Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(12), 3475-3480
Published Online December 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.1312361

$\tilde{C}_3$型仿射Weyl群中的Φ值

王雨露，王利萍*，何厚智

北京建筑大学理学院，北京

收稿日期：2023年11月10日；录用日期：2023年12月12日；发布日期：2023年12月21日

摘　要

半线性方程组是计算仿射Weyl群Kazhdan-Lusztig系数的重要工具，而Φ值是求解半线性方程组的一个重要变量。对于Φ值的计算，成为研究Kazhdan-Lusztig系数的关键环节。本文综合利用李代数表示理论中的权格、根格，及计算机编程，对于$\tilde{C}_3$型仿射Weyl群，计算得出了全部的Φ值。这些结果对于进一步计算该群的某些Kazhdan-Lusztig系数奠定了基础。

关键词

仿射Weyl群，半线性方程组，Φ值

The Value of Φ in the Affine Weyl Group of Type $\tilde{C}_3$

Yulu Wang, Liping Wang*, Houzhi He

School of Science, Beijing University of Civil Engineering and Architecture, Beijing

Received: Nov. 10th, 2023; accepted: Dec. 12th, 2023; published: Dec. 21st, 2023

Abstract

A system of semi-linear equations is an important tool for calculating the Kazhdan-Lusztig coefficients of affine Weyl groups, and the value of Φ is an important variable in solving the system of semi-linear equations. The calculation of values of Φ has become a key link in studying the Kazhdan-Lusztig coefficients. In this article, by comprehensively using the weight lattice, root lattice in the representation theory of Lie algebras, and computer programming, we get all values of Φ for affine Weyl group of type $\tilde{C}_3$. These results lay the foundation for further calculating certain Kazhdan-Lusztig coefficients of the group.

*通讯作者。

文章引用: 王雨露, 王利萍, 何厚智. $\tilde{C}_3$型仿射 Weyl 群中的 Φ 值[J]. 理论数学, 2023, 13(12): 3475-3480.
DOI: 10.12677/pm.2023.1312361

Keywords

Affine Weyl Group, Semi-Linear Equation System, The Value of Φ

1. 引言

Kazhdan-Lusztig 多项式是 Kazhdan-Lusztig 理论中一个非常核心的研究对象，备受人们的关注。当我们在考虑 Weyl 群或者仿射 Weyl 群时，它们的 Kazhdan-Lusztig 多项式的系数在表示理论及李理论中有着非常深刻的意义。尽管 Kazhdan-Lusztig 多项式有一个递归公式，但是其计算过程十分复杂，很难对全体 Kazhdan-Lusztig 多项式的系数进行计算，群的秩越大计算也更为困难。1996 年，Lusztig [1]在验证 W-图的非局部有限性时，用半线性方程组算出了 $\tilde{B}_2$ 型仿射 Weyl 群的一类 Kazhdan-Lusztig 系数，其中 Φ 值为半线性方程组里一个重要的变量。2008 年，王利萍[2]计算了 $\tilde{B}_2$ 型仿射 Weyl 群的 Φ 值；2015 年，郭鹏飞[3]计算了 $\tilde{G}_2$ 型仿射 Weyl 群的 Φ 值；2017 年，冯鸽等人[4]研究了 $\tilde{C}_3$ 型仿射 Weyl 群的左胞腔图和特异对合元图；2019 年罗新等人[5] [6]计算出了 $\tilde{A}_3$ 型仿射 Weyl 群的 Φ 值及部分 Kazhdan-Lusztig 系数；2021 年以来王利萍团队[7] [8]对 $\tilde{A}_3$ 、 $\tilde{C}_3$ 型的李代数进行了张量积分解。

本文主要分为 3 个部分，第一部分介绍了 $\tilde{C}_3$ 型仿射 Weyl 群的基本结构；第二部分计算出了全部 Φ 值；第三部分对 $\tilde{C}_3$ 型仿射 Weyl 群 Φ 值的计算工作进行了总结，并对 Kazhdan-Lusztig 系数的研究工作进行了展望。

