Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(12), 3490-3495
Published Online December 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.1312363

浅析数列通项公式a_n在高考中的考察

王力永，侯传燕

新疆师范大学，数学科学学院，新疆 乌鲁木齐

收稿日期：2023年11月11日；录用日期：2023年12月12日；发布日期：2023年12月21日

摘 要

数列通项公式a_n是高考数列中的重要考察内容，考查形式也是多种多样，笔者通过对最近几年高考数列试题的分析和研究，探究其一般性解法，从而使读者在解题过程中达到熟能生巧触类旁通的目的。

关键词

数列，递推数列，通项公式

A Brief Analysis of the Examination of the General Term Formula a_n of a Sequence in the College Entrance Examination

Liyong Wang, Chuanyan Hou

School of Mathematical Sciences, Xinjiang Normal University, Urumqi Xinjiang

Received: Nov. 11th, 2023; accepted: Dec. 12th, 2023; published: Dec. 21st, 2023

Abstract

The general term formula a_n of a sequence is an important examination content in the college entrance examination sequence, and the examination forms are also diverse. Through the analysis and research of the college entrance examination sequence test questions in recent years, the author explores its general solution, so that readers can solve the problem in the process practice makes perfect by analogy.

Keywords

Sequence, Recursion Sequence, General Formula

文章引用: 王力永, 侯传燕. 浅析数列通项公式 a_n 在高考中的考察[J]. 理论数学, 2023, 13(12): 3490-3495.
DOI: 10.12677/pm.2023.1312363

1. 引言

我国教育部在 2014 年 3 月 30 日发布的《关于全面深化课程改革落实立德树人根本任务的意见》文件中提出研究制定学生发展核心素养体系，明确提出学生应具备适应终身发展和社会发展需要的必须品格和关键能力。博士生导师王尚志教授作了“关于普通高中数学课程标准修订”专题报告，提出应培养好高中学生的数学抽象、数据分析、数学推理、数学建模、数学运算直观想象六大核心素养，并强调其重要性。培养学生的思维能力是高中数列教学的核心之一。数列的概念和性质本身相对比较抽象，学生需要发展自己的思考能力，理解数列的本质并能够运用数列的性质进行问题解决。教师可以通过引导学生观察规律、总结特点、运用归纳法等方法来培养学生的数学思维能力。学生观察数列通项公式的特点，从而推导出数列的递推公式，培养学生归纳与推理的能力。在高考数列问题研究中发现求数列通项 a_n 是解数列问题的关键，因为求数列前 n 项和与后续设计的其它问题都与通项公式 a_n 密切相关。在一些期刊论文中探究数列通项公式求解方法的论文很多，出发角度不尽相同，但最终目的都是为读者拓展解题思路并构建数学思维。

2. 数列 $\{a_n\}$ 求解类型及应用分析

笔者在本文中从数列通项公式 a_n 在高考数列中的考察方式出发，根据数列中的重要变量：n，a_n，S_n 三者之间的关系，综合对近些年高考试卷的详细分析可以看出高考试题中对数列 a_n 的考察是通过以下几个方向进行的。

(1) 已知数列 $\{a_n\}$ 中的 a_m 的值或 a_m 和 a_{m+k} 之间的关系表达式(其中也包括数列通项 a_n 与 a_{n+1} 的递推关系)，求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式。

(2) 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 的关系表达式，求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式。

(3) 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项 a_n 与前 n 项和 S_n 的关系，求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式。

(4) 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项 a_n、S_n 和 n 三者的关系，求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式。

类型 1. 已知数列 $\{a_n\}$ 中的 a_m 的值或 a_m 和 a_{m+k} 之间的关系表达式(其中也包括数列通项 a_n 与 a_{n+1} 的递推关系)，求数列 a_n 的通项公式[1]。

例 1 (2020 全国高考理科新课标三)设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=3$，$a_{n+1}=3a_n-4n$，计算 a_2、a_3，猜想 $\{a_n\}$ 的通项公式并加以证明。

(1) 思路分析：本题的解题目标是求数列通项公式 a_n，在解题中只要充分利用 a_n 和 a_{n+1} 之间的递推关系($a_{n+1}=3a_n-4n$)求出数列 a_1、a_2 和 a_3 后，推测数列 $\{a_n\}$ 的通项公式，再利用数学归纳法进行证明即可。这类题型中只有两个变量 n 和 a_n，找到二者的关系是解这类题型的关键。

