta p$ 且 $1/q = 1/p - \beta/(n - \lambda)$. 则下面的命题等价：

(1) $b \in \dot{\Lambda}_{\beta}(\mathbb{R}^n)$;

(2) M_b 从 $L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ 到 $L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ 有界;

(3) 存在常数 $C > 0$, 使得

$$\sup_{Q} \frac{1}{|Q|^{\beta/n}} \frac{\|(b - b_Q)\chi_Q\|_{L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)}}{\|\chi_Q\|_{L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)}} \leq C.$$

注1.1. Zhang 在文 [11] 中证明了 (1) 和 (2) 等价. 它们与 (3) 的等价性是新的且 (3) 给出了 Lipschitz 空间新的等价刻画.

定理1.2. 设 b 是局部可积函数且 $0 < \beta < 1$. 又设 $1 < p < n/\beta$, $0 < \lambda < n - \beta p$ 且 $1/q = 1/p - \beta/(n - \lambda)$. 则下面的命题等价：

(1) $b \in \dot{\Lambda}_{\beta}(\mathbb{R}^n)$ 且 $b \geq 0$;

(2) $[b, M]$ 从 $L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ 到 $L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ 有界;

(3) 存在常数 $C > 0$, 使得

$$\sup_{Q} \frac{1}{|Q|^{\beta/n}} \frac{\|\big(b - M_Q(b)\big)\chi_Q\|_{L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)}}{\|\chi_Q\|_{L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)}} \leq C.$$

注1.2. Zhang 在文 [11] 中证明了 (1) 和 (2) 等价. 它们与 (3) 的等价性是新的且 (3) 给出了非负 Lipschitz 函数的新刻画.

定理1.3. 设 b 是局部可积函数且 $0 < \beta < 1$. 又设 $1 < p < n/\beta$, $0 < \lambda < n - \beta p$ 且 $1/q = 1/p - \beta/(n - \lambda)$. 则下面的命题等价：

(1) $b \in \dot{\Lambda}_{\beta}(\mathbb{R}^n)$ 且 $b \geq 0$;

(2) $[b, M^{\sharp}]$ 从 $L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ 到 $L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ 有界;

(3) 存在常数 $C > 0$, 使得

$$\sup_{Q} \frac{1}{|Q|^{\beta/n}} \frac{\|(b - 2M^{\sharp}(b\chi_Q))\chi_Q\|_{L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)}}{\|\chi_Q\|_{L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)}} \le C.$$

注1.3. $[b, M^{\sharp}]$ 在 Lebesgue 空间和变指数 Lebesgue 空间中的有界性的等价刻画见文 [16] 和 [13].

2. 预备知识和引理

本节我们给出一些引理, 这些引理将用于证明我们的结果.

引理2.1. ([3]). 设 $0 < \beta < 1$ 且 $1 \le q < \infty$. 定义

$$\dot{\Lambda}_{\beta,q}(\mathbb{R}^n) := \left\{ f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) \ : \|f\|_{\dot{\Lambda}_{\beta,q}} = \sup_{Q} \frac{1}{|Q|^{\beta/n}} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x) - f_Q|^q dx \right)^{1/q} < \infty \right\},$$

则对于所有的 $0 < \beta < 1$ 且 $1 \le q < \infty$, 有 $\dot{\Lambda}_{\beta}(\mathbb{R}^n) = \dot{\Lambda}_{\beta,q}(\mathbb{R}^n)$.

引理2.2. ([17]). 令 $1 \le p < \infty$ 且 $0 < \lambda < n$, 则存在仅依赖于 n 的常数 $C > 0$, 使得

$$\|\chi_Q\|_{L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)} \le C|Q|^{\frac{n-\lambda}{np}}.$$

引理2.3. 设 $0 < \beta < 1$. 又设 $1 < p < n/\beta$, $0 < \lambda < n - \beta p$ 且 $1/q = 1/p - \beta/(n - \lambda)$, 则对任意的方体 Q, 有

$$\|\chi_Q\|_{L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)} \le |Q|^{\beta/n} \|\chi_Q\|_{L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)}.$$

