Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(12), 3496-3504
Published Online December 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.1312364

Hans汉斯

基于模糊Banzhaf权力指数的投票权研究

陆士希，丘小玲*

贵州大学，数学与统计学院，贵州 贵阳

收稿日期：2023年11月11日；录用日期：2023年12月12日；发布日期：2023年12月21日

摘 要

权力指数被视为衡量合作博弈中局中人实际权力的有效工具，得到了众多学者的认可和重视。本文应用模糊Banzhaf权力指数探讨了局中人的联盟程度对局中人投票权的影响。首先依据Tsurumi定义的方法和模糊数学相关理论，重新定义了局中人的模糊股权函数，然后把模糊Banzhaf权力指数应用到阿里合伙人模式的实例中，最后对比原阿里合伙人模式中的实际权力指数。分析表明，局中人的联盟程度会影响联盟成功与否，并最终改变每个局中人的Banzhaf权力指数。

关键词

模糊Banzhaf权力指数，投票权，模糊股权函数

Research on Voting Rights Based on Fuzzy Banzhaf Power Index

Shixi Lu, Xiaoling Qiu*

School of Mathematics and Statistics, Guizhou University, Guiyang Guizhou

Received: Nov. 11th, 2023; accepted: Dec. 12th, 2023; published: Dec. 21st, 2023

Abstract

The power index is regarded as an effective tool to measure the actual power of the players in the cooperative game, and has been recognized and valued by many scholars. This paper applies the fuzzy Banzhaf power index to explore the influence of the degree of alliance of the players on the voting rights of the players. Firstly, according to the method defined by Tsurumi and the theory of fuzzy mathematics, the fuzzy equity function of the player is redefined. Then, the fuzzy Banzhaf power index is applied to the example of Ali partner model. Finally, the actual power index in the original Ali partner model is compared. The analysis shows that the degree of alliance of the play-

*通讯作者。

文章引用: 陆士希, 丘小玲. 基于模糊 Banzhaf 权力指数的投票权研究[J]. 理论数学, 2023, 13(12): 3496-3504.
DOI: 10.12677/pm.2023.1312364

ers will affect the success of the alliance, and ultimately change the Banzhaf power index of each player.

Keywords

Fuzzy Banzhaf Power Index, Voting Rights, Fuzzy Equity Function

1. 引言

股权是指股东通过购买公司的股票，成为公司的股东，从而享有相应的权益和利益。股权的大小取决于股东所持有的股票数量。

权力应用充斥于日常各类社会关系中，引起许多学者的关注和重视。美国数学家 Shapley 认为投票组织中一个决策者的权力大小就是其成为关键加入者的概率，决策者能够通过自己的加入使得一个原本失败的联盟转变为成功，该决策者就是关键加入者[1]。1965 年，法律专家班扎夫引入“摆盟”的概念并定义了一种新的权力指数——Banzhaf 权力指数。“摆盟”是决策者成为“关键加入者”的联盟。Banzhaf 权力指数为决策者拥有的摆盟数除以所有决策者摆盟数之和[2]。

Bilbao 分析了欧盟扩大到 27 个国家后的决策规则下各成员国的 Banzhaf 权力指数[3]。赵昌文和庄道军通过 Banzhaf 指标模型，对我国上市公司的有效控制力展开了研究调查与实证分析，并得出了上市公司的绝对合理控股比率[4]。逢淑梅和易建新用 Banzhaf 指数来研究国有股减持问题，用几个具体例子来说明，若要保持第一大股东的相对控股地位，第一大股东所持有股票的数量可以远远小于上市公司股票发行总量的[5]。王华和汪贤裕通过 Banzhaf 势指标的定量分析，研究了经营性国有资产怎样达到对公共项目的相对控制问题[6]。姚大庆使用 Banzhaf 指数和 Coleman 指数计算了国际货币基金组织(IMF)执行董事会成员的投票权，结果显示 IMF 的投票规则增强了美国的控制力[7]。

综上所述，目前 Banzhaf 权力指数的研究只针对局中人完全参与到一个特定的联盟之中，即每个局中人要么参加某个联盟，要么不参加某个联盟，不存在局中人以一定的参与率或参与程度参加某个联盟。本文旨在研究局中人的参与程度对局中人投票权的影响，并提出了一种基于模糊数概念的股权模糊延拓方法。本文的结构如下：第二节将介绍研究所需的基础知识；第三节将用 Tsurumi 的方法和模糊数学相关理论，重新定义决策者模糊股权函数，并构造了模糊 Banzhaf 权力指数；第四节运用模糊 Banzhaf 权力指数对合伙人集团和各股东的投票权进行计算和分析。

