Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(12), 3676-3689
Published Online December 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.1312381

一类斐波那契相似立方体及其计数性质

周玉玉[1]，陈芳娣[1*]，赵婀婀[2]

[1]西北师范大学，数学与统计学院，甘肃 兰州
[2]甘肃省陕西师范大学平凉实验中学，甘肃 平凉

收稿日期：2023年11月17日；录用日期：2023年12月18日；发布日期：2023年12月29日

摘 要

L-si-Fibonaccene是一个基于Fibonaccene简单变形得到的六角系统，在其内对偶图上建立了一种特殊偏序，命名为L-栅栏。根据偏序L-栅栏的所有滤子按照反包含关系形成的滤子格，得到了一类新的匹配型分配格，忽略掉其Hasse图中的方向后就得到一个结构和性质都与斐波那契立方体相似的新立方体，并计算了它的秩生成函数、立方体多项式和极大立方体多项式.本文的研究不但为匹配型分配格增加了一类新成员，而且其导出的立方体还可以作为新的内联网的模型。

关键词

匹配型分配格，滤子格，计数性质，斐波那契相似立方体，秩生成函数，立方体多项式

A Class of Fibonacci Similar Cubes and Their Counting Properties

Yuyu Zhou[1], Fangdi Chen[1*], Xuxu Zhao[2]

[1]School of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu
[2]Pingliang Experimental Middle School, Shaanxi Normal University, Pingliang Gansu

Received: Nov. 17th, 2023; accepted: Dec. 18th, 2023; published: Dec. 29th, 2023

Abstract

L-si-Fibonaccene is a hexagonal system based on the simple deformation of Fibonaccene, and a special partial order is established on its dual graph, which is named L-fence. According to the filter lattice formed by all the filters of the partially ordered L-barrier according to the inverse inclusion relation, a new class of matched distributive lattices is obtained. After ignoring the direction in its Hasse diagram, a new cube with similar structure and properties to the Fibonacci cube is

*通讯作者。

文章引用: 周玉玉, 陈芳娣, 赵婀婀. 一类斐波那契相似立方体及其计数性质[J]. 理论数学, 2023, 13(12): 3676-3689.
DOI: 10.12677/pm.2023.1312381

obtained, and its rank generating function, cube polynomial and maximal cube polynomial are calculated. The research in this paper not only adds a new class of members to the matching distributive lattice, but also the derived cube can be used as a new model of the intranet.

Keywords

Matched Distributive Lattices, Filter Lattices, Enumeration Properties, Fibonacci Similar Cubes, Rank Generating Functions, Cube Polynomials

1. 引言

1993 年，作为内联网模型，Hsu 定义了 Fibonacci 立方体 Γ_n [1]。由于该立方体具有类似超立方的良好性质，可以承载许多超立方上的算法[2]，进而引发了对其相关图类及其性质的一系列研究。Munarini 和 Zagaglia Salvi 定义了卢卡斯立方体 Λ_n [3] [4]。此外，Fibonacci 立方体和卢卡斯立方体的秩生成函数[5]、立方体多项式[6] [7]、最大立方体多项式[8]、不相交立方体多项式[9] [10]和度序列多项式[11]也得到了研究。同时，Klavžar，Munarini 等人[3] [6] [8] [10] [11] [12]研究了大量与卢卡斯立方体相关的性质，及其无向 Hasse-图上的计数性质；Munarini 等人[5]还研究了其有向 Hasse-图上的秩多项式等计数性质。张和平等人[13] [14]在平面基本二部图的完美匹配集合上建立了一个有限分配格——匹配型分配格的概念，并研究了其一些基本性质。Klav ar 和 igert Pleteršek [15]发现了 Fibonacci 立方体是 Fibonaccenes 的共振图。Yao 和 Zhang 进一步证明了定向的 Fibonacci 立方体都是匹配型分配格[16] [17]，其 Hasse 图同构于 Fibonaccenes 的共振有向图。然而与斐波那契立方体结构和性质相似的匹配型分配格和立方体的研究成果非常少。本文主要通过提出一个新的偏序集，从而得到了一类新的匹配型分配格，忽略掉其 Hasse 图中的方向后就得到一个结构和性质都与斐波那契立方体相似的新立方体——L-斐波那契相似立方体，并研究了 L-斐波那契相似立方体的一些计数性质。

2. 预备知识

如果一个集合 P 的序关系 $\le$ 满足自反性，反对称性和传递性，那这个集合称为偏序集。设 Q 是偏序集 P 的一个子集，则 Q 也满足 P 中的偏序关系：任给 $x,y\in Q$，若在 Q 中 $x\le y$ 当且仅当在 P 中 $x\le y$。$x\prec y$ 表示 x 被 y 覆盖或 y 覆盖 x，如果 $x<y$ 且 x 与 y 之间再无其它元素[18]。设 K(可能为空)为偏序集 P 的一个子集，若 $a,b\in K$，$x\in P$ 且 $a\le x\le b$ 时，有 $x\in K$，则称 K 为凸的[19]。设集合 Q 是偏序集 P 的一个子集，若 $y\in Q$ 且 $y\le z$ 则 $z\in Q$，那么 Q 称为 P 的一个滤子[18]，$\mathcal{F}(P)$ 表示一个偏序集 P 的所有滤子。所有滤子 $\mathcal{F}(P)$ 按照反包含关系($Y'\le Y$ 当且仅当 $Y'\supseteq Y$)构成的偏序集是个分配格，称为滤子格，而且 $\mathcal{F}(P):=(\mathcal{F}(P),\supseteq)$ 是一个有限分配格。在有限分配格 $\mathcal{F}(P)$ 中，$\hat{1}$ (或 $\hat{0}$)表示最大(或最小)元[19]。若分配格仅含有一个元素，则称分配格是平凡的。设 L 是一个有限分配格，如果存在一个平面弱基本二部图 G 使得 $L\cong M(G)$，则称 L 为匹配型分配格，其中 $M(G)$ 是在图 G 的所有完美匹配上建立的有限分配格[13]。

设 L 是一个有限分配格，K 是 L 的一个凸子格(即区间)，若 L 的任意极大链至少包含 K 的一个元素，则称 K 为 L 的一个割。L 关于 K 的凸扩张 $L\boxplus K$ 是集合 $L\cup K'$ ($K'\cong K$ 是 K 的拷贝)上的一个分配格([20])，