证明 对于任意固定的方体 Q, 注意到 $1/q = 1/p - \beta/(n - \lambda)$, 我们有

$$\begin{aligned}
\|\chi_Q\|_{L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)} &= \sup_{Q'} \left(\frac{1}{|Q'|^{\lambda/n}} \int_{Q'} |\chi_Q(x)|^p dx \right)^{1/p} \\
&= \sup_{Q'} \left(\frac{1}{|Q'|^{\lambda/n}} \int_{Q' \cap Q} |\chi_Q(x)|^p dx \right)^{1/p} \\
&\le \sup_{Q'} \left(\frac{1}{|Q'|^{\lambda/n}} \int_{Q' \cap Q} |\chi_Q(x)|^q dx \right)^{1/q} \left(\frac{1}{|Q'|^{\lambda/n}} \int_{Q' \cap Q} 1 dx \right)^{(1-p/q)/p} \\
&\le \sup_{Q'} \left(\frac{1}{|Q'|^{\lambda/n}} \int_{Q'} |\chi_Q(x)|^q dx \right)^{1/q} |Q' \cap Q|^{(1-\lambda/n)(1/p-1/q)} \\
&\le \sup_{Q'} \left(\frac{1}{|Q'|^{\lambda/n}} \int_{Q'} |\chi_Q(x)|^q dx \right)^{1/q} |Q|^{\beta/n} \\
&= |Q|^{\beta/n} \|\chi_Q\|_{L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}$$

引理得证.

Zhang, Wu 和 Sun 在文 [16] 的推论 1.1 和推论 1.2 中给出了非负 Lipschitz 函数类的如下等价刻画.

引理2.4. ([16]). 设 b 是局部可积函数且 $0 < \beta < 1$. 则下面的命题等价:

(1) $b \in \dot{\Lambda}_\beta(\mathbb{R}^n)$ 且 $b \geq 0$;

(2) 存在常数 $C > 0$, 使得

$$\sup_Q \frac{1}{|Q|^{1+\beta/n}} \int_Q |b(x) - M_Q(b)(x)| dx \leq C;$$

(3) 存在常数 $C > 0$, 使得

$$\sup_Q \frac{1}{|Q|^{1+\beta/n}} \int_Q |b(x) - 2M^\sharp(b\chi_Q)(x)| dx \leq C.$$

3. 定理1.1-1.3 的证明

定理1.1 的证明. 在文 [11] 的定理 1.2 中证明了 (1) 和 (2) 等价, 我们只需证明 (2) $\Rightarrow$ (3) 和 (3) $\Rightarrow$ (1).

(2) $\Rightarrow$ (3): 对任意固定的方体 Q 和对任意的 $x \in Q$, 有

$$\begin{aligned}
|b(x) - b_Q| &\leq \frac{1}{|Q|} \int_Q |b(x) - b(y)| dy \\
&= \frac{1}{|Q|} \int_Q |b(x) - b(y)| \chi_Q(y) dy \\
&\leq M_b(\chi_Q)(x).
\end{aligned}$$

于是, 对任意的 $x \in Q$, 有

$$|(b(x) - b_Q)\chi_Q(x)| \leq M_b(\chi_Q)(x).$$

由 (2) 知 M_b 是从 $L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ 到 $L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ 有界. 注意到 $1/q = 1/p - \beta/(n-\lambda)$ 并使用引理 2.3 得

$$\begin{aligned}
\|(b(x) - b_Q)\chi_Q\|_{L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)} &\leq \|M_b(\chi_Q)\|_{L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq C\|\chi_Q\|_{L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq C|Q|^{\beta/n}\|\chi_Q\|_{L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}$$

所以有

$$\frac{1}{|Q|^{\beta/n}} \frac{\|(b - b_Q)\chi_Q\|_{L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)}}{\|\chi_Q\|_{L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)}} \leq C.$$

注意到上式中的 C 与 Q 无关, 因此 (2) $\Rightarrow$ (3) 得证.