2. $\tilde{C}_3$ 型仿射 Weyl 群的结构

对于 $\tilde{C}_3$ 型仿射 Weyl 群 W，其生成元集 $S=\{s_0,s_1,s_2,s_3\}$，Dynkin 图如图 1 所示。

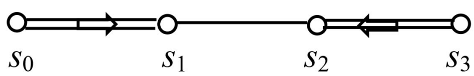

Figure 1. The Dynkin diagram of affine Weyl group of type $\tilde{C}_3$

图 1. $\tilde{C}_3$ 型仿射 Weyl 群的 Dynkin 图

任意两生成元的乘积阶数 $o(s_is_j)$ 有以下关系：

$$o(s_0s_2)=o(s_0s_3)=o(s_1s_3)=2,\ o(s_1s_2)=3,\ o(s_0s_1)=o(s_2s_3)=4.$$

为了方便，对于 W 中的每个元 $w=s_{i_1}s_{i_2}\cdots s_{i_n}$ ，可用下标 $i_1i_2\cdots i_n$ 来表示。

对应的 C_3 型 Weyl 群为 $W_0=\langle s_1,s_2,s_3\rangle$ ，则：

$$\begin{aligned}W_0=\{&e,1,2,3,12,13,21,23,32,121,123,132,213,232,321,323,1213,1232,1321,1323,2132,2321,2323,3213,\\&12312,12321,12323,13213,21321,21323,23213,32132,121321,121323,123213,132132,213213,232132,\\&321323,1231213,1232132,1321323,2132132,2321323,12132132,12321323,21321323,121321323\}.\end{aligned}$$

对应的根系为 R，支配权集为 Λ^+，根格为 Λ_r，令 α_i 为 s_i 对应的单根($i=1,2,3$)，则 $\Lambda_r = Z\alpha_1 + Z\alpha_2 + Z\alpha_3$，$Z$ 为整数集。

正根集为：$R^+ = \{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,2\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,2\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3\}$。

基本支配权为 x_1,x_2,x_3，则支配权集 $\Lambda^+ = Nx_1+Nx_2+Nx_3$，$N$ 为自然数集合，且有[9]：

$$x_1=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3/2;\ x_2=\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3;\ x_3=\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3/2.$$

3. 关于 Φ 值的计算

设 v 是一个变量，$A=Z\left[v,v^{-1}\right]$ 为一个整系数的 Laurent 多项式环。令 $^{-}:A\to A$ 为由 $\overline{v}\to v^{-1}$ 定义的对合。$\tilde{C}_3$ 型仿射 Weyl 群 W 作为一种特殊的 Coxeter 群，有 Bruhat 序“≤”。令 $\Lambda_r^+ = \Lambda_r \cap \Lambda^+$，Lusztig [1]指出从 Λ_r^+ 到 $W_0 - W_0$ 在 W 中的双陪集集合有一个 1-1 对应。对于每个 $\lambda\in\Lambda_r^+$，在 $W_0\lambda W_0$ 中都有唯一一个最短元 m_λ，同样也有唯一一个最长元 M_λ。对于任意的 $\lambda,\lambda'\in\Lambda_r^+$，有 $\lambda\le\lambda'$ 当且仅当 $M_\lambda\le M_{\lambda'}$，如果 $\lambda'-\lambda$ 为 R^+ 中元素的非负线性组合则 $\lambda\le\lambda'$。

根据文献[1]中 Lusztig 给出的 Proposition 7 与 Corollary 11，即

引理 1 [1]对于任意的 $\lambda\le\lambda''\in\Lambda_r^+$，有：

$$\sum_{\lambda\le\lambda'\le\lambda''} a_{\lambda,\lambda'}(-1)^{l(m_{\lambda'})-l(M_{\lambda'})}\pi_{\lambda'}\overline{b}_{\lambda',\lambda''} = \sum_{\lambda\le\lambda'\le\lambda''} \overline{a}_{\lambda,\lambda'}(-1)^{l(m_{\lambda'})-l(M_{\lambda'})}\pi_{\lambda'}b_{\lambda',\lambda''}.$$

