Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(12), 3371-3379
Published Online December 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.1312350

闭环动态古诺垄断博弈的γ-核

刘佳伟，赵　昕，郑志杰，王　磊*

青岛大学，数学与统计学院，山东 青岛

收稿日期：2023年11月5日；录用日期：2023年12月6日；发布日期：2023年12月13日

摘　要

本文研究具有闭环(无记忆)信息的效用可转移动态古诺垄断博弈的γ-核心解。基于合作微分博弈框架，运用Pontryagin极大值原理，获得了闭环信息的γ-特征函数，并进一步证明γ-核非空。数值例子表明，与开环信息相比，闭环信息不能带来真子联盟γ-特征函数值的一致严格变大或变小；但闭环信息对γ-核存在性的影响是鲁棒的。

关键词

微分博弈，古诺垄断，闭环信息，特征函数，γ-核

The γ-Core of Dynamic Cournot Oligopoly Games with Closed-Loop Information

Jiawei Liu, Xin Zhao, Zhijie Zheng, Lei Wang*

School of Mathematics and Statistics, Qingdao University, Qingdao Shandong

Received: Nov. 5th, 2023; accepted: Dec. 6th, 2023; published: Dec. 13th, 2023

Abstract

This paper investigates the γ-core for the transferable-utility dynamic Cournot oligopoly game with closed-loop (memoryless) information. Based on the cooperative differential game and the Pontryagin maximum principle, we obtain the γ-characteristic function and further prove the non-emptiness of γ-core. Numerical example shows that compared to the open-loop information, the closed-loop information cannot bring the γ-characteristic function values of any proper coalition uniformly increasing or decreasing. But the impact of closed-loop information is robust for the non-emptiness of γ-core.

*通讯作者。

文章引用: 刘佳伟, 赵昕, 郑志杰, 王磊. 闭环动态古诺垄断博弈的 γ-核[J]. 理论数学, 2023, 13(12): 3371-3379.
DOI: 10.12677/pm.2023.1312350

Keywords

Differential Game, Cournot Oligopoly, Closed-Loop Information, Characteristic Function, γ-Core

1. 引言

核心(Core)是联盟型(特征函数型)合作博弈的重要解概念。这一术语来自 Shapley [1]和 Gillies [2]的工作。实际上，这一概念在 von Neumann，Morgenstern [3]对三人市场博弈的分析中已经显现。核心在经济学中的根源可以追溯到 Edgeworth 在 1881 年的工作[4]。直观地讲，核心是博弈中没有联盟能够改进的结果集。对于存在核心的博弈，往往表明竞争将如何展开。然而，并不是每个博弈都存在核心。

作为研究效用不可转移(NTU)合作博弈的有效工具，Aumann [5]引入了 α-核，β-核和强纳什均衡的概念，统称为联盟均衡。这些概念的不同之处在于联盟外局中人的组织方式以及对偏离联盟的反应方式。如果与外部局中人联盟所采取的行动无关，没有联盟能够通过采取其他行动保证每个成员获得更高的收益，则该策略组合属于 α-核；如果由于外部局中人联盟拥有的阻止策略，没有联盟能够通过采取其他行动保证每个成员获得更高的收益，那么该策略组合属于 β-核。如果外部局中人个体坚持其均衡策略，没有联盟能够通过采取其他行动保证每个成员获得更高的收益，那么该策略组合属于强纳什均衡。Aumann [5]在一类特殊构造的重复博弈(超博弈)中，证明了 β-核对应于超博弈的强纳什均衡。Scarf [6]在具有连续拟凹支付函数的规范型博弈中证明了不可转移效用 α-核的非空性；Shapley [7]运用 KKMS 定理提供了该定理的另一种证明。Hart，Kurz [8]为研究联盟结构的内生稳定性提出了 γ-核的概念。假设在博弈中当一个新的联盟形成时，外部局中人基于个体理性做出最优反应；若没有联盟能够通过采取其他行动保证每个成员获得更高的收益，那么该策略组合属于 γ-核。