(3) $\Rightarrow$ (1): 要证 $b \in \dot{\Lambda}_\beta(\mathbb{R}^n)$, 根据引理 2.1, 只需证存在常数 $C > 0$, 使得对任意方体 $Q \subset \mathbb{R}^n$, 有

$$\frac{1}{|Q|^{1+\beta/n}} \int_Q |b(x) - b_Q| dx \leq C.$$

对任意的方体 Q, 利用 Hölder 不等式和引理 2.2, 有

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{|Q|^{1+\beta/n}}\int_Q |b(x)-b_Q|dx\\
&=\frac{1}{|Q|^{1+\beta/n}}\int_Q |\big(b(x)-b_Q\big)\chi_Q(x)|dx\\
&\le \frac{1}{|Q|^{1+\beta/n}}\Big(\int_Q |\big(b(x)-b_Q\big)\chi_Q(x)|^q dx\Big)^{1/q}|Q|^{1-1/q}\\
&=\frac{|Q|^{\lambda/(nq)}}{|Q|^{\beta/n+1/q}}\Big(\frac{1}{|Q|^{\lambda/n}}\int_Q |\big(b(x)-b_Q\big)\chi_Q(x)|^q dx\Big)^{1/q}\\
&\le \frac{|Q|^{\lambda/(nq)}}{|Q|^{\beta/n+1/q}}\|(b-b_Q)\chi_Q\|_{L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)}\\
&=\frac{1}{|Q|^{\beta/n}}\frac{\|(b-b_Q)\chi_Q\|_{L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)}}{|Q|^{(n-\lambda)/nq}}\\
&\le \frac{C}{|Q|^{\beta/n}}\frac{\|(b-b_Q)\chi_Q\|_{L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)}}{\|\chi_Q\|_{L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)}}\\
&\le C.
\end{aligned}$$

注意到上式中的 C 与 Q 无关, 因此由引理 2.1 知 $b\in \dot{\Lambda}_\beta(\mathbb{R}^n)$.

至此, 定理 1.1 获证.

定理1.2 的证明. 在文 [11] 的定理 1.6 中证明了 (1) 和 (2) 等价, 我们只需证明 (2) $\Rightarrow$ (3) 和 (3) $\Rightarrow$ (1).

(2) $\Rightarrow$ (3): 对任意固定的方体 $Q\subset\mathbb{R}^n$, 对于任意的 $x\in Q$, 有 (证明见文 [5] 命题 4.1, 也可见文 [18] 的 (2.4) 式)

$$M(\chi_Q)(x)=\chi_Q(x)$$

和

$$M(b\chi_Q)(x)=M_Q(b)(x).$$

由 (2) 知 $[b,M]$ 是从 $L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ 到 $L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ 有界. 注意到 $1/q=1/p-\beta/(n-\lambda)$ 并使用引理 2.3 得

$$\begin{aligned}
\|\big(b-M_Q(b)\big)\chi_Q\|_{L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)} &= \|\big(bM(\chi_Q)-M(b\chi_Q)\big)\chi_Q\|_{L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)}\\
&=\|bM(\chi_Q)-M(b\chi_Q)\|_{L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)}\\
&=\|[b,M](\chi_Q)\|_{L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)}\\
&\le C\|\chi_Q\|_{L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)}\\
&\le C|Q|^{\beta/n}\|\chi_Q\|_{L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}$$

所以有

$$\frac{1}{|Q|^{\beta/n}}\frac{\|\big(b-M_Q(b)\big)\chi_Q\|_{L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)}}{\|\chi_Q\|_{L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)}}\le C.$$

注意到上式中的 C 与 Q 无关, 因此 (2) $\Rightarrow$ (3) 得证.