其导出关系为：

$x \le y$，在 L 中，若 $x \le y$，

$x' < y$，在 L 中，若 $x \le y$ 且 $x \in K$，

$x < y'$，在 L 中，若 $x < y$ 且 $y \in K$，

$x' \le y'$，在 K 中，若 $x \le y$。

本文中用到但没解释的概念见文献[18] [19]。

一个六角系统是一个没有割点的有限连通平面图，它的每个内面都被边长为 1 的正六边形包围[21]。Fibonaccenes 或“Zigzag”六角形链在六角系统中被广泛研究。斐波那契立方体是“Zigzag”六角形链的 Z-变换图或共振图[15]。我们将“Zigzag”六角形链简单修改得到了一种新的六角系统，并从其内对偶图上得到了一个偏序集，该偏序集的滤子格同构于该六角系统的匹配型分配格(其 Hasse 图同构于共振有向图[13])。

定义 2.1 “L-si-Fibonaccene”是在 Fibonaccene 的左端第二个六角形下面连接了一个额外六角形的 Cata 型六角系统，如下图 1 所示。本文中我们将有 $n(\ge 3)$ 个六角形的 L-si-Fibonaccene 记为 Y_n。

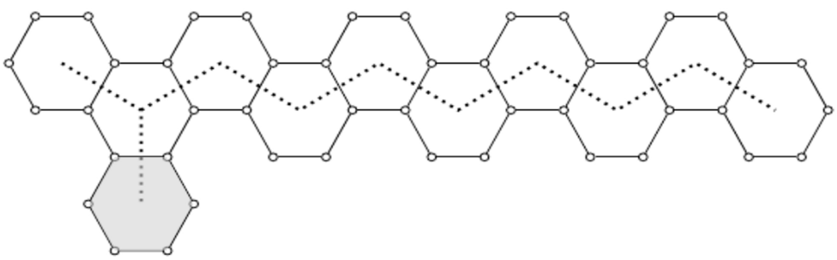
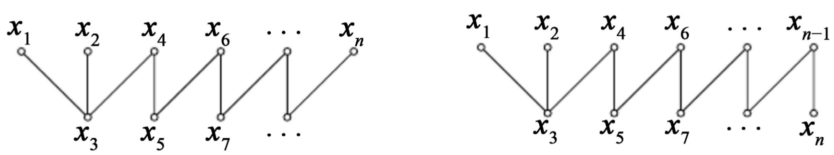


Figure 1. L-si-Fibonaccene and its inner dual graph
图 1. L-si-Fibonaccene 及其内对偶图



(a) n 是偶数 **(b) n 是奇数**

Figure 2. Poset ψ_n
图 2. 偏序集 ψ_n

定义 2.2 设 $n \ge 3$，称在 Y_n 的内对偶图上的如图 2 所示的偏序集为 L-栅栏，它是由“栅栏”(即“Zigzag”偏序)添加一个极大元得到的，记为 ψ_n。

定理 2.3 [14] 设 $n \ge 3$，$M(Y_n) \cong \mathcal{F}(\psi_n)$ 是 L-si-Fibonaccene Y_n 的匹配型分配格，其 Hasse 图同构于 Y_n 的有向 Z-变换图。

定义 2.4 将 L-栅栏的滤子格 $\mathcal{F}(\psi_n)$ 称为 L-斐波那契相似立方体，记为 Ψ_n，为方便计，Ψ_n 同时也表示 $\mathcal{F}(\psi_n)$ 的 Hasse 图。

前七个 L-斐波那契相似立方体 Ψ_0，Ψ_1，Ψ_2，Ψ_3，Ψ_4，Ψ_5，Ψ_6，如图 3 所示(其中 Ψ_0 表示只有一个顶点的平凡格或图)。

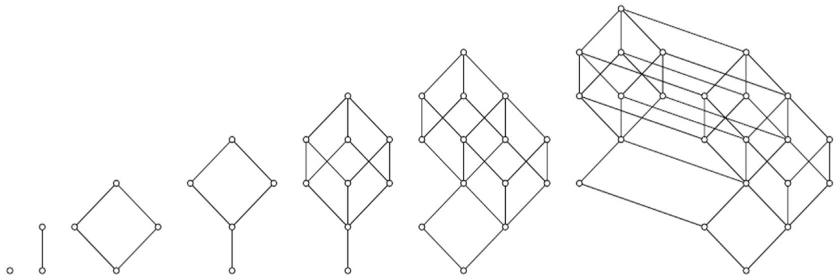


Figure 3. L-Fibonacci similar cube Ψ_0, $\cdots$, Ψ_6
图 3. L-斐波那契相似立方体 Ψ_0，$\cdots$，Ψ_6

引理 2.5 [20]滤子格 $\mathcal{F}(P)$ 是可以由分配格的凸扩张得到，对任意的 $x \in P$ 有，

$$\mathcal{F}(P) \cong \mathcal{F}(P-x) \boxplus \mathcal{F}(P*x),$$

其中 $P-x$ 和 $P*x$ 分别表示 $P\setminus\{x\}$ 和 $P\setminus\{y \in P \mid y \le x \text{ 或 } x \le y\}$ 上的子偏序集。

定理 2.6 当 $n \ge 5$ 时有，

$$\Psi_n \cong \Psi_{n-1} \boxplus \Psi_{n-2} \cong (\Psi_{n-2} \boxplus \Psi_{n-3}) \boxplus \Psi_{n-2}.$$

证明 在 Ψ_n 和 Ψ_{n-1} 中，分别令 $x = x_n$ 和 $x = x_{n-1}$，则根据引理 2.5 得

$$\begin{aligned}\Psi_n &= \mathcal{F}(\psi_n) = \mathcal{F}(\psi_n - x_n) \boxplus \mathcal{F}(\psi_n * x_n)\\ &= \mathcal{F}(\psi_{n-1}) \boxplus \mathcal{F}(\psi_{n-2})\\ &= \left(\mathcal{F}(\psi_{n-1} - x_{n-1}) \boxplus \mathcal{F}(\psi_{n-1} * x_{n-1})\right) \boxplus \mathcal{F}(\psi_{n-2})\\ &= \left(\mathcal{F}(\psi_{n-2}) \boxplus \mathcal{F}(\psi_{n-3})\right) \boxplus \mathcal{F}(\psi_{n-2}).\end{aligned}$$