Shapley [9]考虑了效用可转移(TU)多人联盟博弈的平衡集与核心非空性之间的关系。平衡定理实际上由一组线性不等式给出，刻画了多人联盟博弈非空核的存在性。当特征函数具有超加性时，最小平衡集决定核心的非空性。基于平衡性方法，Zhao [10]通过弱可分性假设，将 Scarf [6]的效用不可转移 α-核的非空性扩展到效用可转移 α-核的非空性；Zhao [11]通过强可分性假设，将效用不可转移 β-核的非空性扩展到效用可转移 β-核的非空性。Chander，Tulkens [12]在一类具有环境外部性的污染控制博弈中证明了 γ-核的存在性。Zhao [13]在 TU 博弈的框架下综述了各类核心的概念，其它如 δ-核(Hart，Kurz [8])，e-核(Yong [14])，j-核(Lekeas [15])，s-核(Currarini, Marini [16])。

尽管在静态博弈理论中，核心的存在性问题已经得到充分的研究，但对于动态博弈核心的存在性问题，始终没有得到解决。动态博弈是博弈理论中更为复杂但同时也是更具活力的研究领域，其中相互竞争的各方在关于时间离散或连续的进程中采取决策，并附加信息结构，不确定性以及预先协商的可能性等假设(Basar, Olsder [17], Dockner *et al.* [18]. Haurie *et al.* [19])。

作为对动态博弈核心解存在性问题的探索，Wang，Zhao [20]针对一类具有开环信息的 TU 动态古诺垄断博弈进行了研究，将其表述为具有线性需求和二次成本的多人微分博弈，其中所有企业具有共同的生产约束。此类博弈的重要特征是价格粘性，这与许多现实的市场相关：企业可以控制其产出水平，但市场价格需要时间调整到需求函数所指示的水平。产业组织中具有粘性价格的古诺垄断的经典文献，可

以追溯到 Roos 在 1925 年的工作[21]。Fershtman，Kamien [22]分析了具有粘性价格的双寡头博弈。对非合作的多寡头博弈，可参见 Dockner [23]，Cellini，Lambertini [24]，Hoof [25]。在合作微分博弈的框架下，Wang，Zhao [20]分别获得多人动态古诺垄断的 α-，β-和 γ-特征函数，刻画了对应核心的非空性。通过对各类特征函数值的比较研究发现，动态和静态情形特征函数值的大小关系是不同的，从而核心的包含关系也就不同。

然而，Wang，Zhao [20]的工作尚未涉及信息结构对核心解的影响。在微分博弈中，通常有三类策略(信息)空间得到考察，即开环，闭环(无记忆)和反馈策略空间，参见 Reinganum，Stokey [26]，Mehlmann [27]。若局中人只能观察到博弈的初始状态，他们的行动只是时间的函数，此即开环策略；若局中人的行动是博弈的初始和当前状态以及时间的函数，此即闭环(无记忆)策略；在反馈策略下，局中人的行动是时间和当前状态的函数。与上述策略空间相对应的纳什均衡有着重要的差异。既然反馈策略与博弈的初始状态无关，反馈纳什均衡是子博弈完美的(Selten [28])；开环和闭环纳什均衡通常不具备子博弈完美性。Esfahani [29]在具有粘性价格的动态古诺垄断博弈中考察了不同信息结构对卡特尔盈利能力的影响，发现闭环信息的均衡相对开环信息的均衡，使卡特尔盈利的内部企业的比例更低。

信息结构对联盟型博弈特征函数的计算有着重要的影响。开环策略假设企业采取路径策略，不必对当前状态和外部局中人的策略作出反应；与开环策略不同，对闭环策略特征函数的计算，在推导伴随方程的过程中需要考虑联盟外部局中人的策略对当前状态的依赖性。尽管如此，按照 Wang，Zhao [20]的产量约束假设，当计算 α-，β-特征函数时，外部局中人的策略固定在最大化产量上，因此闭环(无记忆)信息的 α-，β-特征函数与开环情形没有差异，核心解的存在性结果是一致的。然而，γ-特征函数的计算是基于部分协议均衡，预期闭环信息将带来非平凡的影响。

