Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(12), 3771-3779
Published Online December 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.1312390

形式三角矩阵环上的Gorenstein FI-内射模

赵为东

西北师范大学数学与统计学院，甘肃 兰州

收稿日期：2023年11月21日；录用日期：2023年12月22日；发布日期：2023年12月29日

摘 要

本文研究了形式三角矩阵环上的Gorenstein FI- 内射模。设$T = \begin{pmatrix} A & 0 \\ U & B \end{pmatrix}$是形式三角矩阵环，其中A，B 是环，U 是(B,A)-双模。在一定条件下证明了若$M = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}_{\varphi^M}$ 是Gorenstein FI-内射左T-模，则M_2 是Gorenstein FI-内射左B-模，$ker\widetilde{\varphi^M}$ 是Gorenstein FI- 内射左A- 模，并且$\widetilde{\varphi^M}$ 是满同态。

关键词

形式三角矩阵环，FI-内射模，Gorenstein FI-内射模

Gorenstein FI-Injective Modules Over Formal Triangular Matrix Rings

Weidong Zhao

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu

Received: Nov. 21^{st}, 2023; accepted: Dec. 22^{nd}, 2023; published: Dec. 29^{th}, 2023

文章引用: 赵为东. 形式三角矩阵环上的Gorenstein FI-内射模[J]. 理论数学, 2023, 13(12): 3771-3779.
DOI: 10.12677/pm.2023.1312390

Abstract

Let $T=\begin{pmatrix} A & 0 \\ U & B \end{pmatrix}$ be a formal triangular matrix ring, where A and B are rings and U is (B,A)-bimodule. This article proves under certain conditions that if $M=\begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}_{\varphi^M}$ is a Gorenstein FI-injective left T-modules, then M_2 is a Gorenstein FI-injective left B-modules, $ker\widetilde{\varphi^M}$ is a Gorenstein FI-injective left A-module, and $\widetilde{\varphi^M}$ is an epimorphism.

Keywords

Formal Triangular Matrix Ring, FI-Injective Module, Gorenstein FI-Injective Module

1. 引言

Gorenstein 代数起源于 20 世纪 60 年代, Auslander 和Bridge 在文献 [1]中引入了双边诺特环上有限生成模的G-维数理论. 20 世纪 90 年代, Enochs 等在文献 [2] 中引入了任意环上Gorenstein 投射模, Gorenstein 内射模和Gorenstein 平坦模并研究了其性质. 2013 年,章璞在文献 [3]中研究了在什么条件下T 是Gorenstein 代数,并对Gorenstein 投射左T-模进行了研究. 2014 年, Enochs 等在文献 [4]中在Gorenstein 正则环的条件下给出了左T-模是Gorenstein 投射模和Gorenstein 内射模的等价刻画. 2007 年,毛立新和丁南庆在文献 [5]定义了FI-内射模的概念. 2008 年,毛立新和丁南庆在文献 [6] 中研究了凝聚环上的Gorenstein FP- 内射模和Gorenstein FP-平坦模及其性质,给出了左凝聚环R 上的Gorenstein FP- 内射左R-模的等价条件. 2019 年,陈东和胡葵在文献 [7]中引入和研究了Gorenstein FI-内射模.

设 A, B 是环, U 是(B,A)-双模,则称T= $\begin{pmatrix} A & 0 \\ U & B \end{pmatrix}$ 是具有矩阵乘法和加法的形式三角矩阵环.形式三角矩阵环在环模理论中有着重要地位,在各个代数分支都有重要应用. 2020 年,毛立新在文

献 [8] 中给出了FP-内射模等价刻画. 2022 年,杨银银和张翠萍在文献 [9]中研究了Gorenstein FP-内射模.受到以上工作的启发,本文研究了形式三角矩阵环上的Gorenstein FI-内射模.

在本文中,所有的环均为有单位元的非零结合环,模均指酉模. A, B 和T 是环,我们用A-Mod, B-Mod 和T-Mod 分别表示左A-模范畴,左B-模范畴和左T-模范畴. $\mathbb{Z}$ 表示整数集.如果不特别说明T总表示形式三角矩阵环$\begin{pmatrix} A & 0 \\ {}_BU_A & B \end{pmatrix}$, 用pd(M) 表示模M 的投射维数.