(2) 试题详解：

解：根据题意可知 $a_2=3a_1-4=9-4=5$，$a_3=3a_2-8=15-8=7$，此时 $a_1=3$，$a_2=5$，$a_3=7$，由数列 $\{a_n\}$ 的前三项即可猜想数列 $\{a_n\}$ 是以 3 为首项，2 为公差的等差数列，即 $a_n=2n+1$。

用数学归纳法证明如下：

当 $n=1$ 时，$a_1=3$ 成立，假设 $n=k$ 时，$a_k=2k+1$ 成立。那么当 $n=k+1$ 时，

$a_{k+1}=3a_k-4k=3(2k+1)-4k=2k+3=2(k+1)+1$ 也成立，则对任意的 $n\in N^*$，都有 $a_n=2n+1$ 成立。

例 2. (2020 山东新高考全国卷①)已知公比大于 1 的等比数列$\{a_n\}$满足$a_2+a_4=20$，$a_3=8$，求$\{a_n\}$的通项公式。

(1) 思路分析：本题内容已知等比数列其中的三项之间的关系，其解题目标是求等比数列通项公式a_n，利用等比数列通项公式$a_n=a_1q^{n-1}$将a_2、a_3、a_4用a_1和q表示以后带入已知条件$a_2+a_4=20$，$a_3=8$即可得出等比数列的通项公式。

(2) 试题详解：

解：(1) 由于数列$\{a_n\}$是公比大于 1 的等比数列，可设其首项为a_1，公比为q，依题意有，$\begin{cases}a_1q+a_1q^3=20\\a_1q^2=8\end{cases}$，解得$a_1=2$，$q=2$，或$a_1=32$，$q=\frac{1}{2}$ (舍)。所以$a_n=2^n$，因此数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=2^n$。

小结：在此类题目中学生需准确掌握数列$\{a_n\}$内部各项之间的关系来达到解题目标，这是总的原则。一般地，如果解题目标是求等差数列或等比数列通项，只需利用等差数列通项公式$a_n=a_1+d(n-1)$和等比数列通项公式$a_n=a_1q^{n-1}$便可达到解题目标；如果解题目标不是等差数列或等比数列通项，就要从已知条件中挖掘数列$\{a_n\}$内部各项之间的关系来求解(例如已知数列a_n与a_{n-1}之间的递推关系求数列通项)。

类型 2. 已知数列中n与S_n的关系表达式(其中也包括S_n与S_{n-1}之间的关系)，求数列$\{a_n\}$的通项公式[2]。

例 3. (2021 年浙江省高考试题)已知数列$\{a_n\}$前n项和为S_n，$a_1=-\frac{9}{4}$，且$4S_{n+1}=3S_n-9$，求数列$\{a_n\}$的通项。

(1) 思路分析：在本题中已知S_n与S_{n+1}之间的递推关系($4S_{n+1}=3S_n-9$)，根据二者的递推关系推出a_n与a_{n+1}之间的递推关系，然后得出数列通项a_n，

(2) 试题详解：

解：当$n=1$时，由已知$4(a_1+a_2)=3a_1-9$，解得$4a_2=\frac{9}{4}-9=-\frac{27}{4}$，则$a_2=-\frac{27}{16}$当$n\ge 2$时，由$4S_{n+1}=3S_n-9$ ①，得$4S_n=3S_{n-1}-9$ ②，使①~②得$4a_{n+1}=3a_n$，因为$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{3}{4}$，又因为$\frac{a_2}{a_1}=\frac{3}{4}$，所以$\{a_n\}$是首项为$\frac{9}{4}$，公比为$\frac{3}{4}$的等比数列，即$a_n=-\frac{9}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}=-3\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n$。

小结：一般情况下，在此类题型中根据已知条件$S_n=f(n)$，利用关系式$a_n=S_n-S_{n-1}=f(n)-f(n-1)$($n\ge 2$)计算出数列通项，即可得出数列的通项公式；如果已知S_n与S_{n-1}的递推关系，可以通过二者的递推关系式可得出数列通项a_n与a_{n-1}的递推关系，再根据二者的关系求出数列通项a_n。