基于上述考虑，本文研究具有闭环信息的 TU 动态古诺垄断博弈的 γ-核心解。在合作微分博弈的框架下，运用 Pontryagin 极大值原理，我们获得了闭环信息的 γ-特征函数。数值例子显示，与开环信息相比，闭环信息不能带来真子联盟 γ-特征函数值的一致严格变大或变小。在此基础上，运用 Moulin [30]的结果，进一步证明 γ-核非空。表明闭环信息对 γ-核存在性的影响是鲁棒的，即与开环信息相比，并未导致 γ-核的非空性结果改变。

论文的结构为：第二节引入基本模型；第三节计算闭环信息的 γ-特征函数，并给出数值例子；第四节证明闭环信息 γ-核的存在性；第五节小结。

2. 模型

考虑由生产同质产品的 n 家企业构成的古诺垄断市场，设企业 i 的产量为 $q_i(t)$，$i \in N = \{1,2,3,\cdots,n\}$，$t \in [0,+\infty)$，成本函数为：

$$C(q_i(t)) = cq_i(t) + \frac{1}{2}q_i^2(t), \tag{1}$$

其中 $c > 0$ 表示企业的生产成本参数。

假设产品的价格动态由下述微分方程描述：

$$\dot{p}(t) = \frac{\mathrm{d}p(t)}{\mathrm{d}t} = s\left[a - \sum_{i=1}^{n} q_i(t) - p(t)\right], p(0) = p_0, \tag{2}$$

其中 $a > c$ 表示市场规模，$0 < s < \infty$ 表示价格调整的速度参数，p_0 为产品的初始市场价格。

上述的价格动态意味着当前的市场价格 $p(t)$ 不会立即调整到由静态逆需求所指示的价格水平，即价格具有“粘性”。

假设企业 i 寻求最大化自己的目标函数：

$$\Pi_i=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-rt}\left[p(t)q_i(t)-C\left(q_i(t)\right)\right]\mathrm{d}t, \tag{3}$$

其中 $r>0$ 表示贴现率。

因此，(1)~(3)定义了一个具有线性二次结构的 n-人非零和微分博弈。在微分博弈的分析中，通常有三类策略空间得到考察，即开环，闭环(无记忆)和反馈策略空间。

定义 1. 1) 局中人 $i\in N$ 的开环策略空间为：

$Q_i^{ol}=\left\{q_i(t,p_0)\,|\,q_i(t,p_0)\text{ 为时间 } t \text{ 的逐段连续函数，} t\in[0,+\infty)\right\}.$

2) 局中人 $i\in N$ 的闭环(无记忆)策略空间为：

$Q_i^{cl}=\left\{q_i\left(t,p(t),p_0\right)\,|\,q_i\left(t,p(t),p_0\right)\text{ 为时间 } t \text{ 的逐段连续函数且对可积的 } m(t)\ge 0 \text{ 满足}\right.$

$$\left.\left|q_i(t,p)-q_i(t,p')\right|\le m(t)\left|p-p'\right|\right\}.$$

3) 局中人 $i\in N$ 的反馈策略空间为：

$Q_i^{f}=\left\{q_i\left(t,p(t)\right)\,|\,q_i\left(t,p(t)\right)\text{ 为时间 } t \text{ 的逐段连续函数且对可积的 } m(t)\ge 0 \text{ 满足}\right.$

$$\left.\left|q_i(t,p)-q_i(t,p')\right|\le m(t)\left|p-p'\right|\right\}.$$

若企业坚持个体理性，采取使自身收益最大化的策略，垄断问题通过非合作博弈方法分析，纳什均衡成为此类博弈的重要解概念。

定义 2. 策略组合 $\left(q_1^*,\cdots,q_n^*\right)$ 构成由(1)~(3)定义微分博弈的纳什均衡当且仅当对相应策略空间上的所有容许策略 q_i 满足：

$$\Pi_i\left(q_1^*,\cdots,q_n^*\right)\ge\Pi_i\left(q_1^*,\cdots,q_{i-1}^*,q_i,q_{i+1}^*\cdots,q_n^*\right),i\in N. \tag{4}$$