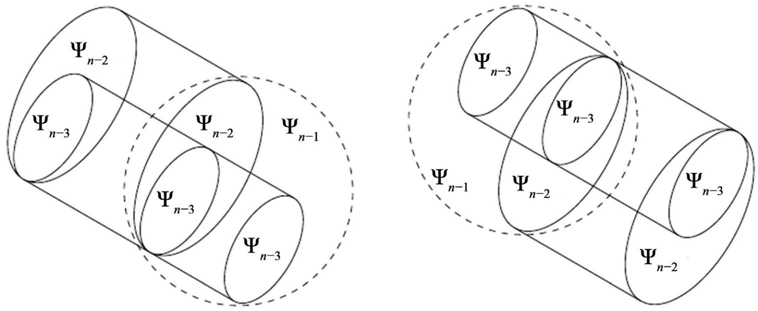
定理 2.6 得证。

注释 2.7 根据上述定理的证明和 n 的奇偶性，我们得到 Ψ_n 的递归结构。当 n 为偶数时，Ψ_n 的所有滤子分为以下三类：不含 x_{n-1}，x_n 的滤子(因而是 Ψ_{n-2} 的滤子，故其导出子格同构于 Ψ_{n-2})；含 x_n 但不含 x_{n-1} 的滤子(因为 x_n 是个极大元，所以删除 x_n 之后是 Ψ_{n-2} 的滤子，反之亦然，故其导出子格同构于 Ψ_{n-2})；同时包含 x_{n-1} 和 x_n 的滤子(因为 x_n 是个极大元，x_{n-1} 是个极小元，所以删除 x_{n-1} (同时必须删去 x_n 和 x_{n-2})之后是 Ψ_{n-3} 的滤子，反之亦然，故其导出子格同构于 Ψ_{n-3})。由反包含关系可以得知第一类中的滤子大于第二类中对应的滤子，第二类中的滤子大于第三类中对应的滤子(如图 4(a)所示)。当 n 为奇数时，Ψ_n 的所有滤子分为以下三类：不含 x_{n-2}，x_{n-1}，x_n 的滤子(因而是 Ψ_{n-3} 的所有滤子，故其导出子格同构于 Ψ_{n-3})；含 x_{n-1} 但不含 x_n 的滤子(因为 x_{n-1} 是个极大元，所以删除 x_{n-1} 之后是 Ψ_{n-2} 的所有滤子，反之亦然，故其导出子格同构于 Ψ_{n-2})；同时包含 x_{n-1} 和 x_n 的滤子(因为 x_{n-1} 是个极大元，x_n 是个极小元，所以删除 x_n 和 x_{n-1} 之后是 Ψ_{n-2} 的所有滤子，反之亦然，故其导出子格同构于 Ψ_{n-2})。由反包含关系可以得知第一类中的滤子大于第二类中对应的滤子，第二类中的滤子大于第三类中对应的滤子(如图 4(b)所示)。

3. 计数性质

3.1. 秩生成函数

设 Ψ_n 的秩生成函数为 $R_n^L(x) := R(\Psi_n, x) = \sum_{k\ge 0} r_{n,k}^L x^k$，其中 $r_{n,k}^L := r_k(\Psi_n)$ 表示 Ψ_n 中秩为 k 的元素的数目。其中部分 Ψ_n 的秩生成函数如下：



(a) n 是偶数　　(b) n 是奇数

Figure 4. The recursive structure diagram of Ψ_n

图 4. Ψ_n 的递归结构图

$$
\begin{aligned}
&R_0^L(x)=1,\\
&R_1^L(x)=1+x,\\
&R_2^L(x)=1+2x+x^2,\\
&R_3^L(x)=1+x+2x^2+x^3,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&R_4^L(x)=1+x+3x^2+3x^3+x^4,\\
&R_5^L(x)=1+2x+3x^2+4x^3+3x^4+x^5,\\
&R_6^L(x)=1+2x+4x^2+5x^3+6x^4+4x^5+x^6,\\
&R_7^L(x)=1+3x+5x^2+8x^3+8x^4+7x^5+4x^6+x^7.
\end{aligned}
$$

引理 3.1 [20]设 L 是一个有限分配格且 K 是 L 的一个割，则 $L\boxplus K$ 的秩生成函数为

$$
R(L\boxplus K,x)=\begin{cases} R(L,x)+x^{h_L(\hat{0}_K)+1}R(K,x), \text{ if } \hat{1}_K=\hat{1}_L;\\ R(K,x)+xR(L,x), \text{ if } \hat{0}_K=\hat{0}_L.\end{cases}
$$

其中 $h_L(x)$ 表示 L 中任意元素 x 的高。

由引理 3.1 我们有如下命题。

命题 3.2 当 $n\geq 4$ 时，

$$
R_n^L(x)=\begin{cases} xR_{n-1}^L(x)+R_{n-2}^L(x), n\text{ 为奇数},\\ R_{n-1}^L(x)+x^2R_{n-2}^L(x), n\text{ 为偶数}.\end{cases}
$$

换句话说，当 $m\geq 2$ 时，

$$
\begin{cases} R_{2m+1}^L(x)=xR_{2m}^L(x)+R_{2m-1}^L(x),\\ R_{2m}^L(x)=R_{2m-1}^L(x)+x^2R_{2m-2}^L(x).\end{cases}
$$

设 $A_m(x)=R_{2m}^L(x)$， $B_m(x)=R_{2m+1}^L(x)$，当 $m\geq 2$ 时，我们有

$$
\begin{cases} A_m(x)=B_{m-1}(x)+x^2A_{m-1}(x),\\ B_m(x)=xA_m(x)+B_{m-1}(x).\end{cases}
$$

我们有 $A_m(x)$ 和 $B_m(x)$ 的递推关系。

命题 3.3 设 $A_m(x)=R_{2m}^L(x)$， $B_m(x)=R_{2m+1}^L(x)$，

$$\begin{cases} A_m(x)=\left(1+x+x^2\right)A_{m-1}(x)-x^2A_{m-2}(x),(m\ge 3), \\ B_m(x)=\left(1+x+x^2\right)B_{m-1}(x)-x^2B_{m-2}(x),(m\ge 3). \end{cases}$$

证明 由上述得，当 $m\ge 3$ 时，

$$\begin{aligned} A_m(x) &= B_{m-1}(x)+x^2A_{m-1}(x) \\ &= xA_{m-1}(x)+B_{m-2}(x)+x^2A_{m-1}(x) \\ &= xA_{m-1}(x)+A_{m-1}(x)-x^2A_{m-2}(x)+x^2A_{m-1}(x) \\ &= \left(1+x+x^2\right)A_{m-1}(x)-x^2A_{m-2}(x) \end{aligned}$$