类型 3. 已知a_n与S_n的数学表达式，求数列通项公式[3]。

例 4. (2019 江苏省高考题)定义首项为 1 且公比为正数的等比数列为“M-数列”，已知数列$\{b_n\}$满足：$b_1=1$，$\frac{1}{S_n}=\frac{2}{b_n}-\frac{2}{b_{n-1}}$，其中$S_n$为数列$\{b_n\}$的前$n$项和，求数列$\{b_n\}$的通项公式。

(1) 思路分析：本题已知$\frac{1}{S_n}=\frac{2}{b_n}-\frac{2}{b_{n+1}}$，通过公式变形得$S_n=\frac{b_nb_{n+1}}{2(b_{n+1}-b_n)}$，再根据公式$b_n=S_n-S_{n-1}$、通分、计算、化简后便可得到$b_{n+1}+b_{n-1}=2b_n$。由于$b_1=1$，$b_2=2$，则数列$\{b_n\}$是首项和公差为 1 的等差数列。

(2) 试题详解：

解：① 因为$\frac{1}{S_n}=\frac{2}{b_n}-\frac{2}{b_{n+1}}$，所以$b_n\neq 0$，由$b_1=1$，$S_1=b_1$，可得$\frac{1}{1}=\frac{2}{1}-\frac{2}{b_2}$，则$b_2=2$。由$\frac{1}{S_n}=\frac{2}{b_n}-\frac{2}{b_{n+1}}$，得$S_n=\frac{b_nb_{n+1}}{2\left(b_{n+1}-b_n\right)}$，当$n\geq 2$时，由$b_n=S_n-S_{n-1}$，得$b_n=\frac{b_nb_{n+1}}{2\left(b_{n+1}-b_n\right)}-\frac{b_{n-1}b_n}{2\left(b_n-b_{n-1}\right)}$，整理得$b_{n+1}+b_{n-1}=2b_n$。因而有$b_1+b_3=2b_2$，此时$b_3=3$，$d=b_2-b_1=b_3-b_2=1$，所以数列$\{b_n\}$是首项和公差为 1 的等差数列。因此，数列$\{b_n\}$的通项公式为$b_n=n\left(n\in N^*\right)$。

例 5. (2021 年全国高考乙卷数学(理)试题)记S_n为数列$\{a_n\}$的前项和，b_n为数列$\{S_n\}$的前n项积，已知$\frac{2}{S_n}+\frac{1}{b_n}=2$，证明数列$\{b_n\}$是等差数列并求数列$\{a_n\}$的通项公式。

(1) 思路分析：本题的第一问是证明数列$\{b_n\}$是等差数列，已知b_n为数列$\{S_n\}$的前n项积，根据b_n和S_n的关系式便能得出$S_n=\frac{2b_n}{2b_n-1}$，再利用数列通项公式b_{n+1}与b_n的递推关系即$\frac{b_{n+1}}{b_n}=S_{n+1}$便可得出$b_{n+1}-b_n=\frac{1}{2}$，因而证明了数列$\{b_n\}$是等差数列，在解答此类数列问题的时候，找出$S_n$与$b_n$的关系是解答此类问题的中心环节；已知$b_n$为数列$\{S_n\}$的前$n$项积，则$S_n=\frac{b_n}{b_{n-1}}$，将$b_n=1+\frac{n}{2}$代入$S_n=\frac{b_n}{b_{n-1}}$得$S_n=\frac{2+n}{1+n}$，再根据公式$a_n=S_n-S_{n-1}$计算归纳得出数列$\{a_n\}$的通项公式。

(2) 试题详解：

解：由已知$\frac{2}{S_n}+\frac{1}{b_n}=2$可得$S_n=\frac{2b_n}{2b_n-1}$，且$b_n\neq 0$，$b_n\neq\frac{1}{2}$，取$n=1$得$b_1=\frac{3}{2}$，由于$b_n$为数列$\{S_n\}$的前$n$项积，∴ $\frac{2b_1}{2b_1-1}\div\frac{2b_2}{2b_2-1}\cdots\frac{2b_n}{2b_n-1}=b_n$ ①，$\frac{2b_1}{2b_1-1}\cdot\frac{2b_2}{2b_2-1}\cdots\frac{2b_{n+1}}{2b_{n+1}-1}=b_{n+1}$ ②，用②式的左右两边同时除以①式的左右两边可得$\frac{2b_{n+1}}{2b_{n+1}-1}=\frac{b_{n+1}}{b_n}$，由于$b_{n+1}\neq 0$，所以$\frac{2}{2b_{n+1}-1}=\frac{1}{b_n}$，即$b_{n+1}-b_n=\frac{1}{2}$，其中$n\in N^*$，所以数列$\{b_n\}$是以$b_1=\frac{3}{2}$为首项，以$d=\frac{1}{2}$为公差的等差数列；