若企业进行产业合作，通过取得帕累托有效的结果改进自身收益，卡特尔成员所面临的问题则是协议的稳定性。因此，应用合作博弈方法分析古诺垄断问题就非常有必要。

定义 3. 一个联盟型(特征函数型)TU 博弈 $\{N,V(\cdot)\}$ 为集函数 $V(K):2^n\to R,K\subseteq N$ 为局中人的集合，且 $V(\varnothing)=0$。

定义 4. 给定联盟型博弈 $\{N,V(\cdot)\}$，支付向量 $\theta=(\theta_1,\cdots,\theta_n)\in R_+^n$ 称为有效的，若 $\sum_{i=1}^n\theta_i=V(N)$，$\theta_i$ 表示局中人 i 的支付，$i\in N$；支付向量 θ 称为对联盟 $K\subseteq N$ 是理性的(或不被联盟 K 打破的)，若 $\sum_{i\in K}\theta_i\ge V(K)$；支付向量 θ 称为核心向量(或在核心 $C(N,V)$ 里)，若它对所有 $K\subseteq N$ 是理性的，即

$$C(N,V)=\left\{\theta=(\theta_1,\cdots,\theta_n)\left|\sum_{i\in K}\theta_i\ge V(K),\forall K\subset N,\sum_{i\in N}\theta_i=V(N)\right.\right\}. \tag{5}$$

要得到合作博弈 $\{N,V(\cdot)\}$ 的核心解，需要针对所有 $K\subseteq N$ 确定 $V(K)$，即计算 2^n-1 个值。同时，特征函数的定义不是标准的，计算的复杂程度取决于所研究的问题。局中人的不同信念(外部性)导致特征函数的不同定义和算法[13]。本文重点关注闭环信息的 γ-特征函数，记作 $V_{cl}^{\gamma}(K)$，通过求解联盟 K (不妨设 $|K|=k$)和其他局中人 $j_{k+1},j_{k+2},\cdots,j_n$ 之间的非合作博弈的纳什均衡得到。由 γ-特征函数 $V_{cl}^{\gamma}(\cdot)$ 决定的核心称为 γ-核，记作 $C\left(N,V_{cl}^{\gamma}(\cdot)\right)$。

为便于比较，我们列出 Wang，Zhao [20]在上述具有开环信息的动态古诺垄断博弈中关于 γ-特征函数的下述引理。

引理 1 对任意联盟 $K\subseteq N$，$|K|=k$，由(1)~(3)所定义的具有开环信息的微分博弈的 γ-特征函数为

$$V_{op}^{\gamma}(K)=\frac{k(r+2s)^2(r+s)(r+s+2ks)(a-c)^2}{2rh^2}, \tag{6}$$

且属于联盟 K 和联盟外局中人的平稳开环策略和对应的市场价格分别为

$$q_i^{\gamma}(K)=\frac{(r+2s)(r+s)(a-c)}{h}, i\in K, \tag{7}$$

$$q_j^{\gamma}(K)=\frac{(r+s+ks)(r+s)(a-c)}{h}, j\in N\setminus K, \tag{8}$$

$$p^{\gamma}(K)=\frac{(r+2s)(r+s+ks)(a-c)}{h}+c, \tag{9}$$

其中 $h=(r+s+kr+2ks)(r+2s)+(n-k)(r+s+ks)(r+s)$。

3. γ-特征函数

本节我们计算由(1)~(3)定义的微分博弈在闭环(无记忆)信息结构下的 γ-特征函数，并通过数值例子与开环信息的情形进行比较。

引理 3.1 对任意联盟 $K\subseteq N$，$|K|=k$，由(1)~(3)所定义的具有闭环(无记忆)信息的微分博弈的 γ-特征函数为

$$V_{cl}^{\gamma}(K)=\frac{k\left[r+(n-k+1)s\right]\left[r+(n+k+1)s\right](a-c)^2}{2rl^2}, \tag{10}$$

且属于联盟 K 和联盟外局中人的闭环平稳最优产出和市场价格分别为

$$\bar{q}_i^{\gamma}(K)=\frac{\left[r+(n-k+1)s\right](a-c)}{l}, i\in K, \tag{11}$$

$$\bar{q}_j^{\gamma}(K)=\frac{(r+ns)(a-c)}{l}, j\in N\setminus K, \tag{12}$$

$$\bar{p}^{\gamma}(K)=\frac{\left[r+(n+1)s\right]a+\left[nr+\left(n^2-k^2+k\right)s\right]c}{l}, \tag{13}$$