2. 预备知识

Banzhaf 权力指数用来衡量一个决策者的权力大小，其数学表达式如下：

定义 2.1 [2]决策者 i 的 Banzhaf 权力指数为

$$\beta_i = \frac{\theta_i}{\sum_{j=1}^{n} \theta_j},$$

$$\theta_i = \sum_{i \in g_i} \left[1 - v(g \setminus i)\right],$$

其中，θ_i 表示决策者 i 成为“关键加入者”的次数；$\sum_{j=1}^{n}\theta_j$ 表示所有决策者成为“关键加入者”的次数之和；g_i 表示 N 中所有包含决策者 i 的获胜联盟子集；v 代表一个联盟的效益值，若该联盟为获胜联盟则 v 等于 1，否则为 0，$v(g\setminus i)$ 表示决策者 i 背离联盟 g_i 后 g_i 的效益值，若此时 g_i 仍为获胜联盟则 $v(g\setminus i)$ 等于 1，否则 $v(g\setminus i)$ 等于 0。

模糊数是由 L.A.Zadeh 于 1965 年提出的，他将元素对集合的隶属程度用 $[0,1]$ 区间中的一个数表示，如下：

定义 2.2 [8]设论域为 X，x 为 X 中的元素，对于任意的 $x\in X$，给定如下的映射：

$$\mu_A : X \to [0,1],$$

$$x \mapsto \mu_A(x)\in[0,1],$$

则称如下的“序偶”组成的集合

$$A=\{(x,\mu_A(x)),x\in X\},$$

为 X 的模糊集合，称 μ_A 为 A 的隶属函数。对某个具体的 x 而言，$\mu_A(x)$ 称为 x 对 A 的隶属度，表示人们认识客观事物所赋予的元素 x 隶属于集合 A 的程度。

所有经典合作博弈的集合记为 $G_0(N)$，所有模糊合作博弈的集合记为 $G(N)$。

以下定义由 Tsurumi 给出。

定义 2.3 [9]给定联盟 $K\in\wp(N)$，令 $Q(K)=\{K(i)\,|\,K(i)>0,i\in N\}$，$q(k)$ 为 $Q(K)$ 中元素的个数，将 $Q(K)$ 中的元素按照非减序列排列为 $h_1\le h_2\le\cdots\le h_{q(K)}$，则具有实值模糊联盟合作对策的支付函数 $v_T\in G_r(N)$ 是模糊联盟 $\wp(N)$ 到实数 $\mathbb{R}$ 的一个映射，即 $v_T:\wp(N)\to\mathbb{R}$，具有形式

$$v_T(K)=\int K\mathrm{d}v=\sum_{l=1}^{q(K)} v\left([K]_{h_l}\right)\cdot(h_l-h_{l-1}),$$

其中，$h_0=0$；$l=1,2,\cdots,q(K)$；$[K]_{h_l}=\{i\in N\,|\,K(i)\ge h_l\}$ 表示参与程度 $K(i)\ge h_l$ 的所有局中人组成的清晰联盟，$v\left([K]_{h_l}\right)$ 为清晰联盟合作对策的支付函数，即 $v\left([K]_{h_l}\right)\in G_0(N)$。

阿里合伙人模式下，候选人必须获得合伙人内部半数以上支持，以及股东大会表决时多数通过方能成功当选为董事。假设合伙人集团有 n 个成员，股东大会有 m 个主要股东，可将合伙人集团和股东大会分别看作两个加权投票博弈 (N_1,Q_1) 和 (N_2,Q_2)：$\left\{\frac{n}{2};\underbrace{1,1,\cdots,1}_{n}\right\}$，$[q;\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_i,\cdots,\omega_m]$ 其中，ω_i 是股东 i 拥有的股权。获胜联盟 $Q=\left\{Q_1\cup Q_2:\omega(Q_1)>\frac{n}{2},\omega(Q_2)>q\right\}$。

定义 2.4 [10]设 v 是一个简单博弈，S 为一个决策者 i 参加的联盟。如果 S 胜利，而 $S-\{i\}$ 失利，则 S 称为决策者 i 的一个摆盟。

1) 每位合伙人的摆盟数 $b_0=C_{n-1}^{[n/2]}|Q_2|$；

$[n/2]$ 表示小于等于 $n/2$ 的最大正整数，Q_2 是 $[q;\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_m]$ 中所有获胜联盟的集合，$|Q_2|$ 是集合 Q_2 中含有的元素个数。