经过上面的证明已经得到数列$\{b_n\}$是以$b_1=\frac{3}{2}$为首项，以$d=\frac{1}{2}$为公差的等差数列，则$b_n=\frac{3}{2}+\left(n-1\right)\times\frac{1}{2}=1+\frac{n}{2}$，由已知$b_n$为数列$\{S_n\}$的前$n$项积，因此有$S_n=\frac{2b_n}{2b_n-1}=\frac{2+n}{1+n}$，当$n=1$时，$a_1=S_1=\frac{3}{2}$，当$n\geq 2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{2+n}{1+n}-\frac{n+1}{n}=-\frac{1}{n\left(n+1\right)}$，显然对于$n=1$等式不成立，所以

$$a_n=\begin{cases}\frac{3}{2},n=1\\-\frac{1}{n\left(n+1\right)},n\geq 2\end{cases}$$

例 6. (2022 年全国新高考①卷)记S_n为数列$\{a_n\}$的前n项和，已知$a_1=1$，$\left\{\frac{S_n}{a_n}\right\}$是公差为$\frac{1}{3}$的等差数列，$\{a_n\}$求的通项公式。

(1) 思路分析：本题已知$\left\{\frac{S_n}{a_n}\right\}$是公差为$\frac{1}{3}$的等差数列，等差数列通项公式$a_n=a_1+\left(n-1\right)d$可以求出

$S_n=\frac{(n+2)a_n}{3}$，知道 S_n 与 a_n 的关系以后再应用 $a_n=S_n-S_{n-1}$ （$n\ge 2$）得出数列通项公式 a_n 和 a_{n-1} 的递推关系，最后数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=\frac{n(n+1)}{2}$。

(2) 试题详解：

解：(1) 当 $a_1=1$，$S_1=a_1=1$，则 $\frac{S_1}{a_1}=1$，又因为 $\left\{\frac{S_n}{a_n}\right\}$ 是公差为 $\frac{1}{3}$ 的等差数列，$\frac{S_n}{a_n}=1+\frac{1}{3}(n-1)=\frac{n+2}{3}$，整理得 $S_n=\frac{(n+2)a_n}{3}$，因而当 $n\ge 2$ 时，$a_n=\frac{(n+2)a_n}{3}-\frac{(n+1)a_{n-1}}{3}$，整理得：$(n-1)a_n=(n+1)a_{n-1}$，即 $\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{n+1}{n-1}$，$a_n=a_1\times\frac{a_2}{a_1}\times\frac{a_3}{a_2}\times\cdots\times\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\times\frac{a_n}{a_{n-1}}=1\times\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\cdots\times\frac{n}{n-2}\times\frac{n+1}{n-1}=\frac{n(n+1)}{2}$，显然对于 $n=1$ 也成立，因此可得数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n=\frac{n(n+1)}{2}$。

小结： 一般地，若已知通项 a_n 与数列前 n 项和 S_n 的关系表达式，即 $S_n=f(a_n)$，则 $a_n=S_n-S_{n-1}=f(a_n)-f(a_{n-1})$，得到只含有 a_n 与 a_{n-1} 的递推关系表达式，进而根据二者的递推关系求出数列通项 a_n [4]。

类型 4. 已知 n、通项 a_n 与 S_n 三个变量的数学关系表达式求数列通项 a_n。

例 7. (2023 年高考全国甲卷数学(理)真题)已知数列 $\{a_n\}$ 中，$a_2=1$，设 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和，$2S_n=na_n$，求 $\{a_n\}$ 的通项公式。