其中 $l=(n+1)r+\left(n^2-k^2+n+k+1\right)s$。

证明 对于所有的 $K\subseteq N$，$|K|=k$，要计算闭环信息的 γ-特征函数，需要求解以下问题的纳什均衡：

$$\max_{q_i(t),i\in K}\sum_{i\in K}\Pi_i=\max_{q_i(t),i\in K}\sum_{i\in K}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-rt}\left[p(t)q_i(t)-C(q_i(t))\right]\mathrm{d}t, \tag{14}$$

$$\max_{q_j(t),j\in N\setminus K}\Pi_j=\max_{q_j(t),j\in N\setminus K}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-rt}\left[p(t)q_j(t)-C(q_j(t))\right]\mathrm{d}t, \tag{15}$$

s.t.

$$\dot{p}(t)=s\left[a-\sum_{i=1}^{n}q_i(t)-p(t)\right], p(0)=p_0. \tag{16}$$

省略时间参数并假设前 k 个局中人组成联盟 K，分别写出联盟 K 和其他局中人 $j\in N\setminus K$ 的哈密顿函数：

$$H_K(q_1,\cdots,q_n,p,\lambda_K)=\sum_{i\in K}\left(pq_i-cq_i-\frac{1}{2}q_i^2\right)+\lambda_K\cdot s\left(a-\sum_{i=1}^{k}q_i-\sum_{j=k+1}^{n}q_j-p\right), \tag{17}$$

$$H_j(q_1,\cdots,q_n,p,\lambda_j)=\left(pq_j-cq_j-\frac{1}{2}q_j^2\right)+\lambda_j\cdot s\left(a-\sum_{i=1}^{k}q_i-\sum_{j=k+1}^{n}q_j-p\right), j\in N\setminus K, \tag{18}$$

其中 λ_K 和 λ_j 是伴随变量。

DOI: 10.12677/pm.2023.1312350

假设内点解存在，根据 Pontryagin 极大值原理，闭环平稳最优产出和对应的市场价格满足必要性条件：

$$\dot{p} = s\left(a - \sum_{i=1}^{k} q_i - \sum_{j=k+1}^{n} q_j - p\right), p(0) = p_0, \tag{19}$$

$$\dot{\lambda}_K = r\lambda_K - \frac{\partial H_K}{\partial p} - \sum_{j=k+1}^{n} \frac{\partial H_K}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial q_j}{\partial p} = \left[r + (n-k+1)s\right]\lambda_K - \sum_{i=1}^{k} q_i, \tag{20}$$

$$\dot{\lambda}_j = r\lambda_j - \frac{\partial H_j}{\partial p} - \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial H_j}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial q_i}{\partial p} - \sum_{m=k+1, m\neq j}^{n} \frac{\partial H_j}{\partial q_m} \cdot \frac{\partial q_m}{\partial p} = (r+ns)\lambda_j - q_j, \tag{21}$$

$$\frac{\partial H_K}{\partial q_i} = 0 \Rightarrow p - c - q_i = \lambda_K \cdot s, i \in K, \tag{22}$$

$$\frac{\partial H_j}{\partial q_j} = 0 \Rightarrow p - c - q_j = \lambda_j \cdot s, j \in N \setminus K, \tag{23}$$

$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{e}^{-rt}\lambda_K(t) = \lim_{t\to\infty} \mathrm{e}^{-rt}\lambda_j(t) = 0, j \in N \setminus K. \tag{24}$$

对(22)式关于 t 求导并将(20)式中的 $\dot{\lambda}_K$ 代入(22)得

$$\dot{p} - \dot{q}_i = s\left\{\left[r + (n-k+1)s\right]\lambda_K - \sum_{i=1}^{k} q_i\right\}, i \in K. \tag{25}$$

对(23)式关于 t 求导并将(21)式中的 $\dot{\lambda}_j$ 代入(23)得

$$\dot{p} - \dot{q}_j = s\left[(r+ns)\lambda_j - q_j\right], j \in N \setminus K. \tag{26}$$