回顾一下文献 [10]和 [11],设A, B是环,U 是(B, A)-双模,设

$$T = \begin{pmatrix} A & 0 \\ U & B \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ u & b \end{pmatrix} \mid a \in A, b \in B, u \in U \right\}$$

其乘法定义为$\begin{pmatrix} a & 0 \\ u & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & 0 \\ u' & b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' & 0 \\ ua' + bu' & bb' \end{pmatrix}$,其中$\begin{pmatrix} a & 0 \\ u & b \end{pmatrix}$,$\begin{pmatrix} a' & 0 \\ u' & b' \end{pmatrix} \in T$,则T 关于矩阵的加法和乘法构成一个环,并称之为形式下三角矩阵环.左T-模范畴中的对象可以用三元组$M = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}_{\varphi^m}$ 来表示,其中M_1 是左A-模, M_2是左B-模, $\widetilde{\varphi^M}$:$U \otimes_A M_1 \to M_2$ 是B-模同态.任意的两个左T- 模$M = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}_{\varphi^M}$ 和$M = \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \end{pmatrix}_{\varphi^N}$ 它们之间的态射为$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$, 其中$f_1 : M_1 \to N_1$ 是A- 模同态, $f_2 : M_2 \to N_2$ 是B- 模同态.并且满足如下交换图

$$\begin{array}{ccc} U \otimes_A M_1 & \xrightarrow{1\otimes f_1} & U \otimes_A N_1 \\ {\scriptstyle\varphi^M}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\varphi^N} \\ M_2 & \xrightarrow{f_2} & N_2 \end{array}$$

给定T-模$M = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}_{\varphi^M}$, 有$\widetilde{\varphi^M}$:$M_1 \to Hom_B(U, M_2)$, 其中$\widetilde{\varphi^M}(x)(u) = \varphi^M(u \otimes x)$,$x \in M_1$,$u \in U$.

左T-模序列$0 \to \begin{pmatrix} M_1' \\ M_2' \end{pmatrix}_{\varphi^M} \to \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}_{\varphi^M} \to \begin{pmatrix} M_1'' \\ M_2'' \end{pmatrix}_{\varphi^M} \to 0$ 正合当且仅当序列$0 \to M_1' \to M_1 \to M_1'' \to 0$ 和$0 \to M_2' \to M_2 \to M_2'' \to 0$ 正合.

回顾文献 [4] 得存在T-Mod 与A-Mod × B-Mod 之间的函子.

任取$M = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}_{\varphi^M} \in$ T-Mod, $\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$是T-Mod 上的态射, $(M_1, M_2) \in$ A-Mod × B-Mod ,(f_1, f_2) 是A-Mod × B-Mod 上的态射,则有以下函子.

(1)$\mathcal{P}$: A-Mod ×B-Mod → T-Mod, 则$\mathcal{P}(M_1, M_2) = \begin{pmatrix} M_1 \\ (U \otimes_A M_1) \oplus M_2 \end{pmatrix}$,$\mathcal{P}(f_1, f_2) = \begin{pmatrix} f_1 \\ (1 \otimes_A f_1) \oplus f_2 \end{pmatrix}$

(2)$\mathcal{H}$: A-Mod × B-Mod → T-Mod, 则$\mathcal{H}(M_1, M_2) = \begin{pmatrix} M_1 \oplus Hom_B(U, M_2) \\ M_2 \end{pmatrix}$, $\mathcal{H}(f_1, f_2)$
$= \begin{pmatrix} f_1 \oplus Hom_B(U, f_2) \\ f_2 \end{pmatrix}$
(3)$\mathcal{Q}$: T-Mod → A-Mod × B-Mod, 则$\mathcal{Q}(\begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}) = (M_1, M_2)$, $\mathcal{Q}(\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}) = (f_1, f_2)$.
$\mathcal{P}$ 是$\mathcal{Q}$的左伴随,$\mathcal{H}$ 是$\mathcal{Q}$的右伴随.