其中 $l(w)$ 为 w 的长度，$a_{\lambda,\lambda'}$、$b_{\lambda,\lambda'}$ 的表达式为：

$$a_{\lambda,\lambda'} = \frac{v^{\nu_{\lambda'}}}{\pi_{\lambda'}}\sum_{w\in W_I}(-1)^{l(w)}\Phi\left(\lambda'+\rho-w(\lambda+\rho)\right),$$

$$b_{\lambda,\lambda'} = (-1)^{l(m_\lambda)-l(m_{\lambda'})}\frac{1}{\pi_\lambda}\cdot\sum_{w\in W_I}(-1)^{l(w)}\Phi\left(w(\lambda'-\rho)-(\lambda-\rho)\right).$$

Kazhdan-Lusztig 系数 $\mu(m_\lambda,m_{\lambda'}) = \mathrm{Res}_{v=0}(b_{\lambda,\lambda'})$，其中 $\mathrm{Res}_{v=0}(b_{\lambda,\lambda'})\in Z$ 为 v^{-1} 在 $b_{\lambda,\lambda'}\in$ A 中的系数。

子集合 $i\subseteq R^+$，令 $\alpha_i=\sum_{\alpha\in i}\alpha\in\Lambda_r$。可知 $\alpha_\phi=0$，令 $\alpha_{R^+}=2\rho$，其中 $\rho\in\Lambda_r$。对于任意的 $x=\alpha_{\mathbf{i}}\in\Lambda_r$，有公式[1]：

$$\Phi(x)=\sum_{\mathbf{i}:\mathbf{i}\subseteq\mathrm{R}^+;\alpha_{\mathbf{i}}=x}\left(-v^2\right)^{-|\mathbf{i}|}. \tag{1}$$

显然 $\Phi(x)\in Z\left[v^{-1}\right]$。

如果对于任意的子集合 $\mathbf{i}\subseteq R^+$，都有 $x\ne\alpha_{\mathbf{i}}\in\Lambda_r$，则 $\Phi(x)=0$。

命题 2 对于任意的 $x\in\Lambda_r$，存在子集合 $\mathbf{i}\subseteq R^+$ 满足 $x=\alpha_{\mathbf{i}}$，有：

$$\Phi(2\rho-x)=\left(-v^2\right)^{-|\mathrm{R}^+|}\sum_{\mathbf{i}:\mathbf{i}\subset\mathrm{R}^+;\alpha_{\mathbf{i}}=x}\left(-v^2\right)^{|\mathbf{i}|}.$$

证明：已知 $\mathbf{i}$ 为 R^+ 的子集，设 R^+ 中 $\mathbf{i}$ 的补集为 $\mathbf{k}$，令 $y=\alpha_{\mathbf{k}}\in\Lambda_r$，则 $x+y=2\rho$。

假设 R^+ 中有 j 个子集满足 $x=\alpha_{\mathbf{i}}\in\Lambda_r$，同样也有 j 个子集满足 $y=\alpha_{\mathbf{k}}\in\Lambda_r$，$\mathbf{i}_n(0<n\le j)$ 表示满足条件的某个子集，其补集用 $\mathbf{k}_n(0<n\le j)$ 表示，因此根据式(2)，可得：

$$\Phi(x)=\left(-v^2\right)^{-|\mathbf{i}_1|}+\left(-v^2\right)^{-|\mathbf{i}_2|}+\cdots+\left(-v^2\right)^{-|\mathbf{i}_j|},$$

$$\Phi(y)=\Phi(2\rho-x)=\left(-v^2\right)^{-|\mathbf{k}_1|}+\left(-v^2\right)^{-|\mathbf{k}_2|}+\cdots+\left(-v^2\right)^{-|\mathbf{k}_j|}。$$

因为 $\mathbf{k}$ 为 $\mathbf{i}$ 在 R^+ 中的补集，可得：$\left(-v^2\right)^{-|\mathbf{i}|}\left(-v^2\right)^{-|\mathbf{k}|}=\left(-v^2\right)^{-|\mathrm{R}^+|}$。所以

$$\Phi(2\rho-x)=\left(-v^{2}\right)^{-\left|R^{+}\right|+\left|\mathbf{i}_{1}\right|}+\left(-v^{2}\right)^{-\left|R^{+}\right|+\left|\mathbf{i}_{2}\right|}+\cdots+\left(-v^{2}\right)^{-\left|R^{+}\right|+\left|\mathbf{i}_{j}\right|}=\left(-v^{2}\right)^{-\left|R^{+}\right|}\sum_{\mathbf{i};\mathbf{i}\subset R^{+};\alpha_{\mathbf{i}}=x}\left(-v^{2}\right)^{|\mathbf{i}|}。$$