分别根据联盟 K 内局中人的对称性和联盟外局中人的对称性，运用用平稳点条件 $\dot{p}(t) = \dot{q}_i(t) = \dot{q}_j(t) = 0$，$i \in K$，$j \in N \setminus K$，联立(19)，(25)和(26)式得到平稳的最优产出和对应的市场价格由(11)~(13)给出，闭环信息的 γ-特征函数由(10)给出。引理 3.1 的证明完成。

下述的例 1 显示，相较开环信息，闭环信息对动态古诺垄断博弈 γ-特征函数值的影响是复杂的，既不能带来真子联盟 γ-特征函数值的一致严格变大，也不能带来真子联盟 γ-特征函数值的一致严格变小。信息结构与联盟的人数共同影响 γ-特征函数值。

例 1. 由(1)~(3)定义的动态古诺垄断博弈中，给定参数 $n = 30, a = 11, c = 1, r = 1, s = 1$，分别基于(6)和(10)计算开环和闭环信息的 γ-特征函数值，如表 1 所示。

Table 1. γ-characteristic function values with open-loop and closed-loop information
表 1. 开环和闭环信息的 γ-特征函数值

k	1	2	3	4	5	6	7	8
$V_{op}^{\gamma}(K)$	0.1008	0.1756	0.2353	0.2873	0.3358	0.3835	0.4321	0.4830
$V_{cl}^{\gamma}(K)$	0.0553	0.1107	0.1666	0.2234	0.2815	0.3412	0.4032	0.4678
k	9	10	11	12	13	14	15	16
$V_{op}^{\gamma}(K)$	0.5375	0.5968	0.6622	0.7352	0.8176	0.9114	1.0193	1.1447
$V_{cl}^{\gamma}(K)$	0.5357	0.6076	0.6842	0.7664	0.8555	0.9527	1.0597	1.1786
k	17	18	19	20	21	22	23	24

Continued

$V_{op}^{\gamma}(K)$	1.2917	1.4660	1.6752	1.9292	2.2422	2.6343	3.1347	3.7874
$V_{cl}^{\gamma}(K)$	1.3122	1.4640	1.6385	1.8422	2.0838	2.3760	2.7376	3.1981
k	25	26	27	28	29	30		
$V_{op}^{\gamma}(K)$	4.6613	5.8691	7.6053	10.2293	14.4677	21.9754		
$V_{cl}^{\gamma}(K)$	3.8060	4.6474	5.8913	7.9178	11.7933	21.9754		

由表 1 得到，当 $1\le k\le 9$ 以及 $18\le k\le 29$ 时，有 $V_{op}^{\gamma}(K)>V_{cl}^{\gamma}(K)$；当 $10\le k\le 17$ 时，有 $V_{op}^{\gamma}(K)<V_{cl}^{\gamma}(K)$；特别地，当 $k=n$ 时，有 $V_{op}^{\gamma}(N)=V_{cl}^{\gamma}(N)$。

4. γ-核的存在性

本节我们在闭环信息 γ-特征函数的基础上，研究 γ-核的存在性(非空性)问题。按照 Moulin [30]，一个对称合作博弈 (N,V) 的核心非空当且仅当对 $\forall k,1\le k\le n$，有 $V(K)/k\le V(N)/n$ 成立。

定理 4.1 由(1)~(3)定义的具有闭环(无记忆)信息的动态古诺垄断博弈中，γ-核 $C\left(N,V_{cl}^{\gamma}(\cdot)\right)$ 非空。

证明 为证明闭环信息的 γ-核非空，只需验证：对 $\forall k,1\le k\le n$，有 $V_{cl}^{k}(K)/k\le V_{cl}^{n}(N)/n$ 成立。

按照引理 3.1，写出：

$$\frac{V_{cl}^{\gamma}(K)}{k}=\frac{\left[r+(n-k+1)s\right]\left[r+(n+k+1)s\right](a-c)^2}{2r\left[(n+1)r+\left(n^2-k^2+n+k+1\right)s\right]^2},\tag{27}$$

$$\frac{V_{cl}^{n}(N)}{n}=\frac{(r+s)(r+s+2ns)(a-c)^2}{2r(r+s+nr+2ns)^2}.\tag{28}$$