2. 预备知识

定义 2.1. [7]称左R-模M 是Gorenstein FI-内射模,如果存在内射左R-模的正合列:

$$\Xi = \cdots \longrightarrow E_1 \longrightarrow E_0 \longrightarrow E^0 \longrightarrow E^1 \longrightarrow \cdots$$

使得$M \cong ker(E^0 \to E^1)$, 且对任意FI- 内射左R-模 I, 复形$Hom_R(I, \Xi)$ 正合.
命题 2.1. [7]以下结论等价:
(1)M 是Gorenstein FI-内射模;
(2)M满足以下条件:
(a)对任意的FI-内射模 I, 及任意的正整数$i \geq 1$, 有$Ext^i_R(I, M) = 0$;
(b)存在M的左内射分解:$\cdots \longrightarrow E_1 \longrightarrow E_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$, 且对任意FI- 内射模 I, $Hom_R(I, -)$使上述正合列保持正合.
引理 2.1. [4]左T- 模$M = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}_{\varphi^M}$ 是内射模当且仅当M_2 是内射左$B-$模,$ker\widetilde{\varphi^M}$ 是内射左A-模,且$\widetilde{\varphi^M}$ 是满同态.
引理 2.2. [4] 设R 是环,若$_RD$具有有限的投射维数,

$$\mathcal{E} : \cdots \longrightarrow E_1 \longrightarrow E_0 \longrightarrow E^0 \longrightarrow E^1 \longrightarrow \cdots$$

是内射左R- 模的正合列,则复形$Hom_R(D, \mathcal{E})$ 正合.
引理 2.3. [12] 设R, S 是环,若M 是内射左$S-$ 模, B 为(S,R)-双模,且B 为平坦右R-模,则$Hom_S(B, M)$ 是内射左R-模.

3. 形式三角矩阵环上的Gorenstein FI-内射模

命题 3.1. 设A,B 是环,所有FI-内射左A-模都具有有限的投射维数, U_A是平坦模, $_BU$ 具有有限的投射维数.若M 为Gorenstein FI- 内射左B-模,则$Hom_B(U, M)$ 是Gorenstein FI-内射左A- 模.

证明 因为M 为Gorenstein FI-内射左B-模,所以存在内射左B-模的正合列:

$$\mathcal{R} : \cdots \longrightarrow E_1 \longrightarrow E_0 \longrightarrow E_{-1} \xrightarrow{\delta^{-1}} E_{-2} \longrightarrow \cdots$$

使得$M\cong ker(\delta^{-1})$, 并且对任意FI- 内射左B- 模 I, 序列$Hom_B(I,\mathcal{R})$ 正合.因为 $pd(_BU)$ $<\infty$, 由引理2.2 知序列$Hom_B(U,\mathcal{R})$ 是左A- 模的正合列.因为 E_i 是内射左B- 模, U 为(B,A)-模,所以由引理2.3知$Hom_B(U,E_i)(i\in\mathbb{Z})$ 为内射左A- 模,所以序列$Hom_B(U,\mathcal{R})$ 是内射左A- 模的正合列.任取FI- 内射左A-模L, 则$pd(_AL)<\infty$.对L 的投射维数进行归纳,如果$pd(_AL)=0$,设$n>0(n\in\mathbb{Z})$, 则$Hom_A(L,Hom_B(U,\mathcal{R}))$ 是正合列.假设对任意投射维数为n 的FI-内射左A-模都成立.当$pd(_AL)=n+1$ 时,则存在一个左A-模的正合列

$$0\to E^{''}\to E^{'}\to L\to 0.$$

其中$E^{'}$ 是投射的,$E^{''}$ 的投射维数为n. 注意到序列$Hom_B(U,\mathcal{R})$ 的每一项都是内射左A- 模,于是复形的序列

$$0\to Hom_A(L,Hom_B(U,\mathcal{R}))\to Hom_A(E^{'},Hom_B(U,\mathcal{R}))\to Hom_A(E^{''},Hom_B(U,\mathcal{R}))\to 0.$$