2) 股东 j 的摆盟数 $b(j)$：

$$b(j)=\sum_{r=\left[\frac{n}{2}\right]}^{n} C_n^r\left|S_j\right|=\begin{cases}\left|S_j\right|2^{n-1},\ n\text{ 为奇数}\\ \left|S_j\right|\left(2^{n-1}-\frac{1}{2}C_n^{\frac{n}{2}}\right),\ n\text{ 为偶数}\end{cases},\quad j=1,2,\cdots,m。$$

S_j 是博弈 (N_2,Q_2) 中股东 j 所有摆盟的集合。

合伙人集团的 Banzhaf 权力指数：

合伙人集团内部每位新的合伙人都是由原合伙人集团投票表决产生，因此合伙人集团是一个利益共同体，可以将他们看作一个意见一致的整体，计算整个合伙人集团的 Banzhaf 权力指数。

$$BBI\left(n^*\right)=\frac{1}{k+1},$$

其中，$k=\dfrac{\sum_{j=1}^{m}\sum_{r=[n/2]+1}^{n}C_n^r\left|S_j\right|}{nC_{n-1}^{[n/2]}\left|Q_2\right|}$ 为集团摆盟比，即所有股东的摆盟数总和除以合伙人集团的摆盟数。合伙人集团的投票权与集团摆盟比成反比。

每位股东的 Banzhaf 权力指数：

$$BBI\left(i^*\right)=z_i\left(1-\frac{1}{k+1}\right),$$

其中，$z_i=\left|S_i\right|/\sum_{j=1}^{m}\left|S_j\right|$ 为股东 i 的股东大会相对摆盟比，即博弈 $\left(N_2,Q_2\right)$ 中股东 i 的摆盟数除以所有股东的摆盟总数。

在经典合作博弈中，设 $N=\{1,2,\cdots,n\}$ 为全体局中人集合，N 的全部子集组成的集合为 $\mathcal{P}(N)$，$\mathcal{P}(N)$ 中的任意元素 W 为经典合作博弈中的联盟。

由于股份 $g(W)=\sum_{i\in w}g(i)$，$\forall W\in\mathcal{P}(N)$，也就是说联盟 W 的股份为 W 中所有局中人的股份之和，所以联盟越大，$g(W)$ 的值越大，如下。

性质 2.5 $\forall W,E\in\mathcal{P}(N)$，若 $W\subseteq E$，则 $g(W)\le g(E)$.

当股份 $g(W)$ 大于 50%时，联盟 W 才能成为获胜联盟。此时联盟 W 的效益值为 1，如下

性质 2.6 若 $g(W)>50\%$，则 $v(W)=1$；否则 $v(W)=0$.

3. 模糊 Banzhaf 权力指数的应用

为了研究局中人的参与程度对局中人投票权的影响，本节将用 Tsurumi 的方法和模糊数学相关理论，重新定义决策者模糊股权函数。

若决策者能够通过自己的加入使得一个原本失败的联盟转变为成功，该决策者就是“关键加入者”，即 $v(W)=1$ 且 $v(W/i)=0$，$\forall i\in W$，$\forall W\in\mathcal{P}(N)$。令 $W\in\mathcal{P}(N)$，如果 $g(W)=g(W\cup i)$，$\forall i\in N$，那么局中人 i 不是联盟 W 的“关键加入者”。

在模糊合作博弈中，设 $N=\{1,2,\cdots,n\}$ 为全体局中人集合，N 的全部模糊子集组成的集合为 $\mathcal{A}(N)$，$\mathcal{A}(N)$ 中的任意元素 K 为模糊联盟，用模糊集合的特征函数表示联盟 K 为

$$K:\mathcal{A}(N)\to K(i),$$

其中，$K(i)$ 是模糊集合 K 的特征函数，它被定义为 $K(i)\to[0,1]$，被表示为模糊联盟 K 中的局中人 i 的成员等级，$Supp(K)=\{i\in N\,|\,K(i)>0\}$。

利用**定义 2.3** [9]，可以重新定义模糊联盟的股权函数 g_T，$g_T:\mathcal{A}(N)\to\mathbb{R}$，也就是将 Tsurumi 定义的模糊博弈 $G_C(N)$ 上的支付函数 v_T 直接改为股权函数 g_T，用于计算 Banzhaf 权力指数，如下。