对 $\forall k,1\le k\le n$，记

$$f(k)=\frac{\left[r+(n-k+1)s\right]\left[r+(n+k+1)s\right]}{\left[(n+1)r+\left(n^2-k^2+n+k+1\right)s\right]^2}.\tag{29}$$

$$\frac{\mathrm{d}f(k)}{\mathrm{d}k}=\frac{2s(2k-1)r^2+(3k-2)(n+1)rs+\left[(k-1)\left(n^2-k^2+n+1\right)+n(k-1)+k(n-1)\right]s^2}{\left[(n+1)r+\left(n^2-k^2+n+k+1\right)s\right]^3}>0,\tag{30}$$

故 $f(k)$ 关于 k 单调递增，从而 $V_{cl}^{k}(K)/k\le V_{cl}^{n}(N)/n$ 成立。

5. 结论

本文研究了具有闭环(无记忆)信息的动态古诺垄断博弈的 γ-核。在具有线性需求和二次成本的多人微分博弈中，运用 Pontryagin 极大值原理，计算得到闭环信息的 γ-特征函数，并进一步证明 γ-核心是非空的。数值例子显示，相较开环信息，闭环信息对动态古诺垄断博弈 γ-特征函数的影响是复杂的，不能带来真子联盟 γ-特征函数值的一致严格变大或变小；但闭环信息对 γ-核存在性的影响是鲁棒的，即与开环信息相比，并未导致 γ-核的非空性结果改变。与模型相关，本文闭环(无记忆)信息对 α-，β-特征函数的影响是平凡的。因此，值得进一步考察具有内部最大最小或最小最大解的微分博弈，研究不同信息结构 α-，β-特征函数的计算和对应核心解的存在性问题。

参考文献

[1] Shapley, L. (1955) Markets as Cooperative Games. Rand Corporation Papers.

[2] Gillies, D. (1959) Solutions to General Non-Zero Sum Games. In: Tucker, A.W. and Luce, R.D. Eds., *Contributions to the Theory of Games* (*AM*-40), *Volume IV*, Princeton University Press, Princeton, 47-86. https://doi.org/10.1515/9781400882168-005

[3] von Neumann, J. and Morgenstern, O. (1944) Theory of Games and Economic Behavior. Princeton University Press, Princeton.

[4] Edge Worth, F.Y. (1881) Mathematical Psychics: An Essay on the Application of Mathematics to the Moral Sciences. https://econpapers.repec.org/RePEc:hay:hetboo:edgeworth1881

[5] Aumann, R. (1959) Acceptable Points in General Cooperative N-Person Games. In: Tucker, A. and Luce, D., Eds., *Contributions to the Theory of Games IV*, *Annals of Mathematics Studies* (*Vol*. 40), Princeton University Press, Princeton, 287-324. https://doi.org/10.1515/9781400882168-018

[6] Scarf, H. (1971) On the Existence of a Cooperative Solution for a General Class of N-Person Games. *Journal of Economic Theory*, **3**, 169-181. https://doi.org/10.1016/0022-0531(71)90014-7

[7] Shapley, L. (1973) On Balanced Games without Side Payments. In: Hu, T.C. and Robinson, S.M., Eds., *Mathematical Programming*, Academic Press, New York, 261-290. https://doi.org/10.1016/B978-0-12-358350-5.50012-9

[8] Hart, S. and Kurz, M. (1983) Endogenous Formation of Coalitions. *Econometrica*, **51**, 1047-1064. https://doi.org/10.2307/1912051

[9] Shapley, L. (1967) On Balanced Sets and Cores. *Naval Research Logistics Quarterly*, **14**, 453-560. https://doi.org/10.1002/nav.3800140404

[10] Zhao, J. (1999) The Existence of TU α-Core in Norm Form Games. *International Journal of Game Theory*, **28**, 25-34. https://doi.org/10.1007/s001820050096