正合.因为$Hom_A(E^{''},Hom_B(U,\mathcal{R}))$与$Hom_A(E^{'},Hom_B(U,\mathcal{R}))$正合.所以由长正列引理知序列$Hom_A(L,Hom_B(U,\mathcal{R}))$ 正合.并且

$$Hom_B(U,M)\cong Hom_B(U,Ker(\delta^{-1}))\cong ker(\delta_*^{-1})$$

其中$\delta_*^{-1}:Hom_B(U,E_{-1})\to Hom_B(U,E_{-2})$, 故$Hom_B(U,M)$ 是Gorenstein FI-内射左A- 模.

定理 3.1. 设环T,A,B 所有的FI-内射模都具有有限的投射维数, $_BU$ 具有有限的投射维数,则以下结论成立

(1)若$M=\begin{pmatrix}M_1\\M_2\end{pmatrix}_{\varphi^M}$ 是Gorenstein FI-内射左T-模,则M_2是Gorenstein FI- 内射左B- 模, $ker\widetilde{\varphi^M}$是Gorenstein FI-内射左A- 模,并且$\widetilde{\varphi^M}$ 是满同态.

(2) 若M_2 是Gorenstein FI-内射左B-模,则$\begin{pmatrix}Hom_B(U,M_2)\\M_2\end{pmatrix}_{\sigma^M}$ 是Gorenstein FI-内射左T-模.

(3) 若$ker(\widetilde{\varphi^M})$ 是Gorenstein FI- 内射左A-模,则$\begin{pmatrix}ker(\widetilde{\varphi^M})\\0\end{pmatrix}$ 是Gorenstein FI-内射左T-模.

证明 (1)因为$M=\begin{pmatrix}M_1\\M_2\end{pmatrix}_{\varphi^M}$ 是Gorenstein FI-内射左T-模,所以存在内射左T-模的正合列:

$$\mathcal{I}:\cdots\longrightarrow\begin{pmatrix}I_1^{-1}\\I_2^{-1}\end{pmatrix}_{\varphi^{-1}}\longrightarrow\begin{pmatrix}I_1^{0}\\I_2^{0}\end{pmatrix}_{\varphi^{0}}\xrightarrow{\psi^0}\begin{pmatrix}I_1^{1}\\I_2^{1}\end{pmatrix}_{\varphi^{1}}\longrightarrow\begin{pmatrix}I_1^{2}\\I_2^{2}\end{pmatrix}_{\varphi^{2}}\longrightarrow\cdots$$

使得$M\cong ker(\psi^0)$, 并且对任意FI-内射左T-模$D=\begin{pmatrix}D_1\\D_2\end{pmatrix}_{\varphi^D}$, 序列$Hom_T(D,\mathcal{I})$ 正合.由引理2.1知$I_2^i(i\in\mathbb{Z})$是内射左B-模,从而有内射左B- 模上的正合列:

$$\mathcal{I}_2 : \cdots \longrightarrow I_2^{-1} \longrightarrow I_2^0 \xrightarrow{d_2^0} I_2^1 \longrightarrow I_2^2 \longrightarrow \cdots$$

并且$M_2 \cong ker(d_2^0)$, 任取FI-内射左B- 模 C, 因为$pd(C) < \infty$, 所以由引理2.2知序列$Hom_B(C, \mathcal{I}_2)$ 正合.故M_2 是Gorenstein FI-内射左B- 模.

设$\lambda_1 : I_1^{-1} \to M_1, \lambda_2 : I_2^{-1} \to M_2$,则$\lambda_1, \lambda_2$ 是满同态,因为$_BU$ 具有有限的投射维数,所以由引理2.2知$Hom_B(U, \mathcal{I}_2)$ 正合. $\lambda_{2*} : Hom_B(U, I_2^0) \to Hom_B(U, M_2)$ 是满同态.则考虑交换图

$$\begin{array}{ccc} I_1^{-1} & \xrightarrow{\lambda_1} & M_1 \\ \widetilde{\varphi^{-1}}\downarrow & & \downarrow\widetilde{\varphi^M} \\ Hom_B(U, I_2^{-1}) & \xrightarrow{\lambda_{2*}} & Hom_B(U, M_2) \end{array}$$

因为$\begin{pmatrix} I_1^{-1} \\ I_2^{-1} \end{pmatrix}$ 内射左T-模,所以由引理2.1知$\widetilde{\varphi^{-1}}$ 是满同态. 进而$\lambda_{2*}\widetilde{\varphi^{-1}} = \widetilde{\varphi^M}\lambda_1$ 是满同态,从而$\widetilde{\varphi^M}$ 是满同态.