定义 3.1 给定模糊博弈 $v\in G(N)$，模糊联盟 $K\in\mathcal{A}(N)$，令 $Q(K)=\{K(i)\,|\,K(i)>0,i\in N\}$，$q(K)$ 为 $Q(K)$ 中元素的个数，将 $Q(K)$ 中的元素按照非减序列排列为 $h_1\le h_2\le\cdots\le h_{q(K)}$，则存在股权函数 $g_T:\mathcal{A}(N)\to\mathbb{R}$，具有形式

$$g_T(K)=\sum_{l=1}^{q(K)}g\left([K]_{h_l}\right)\cdot\left(h_l-h_{l-1}\right)$$

其中，$h_0=0$；$[K]_{h_l}=\{i\in N\mid K(i)\ge h_l\}$ 表示参与程度 $K(i)\ge h_l$ 的所有局中人组成的清晰联盟。

这样定义的股权函数 $g_T:\mathcal{A}(N)\to\mathbb{R}$ 具有单调性，如下。

引理 3.2 对于模糊联盟合作对策 $\mathcal{A}(N)$，股权函数 g_T 满足

$$g_T(K)\le g_T(H)，\ \forall K,H\in\mathcal{A}(N) \text{ 且 } K\subseteq H.$$

也就是说，$\mathcal{A}(N)$ 上的股权函数 g_T 关于局中人参与联盟的程度单调非减。

证明： 从 $[K]_h=\{i\in N\mid K(i)\ge h\}$ 和 $[H]_h=\{i\in N\mid H(i)\ge h\}$ 的定义知道，若 $K\subseteq H$，则 $[K]_h\subseteq[H]_h$。再由**性质 2.5** 得到，$g([K]_h)\le g([H]_h)$。最后由股权函数的定义得到，$g_T(K)\le g_T(H)$，$\forall K,H\in\mathcal{A}(N)$.

引理 3.3 对于模糊联盟合作对策 $\mathcal{A}(N)$，$g_T(K)=g_T(H)$ 当且仅当 $g([K]_h)=g([H]_h)$，$\forall K,H\in\mathcal{A}(N)$。

证明： 将 $Q(K)$ 和 $Q(H)$ 中的全部元素重新排列为 $Q(K,H)=\{h_1,h_2,\cdots,h_{q(K,H)}\}$，其中 $h_1<h_2<\cdots<h_{q(K,H)}$，$q(K,H)$ 是 $Q(K,H)$ 中元素的个数。根据股权函数的定义，

$g_T(K)-g_T(H)=\sum_{l=1}^{q(K,H)}\left(g([K]_{h_l})-g([H]_{h_l})\right)\cdot(h_l-h_{l-1})$。因此若 $g_T(K)-g_T(H)=0$，则

$g[K]_{h_l}-g[H]_{h_l}=0$。由于 $0<h\le q(K,H)$，所以有 $g[K]_h-g[H]_h=0$。

可以应用**引理 3.3** 得到，如果

$$g_T(K)=g_T(K\cup i)，\ \forall i\in N，\ K\in\mathcal{A}(N)$$

那么局中人 i 不是模糊联盟 K 的“关键加入者”。

利用文献[11]中的**定义 4.2.5**，可以重新定义具有区间值的模糊联盟股权函数 $\overline{g_T}$，$\overline{g_T}:\mathcal{A}(N)\to\mathbb{R}$ $\overline{g_T}:\mathcal{A}(N)\to\mathbb{R}$，同**定义 3.1** 的方法一样，如下。

定义 3.4 在模糊合作博弈中，令每个决策者 i 的模糊联盟程度为 $\overline{K(i)}=[K^-(i),K^+(i)]$，其中 $0<K^-(i)\le K^+(i)\le 1$，$q^-(K)$ 为 $Q^-(K)=\{K^-(i)\mid i=1,\cdots,n\}$ 中元素的个数，$q^+(K)$ 为 $Q^+(K)=\{K^+(i)\mid i=1,\cdots,n\}$ 中元素的个数，将 $\{K^-(i)\mid i=1,\cdots,n\}$ 和 $\{K^+(i)\mid i=1,\cdots,n\}$ 中的元素按照非减序列分别排列为 $0<h_1^-\le h_2^-\le\cdots\le h_{q^-(k)}^-\le 1$，$0<h_1^+\le h_2^+\le\cdots\le h_{q^+(k)}^+\le 1$，则定义具有区间值的模糊联盟股权函数 $\overline{g_T}:\mathcal{A}(N)\to[0,1]$ 为

$$\overline{g_T}(K)=\left[g_T^-(K),g_T^+(K)\right]=\left[\sum_{l=1}^{q^-(k)}g\left([K]_{h_l^-}\right)\cdot\left(h_l^--h_{l-1}^-\right),\sum_{l=1}^{q^+(k)}g\left([K]_{h_l^+}\right)\cdot\left(h_l^+-h_{l-1}^+\right)\right],$$