(3) $\Rightarrow$ (1): 要证 $b \in \dot{\Lambda}_\beta(\mathbb{R}^n)$ 且 $b \geq 0$, 由引理 2.4 知, 只需证存在常数 $C > 0$, 使得对任意方体 $Q \subset \mathbb{R}^n$, 有

$$\frac{1}{|Q|^{1+\beta/n}} \int_Q |b(x) - M_Q(b)(x)| dx \leq C.$$

对任意固定的方体 Q, 利用 Hölder 不等式和引理 2.2 可得

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{|Q|^{1+\beta/n}} \int_Q |b(x) - M_Q(b)(x)| dx \\
&= \frac{1}{|Q|^{1+\beta/n}} \int_Q \big|\big(b(x) - M_Q(b)(x)\big)\chi_Q(x)\big| dx \\
&\leq \frac{1}{|Q|^{1+\beta/n}} \Big(\int_Q \big|\big(b(x) - M_Q(b)(x)\big)\chi_Q(x)\big|^q dx \Big)^{1/q} |Q|^{1-1/q} \\
&= \frac{|Q|^{\lambda/(nq)}}{|Q|^{\beta/n+1/q}} \Big(\frac{1}{|Q|^{\lambda/n}} \int_Q \big|\big(b(x) - M_Q(b)(x)\big)\chi_Q(x)\big|^q dx \Big)^{1/q} \\
&\leq \frac{|Q|^{\lambda/(nq)}}{|Q|^{\beta/n+1/q}} \|\big(b - M_Q(b)\big)\chi_Q\|_{L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)} \\
&= \frac{1}{|Q|^{\beta/n}} \frac{\|\big(b - M_Q(b)\big)\chi_Q\|_{L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)}}{|Q|^{(n-\lambda)/nq}} \\
&\leq \frac{C}{|Q|^{\beta/n}} \frac{\|\big(b - M_Q(b)\big)\chi_Q\|_{L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)}}{\|\chi_Q\|_{L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)}} \\
&\leq C.
\end{aligned}$$

注意到上式中的 C 与 Q 无关, 因此 (3) $\Rightarrow$ (1) 得证.

至此定理 1.2 获证.

定理1.3 的证明. (1) $\Rightarrow$ (2): 假设 $b \in \dot{\Lambda}_\beta(\mathbb{R}^n)$ 且 $b \geq 0$. 对于任何满足 $M^\sharp(f)(x) < \infty$ 的 x, 有

$$\begin{aligned}
\big|[b, M^\sharp](f)(x)\big| &= \Big| \sup_{Q \ni x} \frac{b(x)}{|Q|} \int_Q \big|f(y) - f_Q\big| \mathrm{d}y - \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q \big|b(y)f(y) - (bf)_Q\big| \mathrm{d}y \Big| \\
&\leq \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \Big| \int_Q \big|b(x)f(y) - b(x)f_Q\big| \mathrm{d}y - \int_Q \big|b(y)f(y) - (bf)_Q\big| \mathrm{d}y \Big| \\
&\leq \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q \Big| \big(b(x) - b(y)\big)f(y) - b(x)f_Q + (bf)_Q \Big| \mathrm{d}y \\
&\leq \sup_{Q \ni x} \Big\{ \frac{1}{|Q|} \int_Q \Big| \big|b(x) - b(y)\big|\big|f(y)\big| \mathrm{d}y + \big|b(x)f_Q - (bf)_Q\big| \Big\} \\
&\leq M_b(f)(x) + \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q \big|b(x) - b(z)\big|\big|f(z)\big| \mathrm{d}z \\
&\leq 2M_b(f)(x).
\end{aligned} \tag{3.1}$$

由文 [19] 知 M 是 $L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ 有界的, 对于 $f \in L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$, 有 $M(f)(x) < \infty$, a.e. $x \in \mathbb{R}^n$, 于是由 $M^\sharp(f)(x) \leq 2M(f)(x)$ 知, $M^\sharp(f)(x) < \infty$, a.e. $x \in \mathbb{R}^n$. 再由 b 是局部可积函数知 b 在 $\mathbb{R}^n$ 上几乎处处有限. 因此, (3.1) 式对 a.e. $x \in \mathbb{R}^n$ 成立.

因为 $b \in \dot{\Lambda}_\beta(\mathbb{R}^n)$, 所以由定理 1.1, 知 $[b, M^\sharp]$ 是从 $L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ 到 $L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ 有界的.