存在$\partial_1^i ker(\widetilde{\varphi^i}) \to ker(\widetilde{\varphi^{i+1}})(i \in \mathbb{Z})$, 使得有如下行正合的交换图

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathsf{E} & \longrightarrow & \mathcal{I}_1 & \longrightarrow & Hom_B(U, \mathcal{I}_2) & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \| & & \| & & \\ & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & ker(\widetilde{\varphi^0}) & \longrightarrow & I_1^0 & \xrightarrow{\widetilde{\varphi^0}} & Hom_B(U, I_2^0) & \longrightarrow & 0 \\ & & \partial_1^0\downarrow & & d_1^0\downarrow & & d_{2*}^0\downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & ker(\widetilde{\varphi^1}) & \longrightarrow & I_1^1 & \xrightarrow{\widetilde{\varphi^1}} & Hom_B(U, I_2^1) & \longrightarrow & 0 \\ & & \partial_1^1\downarrow & & d_1^1\downarrow & & d_{2*}^1\downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & ker(\widetilde{\varphi^2}) & \longrightarrow & I_1^2 & \xrightarrow{\widetilde{\varphi^2}} & Hom_B(U, I_2^2) & \longrightarrow & 0 \\ & & \partial_1^2\downarrow & & d_1^2\downarrow & & d_{2*}^2\downarrow & & \\ & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \end{array}$$

因为$Hom_B(U, \mathcal{I}_2)$, $\mathcal{I}_1$ 是正和列,所以E 也是正合列.由引理2.1 知$ker(\widetilde{\varphi^i})$ 是内射左A- 模.故E 是内射左A- 模的正合列.

存在$\partial_1^M : ker(\widetilde{\varphi^M}) \to ker(\widetilde{\varphi^1})$ 则有如下行正合的交换图

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & ker(\widetilde{\varphi^M}) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\partial_1^M"'] & M_1 \arrow[r, "\widetilde{\varphi^M}"] \arrow[d, "\gamma_1"'] & Hom_B(U, M_2) \arrow[r] \arrow[d, "\gamma_{2*}"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & ker(\widetilde{\varphi^0}) \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\partial_1^0"'] & I_1^0 \arrow[r, "\widetilde{\varphi^0}"] \arrow[d, "d_1^0"'] & Hom_B(U, I_2^0) \arrow[r] \arrow[d, "d_{2*}^0"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & ker(\widetilde{\varphi^1}) \arrow[r] \arrow[d, "\partial_1^1"'] & I_1^1 \arrow[r, "\widetilde{\varphi^1}"] \arrow[d, "d_1^1"'] & Hom_B(U, I_2^1) \arrow[r] \arrow[d, "d_{2*}^1"'] & 0 \\
 & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

设$\gamma_1 : M_1 \to I_1^0, \gamma_2 : M_2 \to I_2^0$ 是单同态.由于$\beta\partial_1^M = \gamma_1\alpha$ 是单同态,所以∂_1^M 是单同态.进而$ker(\widetilde{\varphi^M}) \cong ker(\partial_1^0)$, 任取FI-内射左A- 模P, 因为$pd(P) < \infty$ 所以由引理2.2知序列$Hom_B(P, \mathsf{E})$ 正合.故$ker(\widetilde{\varphi^M})$ 是Gorenstein FI-内射左A- 模.