其中，$h_0^-=h_0^+=0$；$[K]_{h_l^-}=\{i\in N\mid K^-(i)\ge h_l^-\}$；$[K]_{h_l^+}=\{i\in N\mid K^+(i)\ge h_l^+\}$。

推论 3.5 在模糊合作博弈中，满足 $g_T^-(K)\le g_T^+(K)$，即 $g_T^-(K)$ 和 $g_T^+(K)$ 可以构成区间 $[g_T^-(K),g_T^+(K)]$。

证明： 由**引理 3.2** 可知，$\mathcal{A}(N)$ 上的股权函数 g_T 关于局中人参与联盟的程度单调非减。对于 $K^-(i)\le K^+(i)$，那么有 $g_T^-(K)\le g_T^+(K)$。

利用模糊联盟股权函数 $\overline{g_T}:\mathcal{A}(N)\to[0,1]$ 计算模糊 Banzhaf 权力指数的方法和原来计算 Banzhaf 权力指数的方法一样，这里将股份换成了股权函数，如果股权函数值大于 50%，那么对应的联盟为获胜联盟。这样计算的模糊 Banzhaf 权力指数具有单调性，如下。

引理 3.6 对于决策者 i，当 $0<h_1\le h_2\le 1$ 时，其模糊 Banzhaf 权力指数满足

$$\frac{\theta_i^{h_1}}{\sum_{j=1}^n\theta_j^{h_1}}\le\frac{\theta_i^{h_2}}{\sum_{j=1}^n\theta_j^{h_2}}.$$

也就是说，$\mathcal{A}(N)$ 上的模糊 Banzhaf 权力指数关于局中人参与联盟的程度单调非减。

证明： 由**推论 3.5** 可知，对于决策者 i，当 $0<h_1\le h_2\le 1$ 时，有 $g_T(K_{h_1})\le g_T(K_{h_2})$。根据**性质 2.6**，$g_T(K)$ 越大，就越有可能超过 50%，使得联盟 K 成为获胜联盟。因此 $v(K_{h_1})\le v(K_{h_2})$，即局中人 i 的参与程度越

高，N 中所有包含决策者 i 的获胜联盟子集就越多，局中人 i 成为“关键加入者”的次数 θ_i 也会随之增大，即 $\frac{\theta_i^{h_1}}{\sum_{j=1}^{n}\theta_j^{h_1}} \le \frac{\theta_i^{h_2}}{\sum_{j=1}^{n}\theta_j^{h_2}}$ 。

推论 3.7 在模糊合作博弈中，模糊 Banzhaf 权力指数为

$$\overline{\beta_i} = \left[\beta_i^-, \beta_i^+\right] = \left[\frac{\theta_i^-}{\sum_{j=1}^{n}\theta_j^-}, \frac{\theta_i^+}{\sum_{j=1}^{n}\theta_j^+}\right].$$

证明：由**引理 3.6** 可知，$\mathcal{A}(N)$ 上的模糊 Banzhaf 权力指数关于局中人参与联盟的程度单调非减。对于 $K^-(i) \le K^+(i)$，那么有 $\beta^-(K) \le \beta^+(K)$。