该命题即证。

用命题 2 再结合 Mathematica 对 $\tilde{C}_3$ 型仿射 Weyl 群不同正根的和进行计算，从而根据 Φ 值的定义分类得出：

定理 3 $\tilde{C}_3$ 型仿射 Weyl 群里的 Φ 值：

$\Phi(\alpha_1)=\Phi(\alpha_2)=\Phi(\alpha_3)=-v^{-2}$, $\Phi(\alpha_1+\alpha_2)=\Phi(\alpha_2+\alpha_3)=\Phi(2\alpha_2+\alpha_3)=-v^{-2}+v^{-4}$,

$\Phi(\alpha_1+\alpha_3)=\Phi(2\alpha_1+\alpha_2)=\Phi(\alpha_1+2\alpha_2)=\Phi(\alpha_2+2\alpha_3)=\Phi(3\alpha_2+\alpha_3)=v^{-4}$,

$\Phi(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)=-v^{-2}+2v^{-4}-v^{-6}$,

$\Phi(\alpha_1+5\alpha_2+3\alpha_3)=\Phi(3\alpha_1+3\alpha_2+3\alpha_3)=-v^{-6}+2v^{-8}-v^{-10}$, $\Phi(\alpha_1+3\alpha_2+3\alpha_3)=-2v^{-6}+2v^{-8}$,

$$\begin{aligned}\Phi(2\alpha_1+2\alpha_2)&=\Phi(2\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3)=\Phi(4\alpha_2+2\alpha_3)=\Phi(3\alpha_2+3\alpha_3)\\&=\Phi(\alpha_1+4\alpha_2+\alpha_3)=\Phi(\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3)=-v^{-6},\end{aligned}$$

$\Phi(4\alpha_1+3\alpha_2+\alpha_3)=-v^{-6}$, $\Phi(\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3)=-v^{-2}+3v^{-4}-2v^{-6}$,

$\Phi(2\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3)=-v^{-2}+2v^{-4}-2v^{-6}+v^{-8}$,

$\Phi(2\alpha_2+2\alpha_3)=\Phi(2\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)=\Phi(\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3)=\Phi(3\alpha_2+2\alpha_3)=\Phi(3\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3)=v^{-4}-v^{-6}$,

$\Phi(\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3)=2v^{-4}-3v^{-6}+v^{-8}$, $\Phi(\alpha_1+3\alpha_2+2\alpha_3)=2v^{-4}-4v^{-6}+2v^{-8}$,

$\Phi(2\alpha_1+3\alpha_2+\alpha_3)=2v^{-4}-3v^{-6}+v^{-8}$, $\Phi(2\alpha_1+3\alpha_2+2\alpha_3)=2v^{-4}-v^{-6}+4v^{-8}-v^{-10}$,

$\Phi(\alpha_1+3\alpha_2+\alpha_3)=2v^{-4}-2v^{-6}$, $\Phi(2\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3)=\Phi(\alpha_1+4\alpha_2+2\alpha_3)=v^{-4}-3v^{-6}+2v^{-8}$,

$$\begin{aligned}\Phi(2\alpha_1+4\alpha_2+\alpha_3)&=\Phi(3\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3)=\Phi(\alpha_1+5\alpha_2+2\alpha_3)\\&=\Phi(3\alpha_1+4\alpha_2+\alpha_3)=\Phi(4\alpha_1+3\alpha_2+2\alpha_3)=-v^{-6}+v^{-8},\end{aligned}$$

$\Phi(3\alpha_1+3\alpha_2+\alpha_3)=v^{-4}-2v^{-6}+v^{-8}$, $\Phi(2\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3)=\Phi(4\alpha_2+3\alpha_3)=\Phi(\alpha_1+4\alpha_2+4\alpha_3)=v^{-8}$,

$$\begin{aligned}\Phi(4\alpha_1+4\alpha_2+\alpha_3)&=\Phi(\alpha_1+6\alpha_2+3\alpha_3)=\Phi(2\alpha_1+6\alpha_2+2\alpha_3)\\&=\Phi(5\alpha_1+4\alpha_2+2\alpha_3)=\Phi(4\alpha_1+3\alpha_2+3\alpha_3)=v^{-8},\end{aligned}$$