(2) ⇒ (3): 对于任意固定的方体 Q, 有 (细节见文 [5] 第 3333 页或文 [10] 第 1383 页)

$$M^\sharp(\chi_Q)(x) = \frac{1}{2}, \text{ 对任意的 } x \in Q.$$

假设 $[b, M^\sharp]$ 是从 $L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ 到 $L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ 有界的, 利用引理 2.3, 有

$$\begin{aligned}
\big\|\big(b - 2M^\sharp(b\chi_Q)\big)\chi_Q\big\|_{L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)} &= \big\|2\big(\frac{1}{2}b - M^\sharp(b\chi_Q)\big)\chi_Q\big\|_{L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)} \\
&= \big\|2\big(bM^\sharp(\chi_Q) - M^\sharp(b\chi_Q)\big)\chi_Q\big\|_{L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)} \\
&\le 2\|[b, M^\sharp](\chi_Q)\|_{L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)} \\
&\le C\|\chi_Q\|_{L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)} \\
&\le C|Q|^{\beta/n}\|\chi_Q\|_{L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}$$

注意到上式中的 C 与 Q 无关, 所以有

$$\sup_Q \frac{1}{|Q|^{\beta/n}} \frac{\|\big(b - 2M^\sharp(b\chi_Q)\big)\chi_Q\|_{L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)}}{\|\chi_Q\|_{L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)}} \le C.$$

(3) ⇒ (1): 要证 $b \in \dot{\Lambda}_\beta(\mathbb{R}^n)$ 且 $b \ge 0$, 由引理 2.4 知, 只需证存在常数 $C > 0$, 使得

$$\frac{1}{|Q|^{1+\beta/n}} \int_Q |b(x) - 2M^\sharp(b\chi_Q)(x)|dx \le C.$$

假设 (3) 成立, 对任意任意固定的方体 Q, 利用 Hölder 不等式和引理 2.2 可得

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{|Q|^{1+\beta/n}} \int_Q |b(x) - 2M^\sharp(b\chi_Q)(x)|dx \\
&= \frac{1}{|Q|^{1+\beta/n}} \int_Q \big|\big(b(x) - 2M^\sharp(b\chi_Q)(x)\big)\chi_Q(x)\big|dx \\
&\le \frac{1}{|Q|^{1+\beta/n}} \Big(\int_Q \big|\big(b(x) - 2M^\sharp(b\chi_Q)(x)\big)\chi_Q(x)\big|^q dx\Big)^{1/q} |Q|^{1-1/q} \\
&= \frac{|Q|^{\lambda/(nq)}}{|Q|^{\beta/n+1/q}} \Big(\frac{1}{|Q|^{\lambda/n}} \int_Q \big|\big(b(x) - 2M^\sharp(b\chi_Q)(x)\big)\chi_Q(x)\big|^q dx\Big)^{1/q} \\
&\le \frac{|Q|^{\lambda/(nq)}}{|Q|^{\beta/n+1/q}} \|\big(b - 2M^\sharp(b\chi_Q)\big)\chi_Q\|_{L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)} \\
&= \frac{1}{|Q|^{\beta/n}} \frac{\|\big(b - 2M^\sharp(b\chi_Q)\big)\chi_Q\|_{L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)}}{|Q|^{(n-\lambda)/nq}} \\
&\le \frac{1}{|Q|^{\beta/n}} \frac{\|\big(b - 2M^\sharp(b\chi_Q)\big)\chi_Q\|_{L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)}}{\|\chi_Q\|_{L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)}} \\
&\le C.
\end{aligned}$$

注意到上式中的 C 与 Q 无关, 因此 (3) ⇒ (1) 得证.

至此定理 1.3 获证.