(2)因为M_2 是Gorenstein FI-内射左B-模,所以存在内射左B-模的正合列

$$\mathcal{I}_1 : \cdots \longrightarrow I^{-1} \longrightarrow I^0 \xrightarrow{d^0} I^1 \longrightarrow I^2 \longrightarrow \cdots$$

使得$M_2 \cong ker(d^0)$, 并且对任意FI-内射左B-模N, 序列$Hom_B(N, \mathcal{I}_1)$ 正合.又因为$pd({}_BU) < \infty$ 所以由引理2.2知序列$Hom_B(U, \mathcal{I}_1)$ 正合,故存在左T-模的正合列

$$\mathcal{F} : \cdots \to \begin{pmatrix} Hom_B(U, I^{-1}) \\ I^{-1} \end{pmatrix}_{\sigma^{-1}} \to \begin{pmatrix} Hom_B(U, I^0) \\ I^0 \end{pmatrix}_{\sigma^0} \xrightarrow{\tau^0} \begin{pmatrix} Hom_B(U, I^1) \\ I^1 \end{pmatrix}_{\sigma^1} \to \cdots$$

并且$\begin{pmatrix} Hom_B(U, M_2) \\ M_2 \end{pmatrix}_{\sigma^M} \cong ker(\tau^0)$.由引理2.1知$\begin{pmatrix} Hom_B(U, I^i) \\ I^i \end{pmatrix}$ $(i \in \mathbb{Z})$ 是内射左T-模.则序列$\mathcal{F}$ 是内射左T- 模的正合列.任取FI- 内射左T-模$H = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}_{\sigma^H}$.因为$pd(H) < \infty$, 所以由引理2.2知序列$Hom_T(H, \mathcal{F})$ 正合.故$\begin{pmatrix} Hom_B(U, M_2) \\ M_2 \end{pmatrix}_{\sigma^M}$ 是Gorenstein FI-内射左T-模.

(3) 因为$ker(\widetilde{\varphi^M})$ 是Gorenstein FI-内射左A-模,所以存在内射左A- 模的正合列

$$\mathcal{S} : \cdots \longrightarrow E^{-1} \longrightarrow E^0 \xrightarrow{\eta^0} E^1 \longrightarrow E^2 \longrightarrow \cdots$$

使得$ker(\widetilde{\varphi^M}) \cong ker(\eta^0)$, 并且对任意的FI-内射左A- 模L, 序列$Hom_A(L, S)$ 正合.存在左T-模的正合列

$$\mathcal{K} : \cdots \to \begin{pmatrix} E^{-1} \\ 0 \end{pmatrix}_{\zeta^{-1}} \to \begin{pmatrix} E^0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\zeta^0} \xrightarrow{h^0} \begin{pmatrix} E^1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\zeta^1} \to \begin{pmatrix} E^2 \\ 0 \end{pmatrix}_{\zeta^2} \to \cdots$$

并且$\begin{pmatrix} ker(\widetilde{\varphi^M}) \\ 0 \end{pmatrix} \cong ker(h^0)$. 由引理2.1知$\begin{pmatrix} K^i \\ 0 \end{pmatrix}$ $(i \in \mathbb{Z})$ 是内射左T-模,故$\mathcal{K}$ 是内射左T- 模的正合列.任取FI-内射左T-模$J = \begin{pmatrix} j_1 \\ j_2 \end{pmatrix}_{\zeta^J}$, 因为$pd(J) < \infty$, 所以由引理2.2知序列$Hom_T(J, \mathsf{K})$ 正合.故$\begin{pmatrix} ker(\widetilde{\varphi^M}) \\ 0 \end{pmatrix}$ 是Gorenstein FI-内射左T-模.

推论 3.1. 设R 是环.环R 上所有的FI-内射模都具有有限的投射维数, ${}_RU$ 具有有限的投射维数, $T(R) = \begin{pmatrix} R & 0 \\ R & R \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}_{\varphi^M}$. 若M 是Gorenstein FI-内射左T(R)-模,则M_2, $ker\widetilde{\varphi^M}$是Gorenstein FI-内射左R- 模,并且$\widetilde{\varphi^M}$ 是满同态.

证明 由定理3.1易得.