[11] Zhao, J. (1999b) A β-Core Existence Result and Its Application to Oligopoly Markets. *Games and Economic Behavior*, **27**, 153-168. https://doi.org/10.1006/game.1998.0654

[12] Chander, P. and Tulkens, H. (1997) The Core of an Economy with Multilateral Environmental Externalities. *International Journal of Game Theory*, **26**, 379-401. https://doi.org/10.1007/BF01263279

[13] Zhao, J. (2018) TU Oligopoly Games and Industrial Cooperation. *Handbook of Game Theory and Industrial Organization*, **1**, 392-422. https://doi.org/10.4337/9781785363283.00022

[14] Yong, J. (2004) Horizontal Monopolization via Alliances. Working Paper, Melbourne Institute of Applied Economic and Social Research, Parkville, University of Melbourne.

[15] Lekeas, P. (2013) Coalitional Beliefs in Cournot Oligopoly TU-Games. *International Game Theory Review*, **15**, Article ID: 1350004. https://doi.org/10.1142/S0219198913500047

[16] Currarini, S. and Marini, M. (2003) A Sequential Approach to the Characteristic Function and the Core in Games with Externalities. In: Sertel, M. and Kara, A., Eds., *Advances in Economic Design*, Springer Verlag, Berlin, 233-249. https://doi.org/10.1007/978-3-662-05611-0_14

[17] Basar, T. and Olsder, G.J. (1999) Classics in Applied Mathematics: Dynamic Noncooperative Game Theory, 2nd Edition. SIAM, Philadelphia. https://doi.org/10.1137/1.9781611971132

[18] Dockner, E., Jørgensen, S., Long, N. and Sorger, G. (2000) Differential Games in Economics and Management Science. Cambridge University Press, Cambridge. https://doi.org/10.1017/CBO9780511805127

[19] Haurie, A., Krawczyk, J. and Zaccour, G. (2012) Games and Dynamic Games. World Scientific, Singapore. https://doi.org/10.1142/8442

[20] Wang, L. and Zhao, J. (2023) The Core in an N-firm Dynamic Cournot Oligopoly. Qingdao University, Qingdao.

[21] Roos, C.F. (1925) A Mathematical Theory of Competition. *American Journal of Mathematics*, **47**, 163-175. https://doi.org/10.2307/2370550

[22] Fershtman, C. and Kamien, M. (1987) Dynamic Duopolistic Competition with Sticky Prices. *Econometrica*, **55**, 1151-1164. https://doi.org/10.2307/1911265

[23] Dockner, E.J. (1988) On the Relation between Dynamic Oligopolistic Competition and Long-Run Competitive Equilibrium. *European Journal of Political Economy*, **4**, 47-64. https://doi.org/10.1016/S0176-2680(88)80016-8

[24] Cellini, R. and Lambertini, L. (2004) Dynamic Oligopoly with Sticky Prices: Closed-Loop, Feedback and Open-Loop Solutions. *Journal of Dynamical and Control Systems*, **10**, 303-314. https://doi.org/10.1023/B:JODS.0000034432.46970.64

[25] Hoof, S. (2021) Dynamic Monopolistic Competition: A Steady-State Analysis. *Journal of Optimization Theory and Applications*, **189**, 560-577. https://doi.org/10.1007/s10957-021-01843-w

[26] Reinganum, J.F. and Stokey, N. (1985) Oligopoly Extraction of a Common Property: The Importance of the Period of Commitment in Dynamic Games. *International Economic Review*, **26**, 161-173. https://doi.org/10.2307/2526532

[27] Mehlmann, A. (1988) Applied Differential Games. Plenum Press, New York.

https://doi.org/10.1007/978-1-4899-3731-5

[28] Selten, R. (1975) Reexamination of the Perfectness Concept for Equilibrium Points in Extensive Games. *International Journal of Game Theory*, **4**, 25-55. https://doi.org/10.1007/BF01766400

[29] Esfahani, H. (2019) Profitability of Horizontal Mergers in the Presence of Price Stickiness. *European Journal of Operational Research*, **279**, 941-950. https://doi.org/10.1016/j.ejor.2019.06.038

[30] Moulin, H. (1981) Théorie des jeux pour l’économie et la politique. Hermann.