$\Phi(3\alpha_1+5\alpha_2+4\alpha_3)=2v^{-8}-4v^{-10}+2v^{-12}$, $\Phi(2\alpha_1+4\alpha_2+2\alpha_3)=v^{-4}-5v^{-6}+5v^{-8}-v^{-10}$,

$\Phi(\alpha_1+4\alpha_2+3\alpha_3)=\Phi(2\alpha_1+3\alpha_2+3\alpha_3)=\Phi(2\alpha_1+5\alpha_2+2\alpha_3)=\Phi(4\alpha_1+4\alpha_2+2\alpha_3)=-2v^{-6}+3v^{-8}-v^{-10}$,

$\Phi(3\alpha_1+3\alpha_2+2\alpha_3)=v^{-4}-3v^{-6}+3v^{-8}-v^{-10}$, $\Phi(5\alpha_1+6\alpha_2+4\alpha_3)=-2v^{-10}+3v^{-12}-v^{-14}$,

$\Phi(2\alpha_1+4\alpha_2+3\alpha_3)=-2v^{-6}+6v^{-8}-4v^{-10}$, $\Phi(3\alpha_1+4\alpha_2+2\alpha_3)=v^{-4}-4v^{-6}+5v^{-8}-2v^{-10}$,

$$\begin{aligned}\Phi(\alpha_1+5\alpha_2+4\alpha_3)&=\Phi(2\alpha_1+4\alpha_2+4\alpha_3)=\Phi(3\alpha_1+6\alpha_2+2\alpha_3)\\&=\Phi(3\alpha_1+4\alpha_2+4\alpha_3)=\Phi(5\alpha_1+5\alpha_2+2\alpha_3)=v^{-8}-v^{-10},\end{aligned}$$

$\Phi(4\alpha_1+6\alpha_2+2\alpha_3)=v^{-8}-v^{-10}$, $\Phi(2\alpha_1+5\alpha_2+3\alpha_3)=-2v^{-6}+5v^{-8}-4v^{-10}+v^{-12}$,

$\Phi(3\alpha_1+7\alpha_2+3\alpha_3)=v^{-8}-2v^{-10}+v^{-12}$,

$\Phi(4\alpha_1+4\alpha_2+4\alpha_3)=\Phi(5\alpha_1+6\alpha_2+2\alpha_3)=\Phi(2\alpha_1+6\alpha_2+5\alpha_3)=-v^{-10}$,

$$\Phi(4\alpha_1+8\alpha_2+3\alpha_3)=\Phi(6\alpha_1+6\alpha_2+3\alpha_3)=\Phi(2\alpha_1+7\alpha_2+4\alpha_3)$$
$$=\Phi(\alpha_1+6\alpha_2+4\alpha_3)=\Phi(5\alpha_1+4\alpha_2+3\alpha_3)=-v^{-10},$$

$$\Phi(2\alpha_1+6\alpha_2+3\alpha_3)=\Phi(4\alpha_1+4\alpha_2+3\alpha_3)=3v^{-8}-3v^{-10},\ \Phi(2\alpha_1+5\alpha_2+4\alpha_3)=2v^{-8}-3v^{-10}+v^{-12},$$

$$\Phi(4\alpha_1+5\alpha_2+2\alpha_3)=-v^{-6}+3v^{-8}-2v^{-10},\ \Phi(3\alpha_1+5\alpha_2+2\alpha_3)=-2v^{-6}+4v^{-8}-2v^{-10},$$

$$\Phi(3\alpha_1+4\alpha_2+3\alpha_3)=-2v^{-6}+5v^{-8}-4v^{-10}+v^{-12},\ \Phi(3\alpha_1+5\alpha_2+3\alpha_3)=-2v^{-6}+6v^{-8}-6v^{-10}+2v^{-12},$$

$$\Phi(4\alpha_1+6\alpha_2+3\alpha_3)=4v^{-8}-6v^{-10}+2v^{-12},\ \Phi(2\alpha_1+6\alpha_2+4\alpha_3)=\Phi(4\alpha_1+5\alpha_2+4\alpha_3)=v^{-8}-3v^{-10}+2v^{-12},$$