命题 3.2. 设T, A, B 上所有FI-内射模都具有有限的投射维数, ${}_BU$ 具有有限的投射维数.若$M = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}_{\theta^M}$ Gorenstein FI-内射左T-模,$Hom_B(U, M_2)$ 是FI- 内射左A- 模,则存在Gorenstein FI-内射左A-模E 和Gorenstein FI- 内射左B-模Q, 使得$M \cong \mathcal{H}(E, Q)$.

证明. 设$M = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}_{\theta^M}$ Gorenstein FI-内射左T-模,所以由定理3.1知$\widetilde{\theta^M}$ 是满同态, $ker(\widetilde{\theta^M})$ 是Gorenstein FI- 内射左A-模, M_2是Gorenstein FI-内射左B-模.故存在左A-模正合列

$$0 \to ker(\widetilde{\theta^M}) \to M_1 \to Hom_B(U, M_2) \to 0$$

因为$Hom_B(U, M_2)$ 是FI-内射左A-模,所以由命题2.1 知$Ext^1_A(Hom_B(U, M_2), ker\ (\widetilde{\theta^M}))$ =0, 从而上述正合列可裂,即$M_1 \cong ker(\widetilde{\theta^M}) \oplus Hom_B(U, M_2)$. 取$E = ker(\widetilde{\theta^M})$, $Q = M_2$. 则有

$$M = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} ker(\widetilde{\theta^M}) \oplus Hom_B(U, M_2) \\ M_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E \oplus Hom_B(U, Q) \\ Q \end{pmatrix} = \mathcal{H}(E, Q)$$

所以有$M \cong \mathcal{H}(E, Q)$.

参考文献

[1] Auslander, M. and Brideg, M. (1969) Stable Module Theory. In: *Memoirs of the American Mathematical Society*, Vol. 94, American Mathematical Society, Providence, RI. https://doi.org/10.1090/memo/0094

[2] Enochs, E.E. and Jenda, O.M.G. (1995) Gorenstein Injective and Projective Modules. *Mathematische Zeitschrift*, **220**, 611-633. https://doi.org/10.1515/9783110215212

[3] Zhang, P. (2013) Gorenstein-Projective Modules and Symmetric Recollements. *Journal of Algebra*, **388**, 65-80. https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2013.05.008

[4] Enochs, E.E., Cortés-Izurdiaga, M. and Torrecillas, B. (2014) Gorenstein Conditions over Triangular Matrix Rings. *Journal of Pure and Applied Algebra*, **218**, 1544-1554. https://doi.org/10.1016/j.jpaa.2013.12.006

[5] Mao, L. and Ding, N. (2007) FI-Injective and FI-Flat Modules. *Journal of Algebra*, **309**, 367-385. https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2006.10.019

[6] Mao, L., Ding, N. and Zelmanov, E. (2008) Gorenstein FP-Injective and Gorenstein Flat Modules. *Journal of Algebra and Its Applications*, **7**, 491-506.

[7] 陈东, 胡葵. 关于Gorenstein FI-内射模[J]. 西北师范大学学报(自然科学版), 2019, 55(3): 9-13. https://doi.org/10.16783/j.cnki.nwnuz.2019.03.03

[8] Mao, L.X. (2020) Duality Pairs and FP-Injective Modules over Formal Triangular Matrix Rings. *Communications in Algebra*, **48**, 5296-5310. https://doi.org/10.1080/00927872.2020.1786837

[9] 杨银银, 张翠萍. 形式三角矩阵环上的Gorenstein FP-内射模[J]. 山东大学学报(理学版), 2022, 57(20): 38-44.

[10] Haghany, A. and Varadarajan, K. (1999) Study of Formal Triangular Matrix Rings. *Communications in Algebra*, **27**, 5507-5525. https://doi.org/10.1080/00927879908826770

[11] Haghany, A. and Varadarajan, K. (2000) Study of Modules over Formal Triangular Matrix Rings. *Journal of Pure and Applied Algebra*, **147**, 41-58. https://doi.org/10.1016/S0022-4049(98)00129-7

[12] 佟文廷. 同调代数引论[M]. 北京: 高等教育出版社, 1998.