$\mathcal{A}(N)$ 上的模糊 Banzhaf 权力指数关于局中人参与联盟的程度单调非减的具体例子，如下所示。

例 1 假设一个公司有 4 个股东，他们持有股份分别为 $40\%, 10\%, 20\%, 30\%$ ，参与率分别为 $h_1, h_2 = 0.5, h_3 = 0.7, h_4 = 0.8$ 。由**定义 3.2** 可知，当 $0.175 < h_1 \le 0.3$ 时，只有一个获胜联盟，因此股东 1 的模糊 Banzhaf 权力指数 $\beta_1 = 1/4$；当 $0.3 < h_1 \le 0.525$ 时，获胜联盟有 $\{1,2,3,4\}$ 和 $\{1,3,4\}$，因此股东 1 的模糊 Banzhaf 权力指数 $\beta_1 = 1/3$；当 $0.525 < h_1 \le 0.65$ 时，获胜联盟有 $\{1,2,3,4\}$，$\{1,3,4\}$ 和 $\{1,2,4\}$，因此股东 1 的模糊 Banzhaf 权力指数 $\beta_1 = 3/8$； 当 $0.65 < h_1 \le 0.775$ 时，获胜联盟有 $\{1,2,3,4\}$， $\{1,3,4\}$， $\{1,2,4\}$ 和 $\{1,4\}$，因此股东 1 的模糊 Banzhaf 权力指数 $\beta_1 = 1/2$；当 $0.775 < h_1 \le 0.9$ 时，获胜联盟有 $\{1,2,3,4\}$，$\{1,3,4\}$，$\{1,2,4\}$，$\{1,2,3\}$ 和 $\{1,4\}$，因此股东 1 的模糊 Banzhaf 权力指数 $\beta_1 = 1/2$；当 $0.9 < h_1 \le 1$ 时，获胜联盟有 $\{1,2,3,4\}$，$\{1,3,4\}$，$\{1,2,4\}$，$\{1,2,3\}$，$\{1,4\}$ 和 $\{1,3\}$，因此股东 1 的模糊 Banzhaf 权力指数 $\beta_1 = 3/5$ 。由上面结果可以看出，$\mathcal{A}(N)$ 上股东 1 的模糊 Banzhaf 权力指数关于局中人参与联盟的程度单调非减，如图 1 所示：

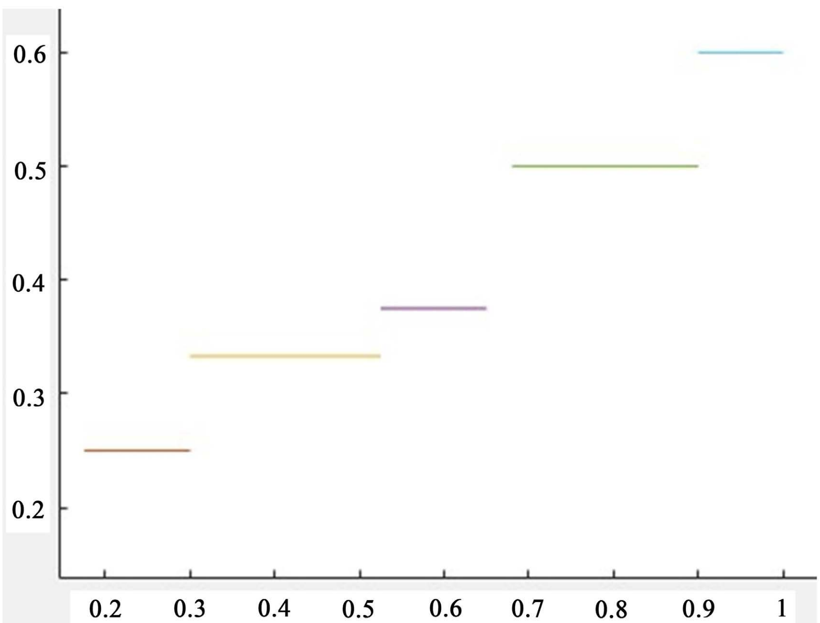

Figure 1. The fuzzy Banzhaf power index is monotonically non-decreasing about the degree of player 1 participating in the alliance
图 1. 模糊 Banzhaf 权力指数关于局中人 1 参与联盟的程度单调非减

推论 3.8 平行投票选择结构二元选择条件下，模糊 Banzhaf 权力指数为

$$\overline{\beta_j}=\left[\beta_j^-,\beta_j^+\right]=\left[\frac{\theta_i^-}{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}\theta_{x_j^i}^-},\frac{\theta_i^+}{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}\theta_{x_j^i}^+}\right]。$$

证明方法同上。

把模糊 Banzhaf 权力指数应用到**定义 2.4** 中，可以得到以下结论。

推论 3.9 给定模糊博弈 $v\in G(N)$，S 为一个决策者 i 参加的模糊联盟。如果 S 胜利，而 $S-\{i\}$ 失利，则 S 称为决策者 i 的一个摆盟。每位合伙人参与联盟的程度为 $k\in[0,1]$。

1) 每位合伙人的摆盟数 b_0'：$b_0'=C_{n-1}^{[n/2]}k\left|Q_2'\right|$；每位合伙人的模糊 Banzhaf 权力指数为

$$BBI'(n^*)=\frac{nb_0'}{\sum_{j=1}^{m}b'(j)+nb_0'}=\frac{1}{\dfrac{\sum_{j=1}^{m}b'(j)}{nb_0'}+1}=\frac{1}{\dfrac{\sum_{j=1}^{m}\sum_{r=\left[\frac{n}{2}\right]}^{n}C_n^r\left|S'(j)\right|}{nC_{n-1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\left|Q_j'\right|}+1}=\frac{1}{k'+1};$$