相似地，我们可得到 $B_m(x)$ 的递推关系。

由命题 3.3 可得 $A_m(x)$ 和 $B_m(x)$ 的生成函数，也可通过当 $n\ge 10$ 时，

$$\begin{aligned} P(\Psi_n) &= (2xy+x+y)P(\Psi_{n-2})-xy(xy+2x+2y-1)P(\Psi_{n-4}) \\ &\quad +xy\left(x^2y+xy^2-x-y+1\right)P(\Psi_{n-6})-x^2y^2(1-x)(1-y)P(\Psi_{n-8}), \end{aligned}$$

直接得到。

定理 3.4 $A_m(x)$ 和 $B_m(x)$ 的生成函数为

$$\sum_{m\ge 0}A_m(x)z^m=\frac{1+xz-2xz^2}{1-\left(1+x+x^2\right)z+x^2z^2}$$

且

$$\sum_{m\ge 0}B_m(x)z^m=\frac{1+x-xz+x^3z^2}{1-\left(1+x+x^2\right)z+x^2z^2}.$$

证明 由命题 3.3 得，

$$\begin{aligned} \sum_{m\ge 0}A_m(x)z^m &= \sum_{m\ge 3}A_m(x)z^m+A_2(x)z^2+A_1(x)z+A_0(x) \\ &= \sum_{m\ge 3}\left(\left(1+x+x^2\right)A_{m-1}-x^2A_{m-2}\right)z^m+A_2z^2+A_1z+A_0 \\ &= \left(1+x+x^2\right)z\sum_{m\ge 2}A_m(x)z^m-x^2z^2\sum_{m\ge 1}A_m(x)z^m+A_2(x)z^2+A_1(x)z+A_0(x) \\ &= \left(1+x+x^2\right)z\sum_{m\ge 0}A_m(x)z^m-x^2z^2\sum_{m\ge 0}A_m(x)z^m+1+xz-2xz^2 \end{aligned}$$

同理可得 $B_m(x)$ 的生成函数。

证明完毕。

设 $\binom{n;3}{k}$ [22]表示 $\left(1+x+x^2\right)^n$ 中 x^k 的系数，并且有

$$\binom{n;3}{k}=\sum_{i=0}^{\left\lfloor\frac{k}{2}\right\rfloor}\binom{n}{k-i}\binom{k-i}{i},$$

在 OEIS [23]中参考数列 A027907。

定理 3.5

$$r_{2m,k}^{L}=\sum_{i=0}^{\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor}(-1)^{i}\binom{m-i}{i}\binom{m-2i;3}{k-2i}+\sum_{i=0}^{\left\lfloor\frac{m-1}{2}\right\rfloor}(-1)^{i}\binom{m-i-1}{i}\binom{m-2i-1;3}{k-2i-1}-2\sum_{i=0}^{\left\lfloor\frac{m-2}{2}\right\rfloor}(-1)^{i}\binom{m-i-2}{i}\binom{m-2i-2;3}{k-2i-1}.$$

且

$$r_{2m+1,k}^{L}=\sum_{i=0}^{\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor}(-1)^{i}\binom{m-i}{i}\left(\binom{m-2i;3}{k-2i}+\binom{m-2i;3}{k-2i-1}\right)-\sum_{i=0}^{\left\lfloor\frac{m-1}{2}\right\rfloor}(-1)^{i}\binom{m-i-1}{i}\binom{m-2i-1;3}{k-2i-1}+\sum_{i=0}^{\left\lfloor\frac{m-2}{2}\right\rfloor}(-1)^{i}\binom{m-i-2}{i}\binom{m-2i-2;3}{k-2i-3}.$$

证明 其中多项式$\{g_n(x)\}$可如下定义

$$\sum_{n\geq 0}g_n(x)z^n=\frac{1}{1-\left(1+x+x^2\right)z+x^2z^2}$$

所以有

$$g_n(x)=\sum_{i=0}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}(-1)^{i}\binom{n-i}{i}x^{2i}\left(1+x+x^2\right)^{n-2i}.$$

此外，$g_n(x)$中x^k的系数可如下得到

$$\left[x^k\right]g_n(x)=\sum_{i=0}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}(-1)^{i}\binom{n-i}{i}x^{2i}\left(1+x+x^2\right)^{n-2i}=\sum_{i=0}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}(-1)^{i}\binom{n-i}{i}\binom{n-2i;3}{k-2i}.$$

所以，由$A_m(x)=g_m(x)+xg_{m-1}(x)-2xg_{m-2}(x)$，我们有

$$\begin{aligned}r_{2m,k}^{L}&=\left[x^k\right]A_m(x)=\left[x^k\right]g_m(x)+\left[x^{k-1}\right]g_{m-1}(x)-2\left[x^{k-1}\right]g_{m-2}(x)\\&=\sum_{i=0}^{\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor}(-1)^{i}\binom{m-i}{i}\binom{m-2i;3}{k-2i}+\sum_{i=0}^{\left\lfloor\frac{m-1}{2}\right\rfloor}(-1)^{i}\binom{m-i-1}{i}\binom{m-2i-1;3}{k-2i-1}\\&\quad-2\sum_{i=0}^{\left\lfloor\frac{m-2}{2}\right\rfloor}(-1)^{i}\binom{m-i-2}{i}\binom{m-2i-2;3}{k-2i-1}.\end{aligned}$$

同理，$r_{2m+1,k}^{L}$可由$B_m(x)=g_m(x)+xg_m(x)-xg_{m-1}(x)+x^3g_{m-2}(x)$得到。

$$\begin{aligned}r_{2m+1,k}^{L}&=\left[x^k\right]A_m(x)=\left[x^k\right]g_m(x)+\left[x^{k-1}\right]g_{m-1}(x)-2\left[x^{k-1}\right]g_{m-2}(x)\\&=\sum_{i=0}^{\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor}(-1)^{i}\binom{m-i}{i}\left(\binom{m-2i;3}{k-2i}+\binom{m-2i;3}{k-2i-1}\right)\\&\quad-\sum_{i=0}^{\left\lfloor\frac{m-1}{2}\right\rfloor}(-1)^{i}\binom{m-i-1}{i}\binom{m-2i-1;3}{k-2i-1}+\sum_{i=0}^{\left\lfloor\frac{m-2}{2}\right\rfloor}(-1)^{i}\binom{m-i-2}{i}\binom{m-2i-2;3}{k-2i-3}\end{aligned}$$