基金项目

牡丹江师范学院科研团队建设项目(编号: D211220637)和黑龙江省省属本科高校中央支持地方高校改革发展项目(优秀青年人才项目)(编号: 2020YQ07) 资助。

参考文献

[1] Coifman, R.R., Rochberg, R. and Weiss, G. (1976) Factorization Theorems for Hardy Spaces in Several Variables. *Annals of Mathematics*, **103**, 611-635. https://doi.org/10.2307/1970954

[2] Janson, S. (1978) Mean Oscillation and Commutators of Singular Integral Operators. *Arkiv for Matematik*, **16**, 263-270. https://doi.org/10.1007/BF02386000

[3] Paluszyński, M. (1995) Characterization of the Besov Spaces via the Commutator Operator of Coifman, Rochberg and Weiss. *Indiana University Mathematics Journal*, **44**, 1-18. https://doi.org/10.1512/iumj.1995.44.1976

[4] Agcayazi, M., Gogatishvili, A., Koca, K. and Mustafayev, R. (2015) A Note on Maximal Commutators and Commutators of Maximal Functions. *Journal of the Mathematical Society of Japan*, **67**, 581-593. https://doi.org/10.2969/jmsj/06720581

[5] Bastero, J., Milman, M. and Ruiz, F. (2000) Commutators for the Maximal and Sharp Functions. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **128**, 3329-3334. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-00-05763-4

[6] Fan, Y. and Jia, H.Y. (2012) Boundedness of Commutators of Maximal Function on Morrey Space. *Acta Mathematica Sinica, Chinese Series*, **55**, 701-706.

[7] Guliyev, V.S. and Deringoz, F. (2018) Some Characterizations of Lipschitz Spaces via Commutators on Generalized Orlicz-Morrey Spaces. *Mediterranean Journal of Mathematics*, **15**, Article No. 180. https://doi.org/10.1007/s00009-018-1226-5

[8] Milman, M. and Schonbek, T. (1990) Second Order Estimates in Interpolation Theory and Applications. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **110**, 961-969. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1990-1075187-4

[9] Xie, C. (2011) Some Estimates of Commutators. *Real Analysis Exchange*, **36**, 405-416. https://doi.org/10.14321/realanalexch.36.2.0405

[10] Zhang, P. and Wu, J.L. (2014) Commutators for the Maximal Functions on Lebesgue Spaces with Variable Exponent. *Mathematical Inequalities Applications*, **17**, 1375-1386. https://doi.org/10.7153/mia-17-101

[11] Zhang, P. (2017) Characterization of Lipschitz Spaces via Commutators of the Hardy-Littlewood Maximal Function. *Comptes Rendus Mathematique*, **355**, 336-344. https://doi.org/10.1016/j.crma.2017.01.022

[12] Zhang, P., Si, Z. and Wu, J. (2019) Some Notes on Commutators of the Fractional Maximal Function on Variable Lebesgue Spaces. *Journal of Inequalities and Applications*, **2019**, Article No. 9. https://doi.org/10.1186/s13660-019-1960-7

[13] Zhang, P. (2019) Characterization of Boundedness of Some Commutators of Maximal Functions in Terms of Lipschitz Spaces. *Analysis and Mathematical Physics*, **9**, 1411-1427. https://doi.org/10.1007/s13324-018-0245-5

[14] Morrey, C.B. (1938) On the Solutions of Quasi-Linear Elliptic Partial Differential Equations. *Transactions of the American Mathematical Society*, **43**, 126-166. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1938-1501936-8

[15] Peetre, J. (1969) On the Theory of $L^{p,\lambda}$ Spaces. *Journal of Functional Analysis*, **4**, 71-87. https://doi.org/10.1016/0022-1236(69)90022-6

[16] Zhang P, Wu J L and Sun J. (2018) Commutators of Some Maximal Functions with Lipschitz Function on Orlicz Spaces. *Mediterranean Journal of Mathematics*, **15**, Article No. 216. https://doi.org/10.1007/s00009-018-1263-0

[17] Komori Y and Mizuhara T. (2003) Notes on Commutators and Morrey Spaces. *Hokkaido Mathematical Journal*, **32**, 345-353. https://doi.org/10.14492/hokmj/1350657528

[18] Zhang P and Wu J L. (2009) Commutators of the Fractional Maximal Functions. *Acta Mathematica Sinica, Chinese Series*, **52**, 1235-1238.

[19] Chiarenza F. (1987) Morrey Spaces and Hardy-Littlewood Maximal Function. *Rendiconti di Matematica e delle sue Applicazioni*, **7**, 273-279.