$$\Phi(3\alpha_1+6\alpha_2+3\alpha_3)=-v^{-6}+4v^{-8}-5v^{-10}+2v^{-12},\ \Phi(5\alpha_1+5\alpha_2+3\alpha_3)=v^{-8}-2v^{-10}+v^{-12},$$

$$\Phi(2\alpha_1+7\alpha_2+4\alpha_3)=\Phi(5\alpha_1+5\alpha_2+4\alpha_3)=\Phi(3\alpha_1+6\alpha_2+5\alpha_3)$$
$$=\Phi(4\alpha_1+6\alpha_2+5\alpha_3)=\Phi(3\alpha_1+8\alpha_2+4\alpha_3)=-v^{-10}+v^{-12},$$

$$\Phi(4\alpha_1+5\alpha_2+3\alpha_3)=-v^{-6}+4v^{-8}-5v^{-10}+2v^{-12},\ \Phi(3\alpha_1+6\alpha_2+4\alpha_3)=2v^{-8}-5v^{-10}+4v^{-12}-v^{-14},$$

$$\Phi(4\alpha_1+6\alpha_2+4\alpha_3)=v^{-8}-5v^{-10}+5v^{-12}-v^{-14},$$

$$\Phi(5\alpha_1+6\alpha_2+3\alpha_3)=\Phi(4\alpha_1+7\alpha_2+3\alpha_3)=v^{-8}-3v^{-10}+2v^{-12},$$

$$\Phi(3\alpha_1+7\alpha_2+4\alpha_3)=v^{-8}-3v^{-10}+3v^{-12}-v^{-14},\ \Phi(5\alpha_1+7\alpha_2+3\alpha_3)=-2v^{-10}+2v^{-12},$$

$$\Phi(3\alpha_1+7\alpha_2+5\alpha_3)=-v^{-10}+2v^{-12}-v^{-14},\ \Phi(4\alpha_1+7\alpha_2+4\alpha_3)=v^{-8}-4v^{-10}+5v^{-12}-2v^{-14},$$

$$\Phi(6\alpha_1+6\alpha_2+4\alpha_3)=\Phi(6\alpha_1+7\alpha_2+3\alpha_3)=\Phi(5\alpha_1+6\alpha_2+5\alpha_3)$$
$$=\Phi(5\alpha_1+8\alpha_2+3\alpha_3)=\Phi(4\alpha_1+9\alpha_2+4\alpha_3)=v^{-12},$$

$$\Phi(4\alpha_1+8\alpha_2+6\alpha_3)=\Phi(2\alpha_1+7\alpha_2+5\alpha_3)=v^{-12},\ \Phi(5\alpha_1+7\alpha_2+4\alpha_3)=-2v^{-10}+4v^{-12}-2v^{-14},$$

$$\Phi(4\alpha_1+7\alpha_2+5\alpha_3)=\Phi(5\alpha_1+8\alpha_2+4\alpha_3)=-v^{-10}+3v^{-12}-2v^{-14},$$

$$\Phi(5\alpha_1+8\alpha_2+4\alpha_3)=-v^{-10}+3v^{-12}-2v^{-14},$$

$$\Phi(3\alpha_1+8\alpha_2+5\alpha_3)=\Phi(6\alpha_1+7\alpha_2+4\alpha_3)=\Phi(6\alpha_1+8\alpha_2+4\alpha_3)$$
$$=\Phi(4\alpha_1+9\alpha_2+5\alpha_3)=\Phi(5\alpha_1+9\alpha_2+4\alpha_3)=v^{-12}-v^{-14},$$

$$\Phi(4\alpha_1+8\alpha_2+4\alpha_3)=-2v^{-10}+3v^{-12}-v^{-14},\ \Phi(5\alpha_1+7\alpha_2+5\alpha_3)=2v^{-12}-2v^{-14},$$

$$\Phi(4\alpha_1+8\alpha_2+5\alpha_3)=-v^{-10}+2v^{-12}-2v^{-14}+v^{-16},\ \Phi(5\alpha_1+8\alpha_2+5\alpha_3)=2v^{-12}-3v^{-14}+v^{-16},$$