证毕。

由定理 3.4 我们可得到关于 $R_n^L(x)$ 的生成函数的结论。

定理 3.6 $R_n^L(x)$ 的生成函数为

$$\sum_{n\geq 0} R_n^L(x)y^n = \frac{1+(1+x)y+xy^2-xy^3-2xy^4+x^3y^5}{1-(1+x+x^2)y^2+x^2y^4}.$$

证明 由 $A_m(x)$ 和 $B_m(x)$ 的定义，

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0} R_n^L(x)y^n &= \sum_{m\geq 0} A_m(x)y^{2m} + \sum_{m\geq 0} B_m(x)y^{2m+1} \\ &= \sum_{m\geq 0} A_m(x)y^{2m} + y\sum_{m\geq 0} B_m(x)y^{2m} \\ &= \frac{1+xy^2-2xy^4}{1-(1+x+x^2)y^2+x^2y^4} + y\frac{1+x-xy^2+x^3y^4}{1-(1+x+x^2)y^2+x^2y^4} \\ &= \frac{1+(1+x)y+xy^2-xy^3-2xy^4+x^3y^5}{1-(1+x+x^2)y^2+x^2y^4}\end{aligned}$$

证毕。

在秩生成函数中取 $x=1$ 我们有 Ψ_n 的顶点生成函数为

推论 3.7

$$\sum_{n\geq 0} R_n^L(1)y^n = \frac{1+y+y^2-y^3}{1-y-y^2} = -2+y+\frac{3-2y}{1-y-y^2}$$

因此有顶点的递推关系为

$$\begin{cases} R_n^L(1) = R_{n-1}^L(1) + R_{n-2}^L(1)(n\geq 4), \\ R_2^L(1) = 4, R_3^L(1) = 5. \end{cases}$$

顶点序列中去掉 $R_0^L(1)=1$，$R_1^L(1)=2$ 得到 OEIS 中的类斐波那契数列 A104449 (去掉前两项：(3, 1) 4, 5, 9, 14, 23, 37, 60, 97...)。

3.2. 立方体多项式

设 Ψ_n 的立方体多项式为 $Q_n^L(x)=\sum_{k\geq 0} q_{n,k}^L x^k$，其中 $q_{n,k}^L := q_k(\Psi_n)$ 表示 Ψ_n 中 k 维立方体的个数。其中部分立方体多项式 $Q_n^L(x)$ 如下：

$$\begin{aligned}&Q_0^L(x)=1 \\ &Q_1^L(x)=2+x \\ &Q_2^L(x)=4+4x+x^2 \\ &Q_3^L(x)=5+5x+x^2 \\ &Q_4^L(x)=9+13x+6x^2+x^3 \\ &Q_5^L(x)=14+23x+12x^2+2x^3 \\ &Q_6^L(x)=23+45x+31x^2+9x^3+x^4\end{aligned}$$

引理 3.8. [20]设 L 是一个有限分配格且 K 是 L 的一个割。则

$$q_k(L\boxplus K) = q_k(L)+q_k(K)+q_{k-1}(K).$$

由引理 3.8 我们可得 $q_{n,k}$ 的递推关系。

命题 3.9 当 $n \ge 4$ 时，

$$q_{n,k}^L = q_{n-1,k}^L + q_{n-2,k}^L + q_{n-2,k-1}^L.$$

由此易得 $Q_n(x)$ 的递推关系。

命题 3.10 当 $n \ge 4$ 时，

$$Q_n^L(x) = Q_{n-1}^L(x) + (1+x)Q_{n-2}^L(x).$$

证明 由命题 3.9 可得，

$$\begin{aligned}
Q_n^L(x) &= \sum_{k\ge0} q_{n,k}^L x^k = \sum_{k\ge0}\left(q_{n-1,k}^L + q_{n-2,k}^L + q_{n-2,k-1}^L\right)x^k \\
&= \sum_{k\ge0} q_{n-1,k}^L x^k + \sum_{k\ge0} q_{n-2,k}^L x^k + x\sum_{k\ge0} q_{n-2,k-1}^L x^{k-1} \\
&= Q_{n-1}^L(x) + (1+x)Q_{n-2}^L(x)
\end{aligned}$$

证毕。

定理 3.11 $Q_n^L(x)$ 的生成函数为

$$\sum_{n\ge0} Q_n^L(x) y^n = \frac{y^2(1+x)^2 + 1 + (1+x)y - y^3(1+x)^2}{1 - y - y^2 - xy^2}.$$

证明

$$\begin{aligned}
\sum_{n\ge0} Q_n^L(x) y^n &= \sum_{n\ge4} Q_n^L(x) y^n + \sum_{n=0}^{3} Q_n^L(x) y^n \\
&= \sum_{n\ge4}\left(Q_{n-1}^L(x) + (1+x)Q_{n-2}^L(x)\right)y^n + Q_3^L(x)y^3 + Q_2^L(x)y^2 + Q_1^L(x)y + Q_0^L(x) \\
&= \sum_{n\ge4} Q_{n-1}^L(x) y^n + \sum_{n\ge4} Q_{n-2}^L(x) y^n + \sum_{n-2} xQ_{n-2}^L(x) + Q_3^L(x)y^3 + Q_2^L(x)y^2 \\
&\quad + Q_1^L(x)y + Q_0^L(x) \\
&= y\left(\sum_{n\ge0} Q_n^L(x)y^n - Q_2^L(x)y^2 - Q_1^L(x)y - Q_0^L(x)\right) + y^2\sum_{n\ge0} Q_n^L(x)y^n - Q_1^L(x)y^3 \\
&\quad - Q_0^L(x)y^2 + xy^2\left(\sum_{n\ge0} Q_n^L(x)y^n - Q_1^L(x)y - Q_0^L(x)\right) \\
&\quad + Q_2^L(x)y^2 + Q_1^L(x)y + Q_0^L(x) \\
&= \left(y + y^2 + xy^2\right)\sum_{n\ge0} Q_n^L(x)y^n + y^2(1+x)^2 + 1 + (1+x)y - y^3(1+x)^2
\end{aligned}$$