(1) 思路分析：本题的解题目标是求数列的通项 a_n，这类题目中同时出现三个变量，我们仍然可以根据数列前 n 项和 S_n 和通项 a_n 的关系 $S_n=f(a_n)$ 来解答这类问题，因为数列通项 $a_n=S_n-S_{n-1}$，只需将 $S_n=\frac{na_n}{2}$ 和 $S_{n-1}=\frac{(n-1)S_{n-1}}{2}$ 代入上式便可得出 a_n 和 a_{n-1} 的关系，即 $(n-2)a_n=(n-1)a_{n-1}$，最后通过列项整理和计算得出数列通项公式 $a_n=n-1$。

(2) 试题讲解：

解：因为 $2S_n=na_n$，当 $n=1$ 时，$2a_1=1a_1$，$a_1=0$；当 $n=2$ 时，$2(a_1+a_2)=2a_2$，当 $n=3$ 时，$2(1+a_3)=3a_3$，解得 $a_3=2$；当 $n\ge 2$ 时，$2S_{n-1}=(n-1)a_{n-1}$，所以 $2(S_n-S_{n-1})=na_n-(n-1)a_{n-1}=2a_n$，化简得：$(n-2)a_n=(n-1)a_{n-1}$，经整理当 $n\ge 3$ 时，$\frac{a_n}{n-1}=\frac{a_{n-1}}{n-2}=\cdots=\frac{a_3}{2}=1$，即 $a_n=n-1$。

例 8. (2022 年全国高考甲卷数学(理)试题)记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，已知 $\frac{2S_n}{n}+n=2a_n+1$，证明：$\{a_n\}$ 是等差数列。

(1) 思路分析：本题的解题目标和上面的例题类似，依然是求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式，两个例题也有相似之处，在已知条件中同样有 n、a_n 和 S_n 三个变量，同样可以利用 $S_n=f(a_n)$ 和

$a_n=S_n-S_{n-1}$ 这两个关系式便可求出数列通项的递推关系 $a_n-a_{n-1}=1$。

(2) 试题详解：

解：由已知 $\frac{2S_n}{n}+n=2a_n+1$ 可得 $2S_n+n^2=2na_n+n$ ①，当 $n\ge 2$ 时，

$2S_{n-1}+(n-1)^2=2(n-1)a_{n-1}+(n-1)$ ②，用①~②得，

$2S_n+n^2-2S_{n-1}-(n-1)^2=2na_n+n-2(n-1)a_{n-1}-(n-1)$，经整理化简得

$2a_n+2n-1=2na_n-2(n-1)a_{n-1}+1$，即 $2(n-1)a_n-2(n-1)a_{n-1}=2(n-1)$，因此 $a_n-a_{n-1}=1$，$n\ge 1$ 且 $n\in N^*$，

所以$\{a_n\}$是以 1 为公差的等差数列。

小结：本类题型中含有三个变量n、a_n和S_n，即$S_n=f(n,a_n)$，由公式$a_n=S_n-S_{n-1}$得到$a_n=S_n-S_{n-1}=f(n,a_n)-f(n-1,a_{n-1})$，通过化简(包括分解因式，去分母，移项和合并同类项等一系列过程)即可求出数列通项a_n与a_{n-1}的递推关系，再根据二者的递推关系求出解题目标a_n。

3. 结束语

笔者通过对最近几年的高考数列试题的分析，并对数列通项$\{a_n\}$的考察方式进行了总结，可以发现，在每种类型的题目中因为已知条件不同，其解决问题(即求数列通项a_n)的方法也略有不同，类型 1 是通过数列通项a_n内部某些项的值或某些项之间的关系来求数列通项a_n，后面三种类型问题虽然条件不同但因为都有数列前 n 项和S_n的存在，因此在解题过程中几乎都会用到公式$a_n=S_n-S_{n-1}$，通过这个基本公式将已知条件中的S_n消掉，问题便迎刃而解，总而言之，解题的关键是充分利用已知条件，逐步向求解目标转化。

参考文献

[1] 史燕妮，黄在堂．高中数列通项公式问题常见解题方法[J]．高中数学教与学, 2019(16): 34-37.

[2] 魏宝玲．求数列通项公式的常见题型研究[J]．中学数学教学参考(下旬), 2021(4): 41-42.

[3] 彭海波．例谈数列通项公式的求解方法[J]．中学数学教学参考, 2022(10): 35-36.

[4] 董文萍，杨军．利用重要关系$a_n=S_n-S_{n-1}$解答高考数列试题[J]．上海中学数学, 2017(12): 28-29.