$$\Phi(6\alpha_1+7\alpha_2+5\alpha_3)=\Phi(4\alpha_1+9\alpha_2+6\alpha_3)=\Phi(5\alpha_1+8\alpha_2+6\alpha_3)$$
$$=\Phi(6\alpha_1+9\alpha_2+4\alpha_3)=\Phi(5\alpha_1+10\alpha_2+5\alpha_3)=-v^{-14},$$

$$\Phi(6\alpha_1+8\alpha_2+5\alpha_3)=\Phi(5\alpha_1+9\alpha_2+6\alpha_3)=\Phi(6\alpha_1+9\alpha_2+5\alpha_3)=-v^{-14}+v^{-16},$$

$$\Phi(5\alpha_1+9\alpha_2+5\alpha_3)=v^{-12}-2v^{-14}+v^{-16},$$

$$\Phi(6\alpha_1+9\alpha_2+6\alpha_3)=\Phi(5\alpha_1+10\alpha_2+6\alpha_3)=\Phi(6\alpha_1+10\alpha_2+5\alpha_3)=v^{-16},$$

$$\Phi(6\alpha_1+10\alpha_2+6\alpha_3)=-v^{-18}.$$

4. 结论

本文以 $\tilde{C}_3$ 型仿射 Weyl 群为研究对象，计算了半线性方程组里的 Φ 值，以下为主要结论：

1) 根据 Φ 的定义，得出了 $\Phi(2\rho-x)$ 与 $\Phi(x)$ 之间的关系。这对求得任意类型的 Weyl 群的 Φ 值都节省了大量计算精力。

2) 对于任意 $\lambda\in\Lambda_r^+$，计算得出了全部 Φ 值，并对 Φ 值进行了分类总结。

接下来将利用得出的 Φ 值，对半线性方程组中的 $a_{\lambda,\lambda'}$， $b_{\lambda,\lambda''}$ 进行计算，从而求解出 $\tilde{C}_3$ 型仿射 Weyl 群的部分 Kazhdan-Lusztig 系数。但是本文在用 Mathematica 计算 Φ 值时，并没有编写出直接求得 Φ 值的程序，只是对不同正根的和进行了求解，再进行分类整理得出 Φ 值。

基金项目

北京市组织部“高创计划”青年拔尖人才培养计划(21351918007)。

参考文献

[1] Lusztig, G. (1996) Nonlocal Finiteness of a *W*-Graph. *Representation Theory of the American Mathematical Society*, **1**, 25-30. https://doi.org/10.1090/S1088-4165-97-00003-4

[2] 王利萍. $\tilde{A}_2$ 型和 $\tilde{B}_2$ 型仿射 Weyl 群的 Kazhdan-Lusztig 多项式的首项系数[D]: [硕士学位论文]. 北京: 中国科学院研究生院(数学与系统科学研究院), 2008.

[3] 郭鹏飞. $\tilde{G}_2$ 型仿射 Weyl 群的 Kazhdan-Lusztig 多项式的首次系数[D]: [硕士学位论文]. 广州: 华南理工大学, 2015.

[4] 冯鸽, 王利萍. $\tilde{C}_3$ 型仿射 Weyl 群的左胞腔图和特异对合元图[J]. 北京建筑大学学报, 2017, 33(1): 53-58.

[5] 罗新, 王利萍, 魏玉丽. $\tilde{A}_3$ 型仿射 Weyl 群中 $a_{\lambda,\lambda'}$ 的计算[J]. 北京建筑大学学报, 2019, 35(3): 74-82.

[6] 罗新, 王利萍, 代佳华, 等. $\tilde{A}_3$ 型仿射 Weyl 群的 Kazhdan-Lusztig 多项式的首项系数[J]. 北京建筑大学学报, 2019, 35(4): 51-58.

[7] 魏玉丽, 王利萍, 代佳华. $\tilde{A}_3$ 型李代数的张量积分解[J]. 北京建筑大学学报, 2021, 37(1): 80-86.

[8] 代佳华, 王利萍, 盛昱杰, 等. $\tilde{C}_3$ 型李代数的张量积分解[J]. 北京建筑大学学报, 2022, 38(1): 106-112.

[9] 汉弗莱斯. 李代数及其表示理论导引[M]. 陈志杰, 译. 北京: 世界图书出版公司, 2011.