证毕。

立方体多项式可从 $Q_n^L(x)$ 的生成函数中导出。

推论 3.12 当 $n \ge 3$ 时，

$$\begin{aligned}
Q_n^L(x) = &\sum_{j=\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor}^{n} \binom{j+1}{n-j}(1+x)^{n-j} + \sum_{j=\left\lfloor\frac{n-2}{2}\right\rfloor}^{n-2} \binom{j}{n-j-2}(1+x)^{n-j} \\
&- \sum_{j=\left\lfloor\frac{n-3}{2}\right\rfloor}^{n-3} \binom{j}{n-j-3}(1+x)^{n-j-1}
\end{aligned}$$

并且有

$$q_{n,k}^{L}=\sum_{j=\left[\frac{n}{2}\right]}^{n}\binom{j+1}{n-j}\binom{n-j}{k}+\sum_{j=\left[\frac{n-2}{2}\right]}^{n-2}\binom{j}{n-j-2}\binom{n-j}{k}$$
$$-\sum_{j=\left[\frac{n-3}{2}\right]}^{n-3}\binom{j}{n-j-3}\binom{n-j-1}{k}.$$

证明

$$\begin{aligned}
\sum_{n\ge0}Q_n^L(x)y^n&=\frac{1+(1+x)y+y^2(1+x)^2-y^3(1+x)^2}{1-y-(1+x)y^2}\\
&=\left(1+(1+x)y+y^2(1+x)^2-y^3(1+x)^2\right)\sum_{j\ge0}\left(y+(1+x)y^2\right)^j\\
&=\sum_{j\ge0}y^j\left(1+(1+x)y\right)^{j+1}+y^2(1+x)^2\sum_{j\ge0}y^j\left(1+(1+x)y\right)^j\\
&\quad-y^3(1+x)^2\sum_{j\ge0}y^j\left(1+(1+x)y\right)^j\\
&=\sum_{j\ge0}\sum_{n-j\ge0}\binom{j+1}{n-j}(1+x)^{n-j}y^n+(1+x)^2\sum_{j\ge0}\sum_{n-j-2\ge0}\binom{j}{n-j-2}(1+x)^{n-j-2}y^n\\
&\quad-(1+x)^2\sum_{j\ge0}\sum_{n-j-3\ge0}\binom{j}{n-j-3}(1+x)^{n-j-3}y^n\\
&=\sum_{n\ge0}\sum_{j=\left[\frac{n}{2}\right]}^{n}\binom{j+1}{n-j}(1+x)^{n-j}y^n+\sum_{n\ge0}\sum_{j=\left[\frac{n-2}{2}\right]}^{n-2}\binom{j}{n-j-2}(1+x)^{n-j}y^n\\
&\quad-\sum_{n\ge0}\sum_{j=\left[\frac{n-3}{2}\right]}^{n-3}\binom{j}{n-j-3}(1+x)^{n-j-1}y^n
\end{aligned}$$

所以，

$$\begin{aligned}
Q_n^L(x)&=\sum_{j=\left[\frac{n}{2}\right]}^{n}\binom{j+1}{n-j}(1+x)^{n-j}+\sum_{j=\left[\frac{n-2}{2}\right]}^{n-2}\binom{j}{n-j-2}(1+x)^{n-j}-\sum_{j=\left[\frac{n-3}{2}\right]}^{n-3}\binom{j}{n-j-3}(1+x)^{n-j-1}\\
&=\sum_{j=\left[\frac{n}{2}\right]}^{n}\sum_{k=0}^{n-j}\binom{j+1}{n-j}\binom{n-j}{k}x^k+\sum_{\left[\frac{n-2}{2}\right]}^{n-2}\sum_{k=0}^{n-j}\binom{j}{n-j-2}\binom{n-j}{k}x^k\\
&\quad-\sum_{j=\left[\frac{n-3}{2}\right]}^{n-3}\sum_{k=0}^{n-j-1}\binom{j}{n-j-3}\binom{n-j-1}{k}x^k\\
&=\sum_{k\ge0}\sum_{j=\left[\frac{n}{2}\right]}^{n}\binom{j+1}{n-j}\binom{n-j}{k}x^k+\sum_{k\ge0}\sum_{j=\left[\frac{n-2}{2}\right]}^{n-2}\binom{j}{n-j-2}\binom{n-j}{k}x^k\\
&\quad-\sum_{k\ge0}\sum_{j=\left[\frac{n-3}{2}\right]}^{n-3}\binom{j}{n-j-3}\binom{n-j-1}{k}x^k.
\end{aligned}$$

因此，可得 $Q_n^L(x)$。

3.3. 极大立方体多项式

极大立方体是指不包含在其他更高维立方体中的立方体。设 Ψ_n 的极大立方体多项式为 $H_n^L(x)=\sum_{k\geq 0}h_{n,k}^L x^k$，其中 $h_{n,k}^L := h_k(\Psi_n)$ 表示 Ψ_n 中极大 k 维立方体的数目，其部分极大立方体多项式 $H_n^L(x)$ 如下：

$$H_0^L(x)=1$$
$$H_1^L(x)=x$$
$$H_2^L(x)=x^2$$
$$H_3^L(x)=x+x^2$$
$$H_4^L(x)=x+x^3$$
$$H_5^L(x)=x^2+2x^3$$
$$H_6^L(x)=2x^2+x^3+x^4$$
$$H_7^L(x)=x^2+x^3+3x^4$$
$$H_8^L(x)=3x^3+3x^4+x^5$$

由定理 2.6 和注释 2.7 可得 $h_{n,k}^L$ 的递推关系。

命题 3.13 当 $n\geq 4$ 时，

$$h_{n,k}^L = h_{n-2,k-1}^L + h_{n-3,k-1}^L.$$

由命题 3.13 易得 $H_n^L(x)$ 递推关系。

命题 3.14 当 $n\geq 5$ 时，

$$H_n^L(x)=xH_{n-2}^L(x)+xH_{n-3}^L(x).$$

推论 3.15 当 $n\geq 4$ 时，我们有

$$H_n^L(1)=H_{n-2}^L(1)+H_{n-3}^L(1).$$

$(1,0,0)$-Padovan 数列 $a(n)$ 定义为：$a(0)=1$，$a(1)=a(2)=0$，$a(n)=a(n-2)+a(n-3)$，其中 $n\geq 0$ (在 OEIS [23]}中参考数列 A000931)。因此我们有如下推论。

推论 3.16 当 $n\geq 0$ 时，

$$H_n^L(1)=a(n+5).$$

此外，由命题 3.14 我们可得 $H_n^L(x)$ 的生成函数。

定理 3.17 $H_n^L(x)$ 的生成函数为

$$\sum_{n=0}^{\infty}H_n^L(x)y^n=\frac{1+xy+x^2y^2+xy^4-xy^2-x^2y^4}{1-\left(xy^2+xy^3\right)}$$