2) 股东 j 的摆盟数 $b'(j)$：$b'(j)=\sum_{r=[n/2]}^{n}C_n^r k\left|S_j'\right|$；每个股东的模糊 Banzhaf 权力指数为

$$BBI'(i^*)=\frac{b'(i)}{\sum_{j=1}^{m}b'(i)+nb_0'}=z_i'\left(1-\frac{1}{k'+1}\right),$$

其中，$k'=\dfrac{\sum_{j=1}^{m}\sum_{r=[n/2]+1}^{n}C_n^r\left|S_j'\right|}{nC_{n-1}^{[n/2]}\left|Q_j'\right|}$，$z_i'=\dfrac{\left|S_i'\right|}{\sum_{j=1}^{m}\left|S_j'\right|}$，$S_j'$ 是股东大会中股东 j 所有摆盟的集合。从公式中可以看出每位合伙人的联盟态度并不会影响 Banzhaf 权力指数。

4. 案例分析

根据阿里巴巴公司 2017 年公布的数据，阿里巴巴的股权结构如下表 1 所示：

Table 1. Alibaba equity structure table
表 1. 阿里巴巴股权结构表

序号	持股人	持有股份
1	软银	29.2
2	雅虎	15
3	马云	7
4	蔡崇信	2.5
5	其他	46.3

软银、雅虎、马云、蔡崇信等分别为阿里巴巴公司的前四位股东，而其余股份则被数量庞大的散户所占有，并无法对选举结果形成重要影响，所以在企业投票或表决等一般事务之时，仅顾及前四位股东的影响力。已知的选出董事方式是遵守简单多数准则(>50%)，且当前合作组织共有 36 位合伙人。股东软银、雅虎、马云、蔡崇信(这里分别令为 1, 2, 3, 4)分别以 $[0.8,0.98]$，$[0.82,0.98]$，$[0.84,0.99]$，$[0.86,1]$ 的参与率参与该合作项目，则由**定义 3.4** 知

$$h_1^-=0.8,h_2^-=0.82,h_3^-=0.84,h_4^-=0.86,$$

$$h_1^+=0.98,h_2^+=0.98,h_3^+=0.99,h_4^+=1$$

股东 1，2，3，4 组成联盟的预期股权为(这里只写(>50%)的股权)：

$$g_T^+\left(\{1,2,3\}\right)=\sum_{l=1}^{4} g\left(\left[\{1,2,3\}\right]_{h_l^+}\right)\cdot\left(h_l^+-h_{l-1}^+\right)=0.50246>0.5\,;$$

$$g_T^+\left(\{1,2,3,4\}\right)=\sum_{l=1}^{4} g\left(\left[\{1,2,3,4\}\right]_{h_l^+}\right)\cdot\left(h_l^+-h_{l-1}^+\right)=0.5255>0.5\,.$$

而

$$g_T^-\left(\{1,2,3\}\right)=\sum_{l=1}^{4} g\left(\left[\{1,2,3\}\right]_{h_l^-}\right)\cdot\left(h_l^- -h_{l-1}^-\right)=0.4154\,;$$

$$g_T^-\left(\{1,2,3,4\}\right)=\sum_{l=1}^{4} g\left(\left[\{1,2,3,4\}\right]_{h_l^-}\right)\cdot\left(h_l^- -h_{l-1}^-\right)=0.4369\,.$$

股权函数为

$$\overline{g_T}\left(\{1,2,3\}\right)=\left[0.4154,0.50246\right];\overline{g_T}\left(\{1,2,3,4\}\right)=\left[0.4369,0.5255\right].$$

情况一：当 $\overline{g_T}\left(\{1,2,3\}\right)=\left[0.4154,0.5\right]$，$\overline{g_T}\left(\{1,2,3,4\}\right)=\left(0.5,0.5255\right]$ 时，胜利联盟只有 $\{1,2,3,4\}$，且任何股东都是 $\{1,2,3,4\}$ 的“关键加入者”。$\left|s_j'\right|=1, j=1,2,3,4$，$\left|Q_2'\right|=1$，由推论 3.14 可知，

$$k'=\frac{\sum_{j=1}^{4}\sum_{r=19}^{36} C_{36}^{r}\left|s_j'\right|}{36\cdot C_{35}^{18}\left|Q_2'\right|}\approx 0.8613\,,$$

$$BBI'\left(n^*\right)=\frac{1}{k'+1}\approx 0.5372\,,$$

$$z_1'=z_2'=z_3'=z_4'=\frac{1}{4}\,,$$

$$BBI'\left(i\right)=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{k+1}\right)\approx 0.1157, i=1,2,3,4\,.$$