证明 由命题 3.14 得，

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} H_n^L(x) y^n &= \sum_{n=5}^{\infty} H_n^L(x) y^n + \sum_{n=0}^{4} H_n^L(x) y^n \\
&= \sum_{n=5}^{\infty}\left(xH_{n-2}^L(x) + xH_{n-3}^L(x)\right) y^n + \sum_{n=0}^{4} H_n^L(x) y^n \\
&= x\sum_{n=5}^{\infty} H_{n-2}^L(x) y^n + x\sum_{n=5}^{\infty} H_{n-3}^L(x) y^n + \sum_{n=0}^{4} H_n^L(x) y^n \\
&= xy^2\sum_{n=5}^{\infty} H_{n-2}^L(x) y^{n-2} + xy^3\sum_{n=5}^{\infty} H_{n-3}^L(x) y^{n-3} + \sum_{n=0}^{4} H_n^L(x) y^n \\
&= xy^2\sum_{n=0}^{\infty} H_n^L(x) y^n - xy^2H_0^L(x) - xy^2H_1^L(x)y - xy^2H_2^L(x)y^2 \\
&\quad + xy^3\sum_{n=0}^{\infty} H_n^L(x) y^n - xy^3H_0^L(x) - xy^3H_1^L(x)y + H_0^L(x) \\
&\quad + H_1^L(x)y + H_2^L(x)y^2 + H_3^L(x)y^3 + H_4^L(x)y^4 \\
&= \left(xy^2 + xy^3\right)\sum_{n=0}^{\infty} H_n^L(x) y^n + 1 + xy + x^2y^2 + xy^4 - xy^2 - x^2y^4.
\end{aligned}
$$

将 $\sum_{n\ge 0} H_n^L(x) y^n$ 利用二项式展开可得如下结论。

推论 3.18 当 $n \ge 4$ 时，

$$
\begin{aligned}
H_n^L(x) = &\sum_{k=\left\lfloor \frac{n}{3}\right\rfloor}^{\frac{n}{2}} \binom{k}{n-2k} x^k + \sum_{k=\left\lfloor \frac{n+2}{3}\right\rfloor}^{\frac{n+1}{2}} \binom{k-1}{n-2k+1} x^k + \sum_{k=\left\lfloor \frac{n+4}{3}\right\rfloor}^{\frac{n+2}{2}} \binom{k-2}{n-2k+2} x^k \\
&+ \sum_{k=\left\lfloor \frac{n-1}{3}\right\rfloor}^{\frac{n-2}{2}} \binom{k-1}{n-2k-2} x^k - \sum_{k=\left\lfloor \frac{n+1}{3}\right\rfloor}^{\frac{n}{2}} \binom{k-1}{n-2k} x^k - \sum_{k=\left\lfloor \frac{n+2}{3}\right\rfloor}^{\frac{n}{2}} \binom{k-2}{n-2k} x^k.
\end{aligned}
$$

证明 此证明分为两部分进行

$$
\sum_{n=0}^{\infty} H_n^L(x) y^n = \frac{1+xy+x^2y^2+xy^4-xy^2-x^2y^4}{1-xy^2(1+y)} = \frac{1+xy+x^2y^2}{1-xy^2(1+y)} + \frac{xy^4-xy^2-x^2y^4}{1-xy^2(1+y)}.
$$

其中第一部分为

$$
\begin{aligned}
&\frac{1+xy+x^2y^2}{1-xy^2(1+y)} \\
&= \left(1+xy+x^2y^2\right)\sum_{j=0}^{\infty}\left(xy^2(1+y)\right)^j \\
&= \sum_{j\ge 0} x^j y^{2j}(1+y)^j + \sum_{j\ge 0} x^{j+1} y^{2j+1}(1+y)^j + \sum_{j\ge 0} x^{j+2} y^{2j+2}(1+y)^j \\
&= \sum_{j\ge 0}\sum_{n-2j=0}^{j}\binom{j}{n-2j} x^j y^n + \sum_{j\ge 0}\sum_{n-2j-1=0}^{j}\binom{j}{n-2j-1} x^{j+1} y^n + \sum_{j\ge 0}\sum_{n-2j-1=0}^{j}\binom{j}{n-2j-2} x^{j+2} y^n \\
&= \sum_{n\ge 0}\sum_{j=\left\lfloor \frac{n}{3}\right\rfloor}^{\frac{n}{2}}\binom{j}{n-2j} x^j y^n + \sum_{n\ge 0}\sum_{j=\left\lfloor \frac{n-1}{3}\right\rfloor}^{\frac{n-1}{2}}\binom{j}{n-2j-1} x^{j+1} y^n + \sum_{n\ge 0}\sum_{j=\left\lfloor \frac{n-2}{3}\right\rfloor}^{\frac{n-2}{2}}\binom{j}{n-2j-2} x^{j+2} y^n \\
&= \sum_{n\ge 0}\sum_{k=\left\lfloor \frac{n}{3}\right\rfloor}^{\frac{n}{2}}\binom{k}{n-2k} x^k y^n + \sum_{n\ge 0}\sum_{k=\left\lfloor \frac{n+2}{3}\right\rfloor}^{\frac{n+1}{2}}\binom{k-1}{n-2k+1} x^k y^n + \sum_{n\ge 0}\sum_{k=\left\lfloor \frac{n+4}{3}\right\rfloor}^{\frac{n+2}{2}}\binom{k-2}{n-2k+2} x^k y^n.
\end{aligned}
$$

第二部分为

$$
\begin{aligned}
&\frac{xy^4 - xy^2 - x^2y^4}{1 - xy^2(1+y)} \\
&= \left(xy^4 - xy^2 - x^2y^4\right)\sum_{j=0}^{\infty}\left(xy^2(1+y)\right)^j \\
&= \sum_{j\ge 0} x^{j+1}y^{2j+4}(1+y)^j - \sum_{j\ge 0} x^{j+1}y^{2j+2}(1+y)^j - \sum_{j\ge 0} x^{j+2}y^{2j+4}(1+y)^j \\
&= \sum_{j\ge 0}\sum_{n-2j+4=0}^{j}\binom{j}{n-2j-4}x^j y^n - \sum_{j\ge 0}\sum_{n-2j-2=0}^{j}\binom{j}{n-2j-2}x^{j+1}y^n - \sum_{j\ge 0}\sum_{n-2j-4=0}^{j}\binom{j}{n-2j-4}x^{j+2}y^n \\
&= \sum_{n\ge 0}\sum_{j=\left\lfloor\frac{n-4}{3}\right\rfloor}^{\frac{n-4}{2}}\binom{j}{n-2j-4}x^{j+1}y^n - \sum_{n\ge 0}\sum_{j=\left\lfloor\frac{n-2}{3}\right\rfloor}^{\frac{n-2}{2}}\binom{j}{n-2j-2}x^{j+1}y^n - \sum_{n\ge 0}\sum_{j=\left\lfloor\frac{n-4}{3}\right\rfloor}^{\frac{n-4}{2}}\binom{j}{n-2j-4}x^{j+2}y^n \\
&= \sum_{n\ge 0}\sum_{k=\left\lfloor\frac{n-1}{3}\right\rfloor}^{\frac{n+1}{2}}\binom{k-1}{n-2k-2}x^k y^n - \sum_{n\ge 0}\sum_{k=\left\lfloor\frac{n+1}{3}\right\rfloor}^{\frac{n}{2}}\binom{k-1}{n-2k}x^k y^n - \sum_{n\ge 0}\sum_{k=\left\lfloor\frac{n+2}{3}\right\rfloor}^{\frac{n}{2}}\binom{k-2}{n-2k}x^k y^n.
\end{aligned}
$$

证毕。

基金项目

国家自然科学基金项目(NO. 12161081)。

参考文献

[1] Hsu, W.J. (1993) Fibonacci Cubes—A New Interconnection Topology. *IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems*, **4**, 3-12. https://doi.org/10.1109/71.205649

[2] Hsu, W.J., Carl, V.P. and Liu, J.S. (1993) Fibonacci Cubes—A Class of Self-Similar Graphs. *The Fibonacci Quarterly*, **31**, 65-72.

[3] Munarini, E., Cippo, C.P. and Zagaglia Salvi, N. (2001) On the Lucas Cubes. *The Fibonacci Quarterly*, **39**, 12-21.

[4] Zagaglia Salvi, N. (2001) The Lucas Lattice. The 2001 International Parallel and Distributed Processing Symposium, Vol. 2, San Francisco, 23-27 April 2001, 719-721.

[5] Munarini, E. and Zagaglia Salvi, N. (2002) On the Rank Polynomial of the Lattice of Order Ideals of Fences and Crowns. *Discrete Mathematics*, **259**, 163-177. https://doi.org/10.1016/S0012-365X(02)00378-3

[6] Klavžar, S. and Mollard, M. (2012) Cube Polynomial of Fibonacci and Lucas Cubes. *Acta Applicandae Mathematicae*, **117**, 93-105. https://doi.org/10.1007/s10440-011-9652-4

[7] Saygı, E. and Eğecioğlu, Ö. (2018) q-Counting Hypercubes in Lucas Cubes. *Turkish Journal of Mathematics*, **42**, 190-203. https://doi.org/10.3906/mat-1605-2

[8] Mollard, M. (2012) Maximal Hypercubes in Fibonacci and Lucas Cubes. *Discrete Applied Mathematics*, **160**, 2479-2483. https://doi.org/10.1016/j.dam.2012.06.003

[9] Gravier, S., Mollard, M., Špacapaand, S. and Zemljič, S.S. (2015) On Disjoint Hypercubes in Fibonacci Cubes. *Discrete Applied Mathematics*, **190-191**, 50-55. https://doi.org/10.1016/j.dam.2015.03.016

[10] Saygı, E. and Eğecioğlu, O. (2016) Counting Disjoint Hypercubes in Fibonacci Cubes. *Discrete Applied Mathematics*, **215**, 231-237. https://doi.org/10.1016/j.dam.2016.07.004

[11] Klavžar, S., Mollard, M. and Petkovšek, M. (2011) The Degree Sequence of Fibonacci and Lucas Cubes. *Discrete Mathematics*, **311**, 1310-1322. https://doi.org/10.1016/j.disc.2011.03.019

[12] Klavžar, S. (2013) Structure of Fibonacci Cubes: A Survey. *Journal of Combinatorial Optimization*, **25**, 505-522. https://doi.org/10.1007/s10878-011-9433-z

[13] Lam, P.C.B. and Zhang, H. (2003) A Distributive Lattice on the Set of Perfect Matchings of a Plane Bipartite Graph. *Order*, **20**, 13-29. https://doi.org/10.1023/A:1024483217354

[14] Zhang, H., Yang, D. and Yao, H. (2014) Decomposition Theorem on Matchable Distributive Lattices. *Discrete Applied Mathematics*, **166**, 239-248. https://doi.org/10.1016/j.dam.2013.09.008

[15] Klavžar, S. and Žigert Pleteršek, P. (2005) Fibonacci Cubes Are the Resonance Graphs of Fibonaccenes. *The Fibonacci Quarterly*, **43**, 269-276.

[16] Yao, H. and Zhang, H. (2015) Non-Matchable Distributive Lattices. *Discrete Mathematics*, **338**, 122-132. https://doi.org/10.1016/j.disc.2014.10.020

[17] Zhang, H., Ouand, L. and Yao, H. (2009) Fibonacci-Like Cubes as Z-Transformation Graphs. *Discrete Mathematics*, **309**, 1284-1293. https://doi.org/10.1016/j.disc.2008.01.053

[18] Davey, B.A. and Priestley, H.A. (2002) Introduction to Lattices and Order. 2nd Edition, Cambridge University Press, Cambridge. https://doi.org/10.1017/CBO9780511809088

[19] Stanley, R.P. (2011) Enumerative Combinatorics: Volume 1, Volume 49 of Cambridge Studies in Advanced Mathematics. 2nd Edition, Cambridge University Press, Cambridge.

[20] Wang, X., Zhao, X. and Yao, H. (2018) Convex Expansion for Finite Distributive Lattices with Applications. arXiv: 1810. 06762.

[21] Zhang, H. (2006) Z-Transformation Graphs of Perfect Matchings of Plane Bipartite Graphs: A Survey. *MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*, **56**, 457-476.

[22] Comtet, L. (1974) Advanced Combinatorics: The Art of Finite and Infinite Expansions. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht.

[23] Sloane, N.J.A. (2019) The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. http://oeis.org/
https://doi.org/10.1515/9780691197944-009