情况二：当 $\overline{g_T}\left(\{1,2,3\}\right)=\left(0.5,0.50246\right]$ 时，$\overline{g_T}\left(\{1,2,3,4\}\right)$ 只能取 $\left(0.5,0.5255\right]$，胜利联盟就有 $\{1,2,3\},\{1,2,3,4\}$，除了股东 4，任何股东都是 $\{1,2,3\},\{1,2,3,4\}$ 的“关键加入者”，$\left|s_j'\right|=2, j=1,2,3$，$\left|s_4'\right|=0$，$\left|Q_2'\right|=2$。同上 $BBI'\left(n^*\right)=0.646$，$z_i'=1/3$，$BBI'\left(i\right)=0.118$，$i=1,2,3$；$z_4'=0$，$BBI'\left(4\right)=0$。

根据情况一，每个股东的权力指数都是相同的，那么每个股东的投票权都是一样的，股东大会他们四人联合的获胜联盟，他们四人都是关键加入者，任何一人的离开都会使联盟由成功变为失败。合伙人的模糊 Banzhaf 权力指数为 53.72%，超过了股东的模糊权力指数，可见合伙人控制着公司的大部分投票权。

根据情况二，股东 1，2，3 的权力指数都是相同的，那么他们的投票权都是一样的，股东大会他们三人联合的获胜联盟，他们三人都是关键加入者，任何一个人的离开都会使联盟由成功变为失败。合伙人的模糊 Banzhaf 权力指数为 64.6%，超过了股东的模糊权力指数，可见合伙人控制者公司的大部分投票权。

将情况一与情况二做比较，发现随着 $\overline{g_T}\left(\{1,2,3\}\right)$ 的增大，合伙人的模糊 Banzhaf 权力指数变大。与原合伙人集团和股东大会的加权投票博弈系统[10]相比，本文多了一种新的结果，即情况一。在情况一中，合伙人与股东大会是独立的两个实体，合伙人控制着公司的大部分投票权，股东的联盟程度较低影响了股东的权力指数，导致股东的投票权变小。这表明股东的联盟程度影响了股东在公司决策中的影响力。

因此，本文的优势在于将股东的联盟程度对股东投票权的影响进行了分析，揭示了股东的联盟程度对股东投票权的重要性：每个股东的模糊 Banzhaf 权力指数关于局中人参与联盟的程度单调非减。这一

新的结果丰富了以前的研究内容，为我们更好地理解公司治理结构和决策过程提供了新的视角。

5. 结论

为研究局中人的联盟程度对局中人投票权的影响，本文使用模糊数的概念对股权进行模糊延拓，以更好地反映现实情况中的不确定性和模糊性。通过应用 Tsurumi 的方法，能够更好地量化决策者的投票权，并获得其模糊股权函数。与经典的 Banzhaf 权力指数相比，本文提出的方法将股权用股权函数来表示，研究了股东的联盟程度对股东在公司决策中的影响力，更加贴近现实。

运用模糊 Banzhaf 权力指数计算了合伙人集团和各股东的投票权并得到以下结论：每个股东的模糊 Banzhaf 权力指数关于局中人参与联盟的程度单调非减，证明了所提出的方法的可行性。

致　谢

感谢审稿人对原稿提出的宝贵意见和建议。

基金项目

本文由贵州省教育厅科学基金(黔科合 KY 字[2021]088 号，黔科合 KY 字[2022]301)、贵州省师范学院博士基金(No. 2021BS005)资助。

参考文献

[1] Shapley, L.S. and Shubik, M. (1954) A Method for Evaluating the Distribution of Power in a Committee Systems. *American Political Science Review*, **48**, 787-792. https://doi.org/10.2307/1951053

[2] Banzhaf, J.F. (1965) Weighted Voting Doesn't Work: A Mathematical Analysis. *Rutgers Law Review*, **19**, 317-343.

[3] Bilbao, J.M., Fernández, J.R., Jiménez, N. and López, J.J. (2002) Voting Power in the European Union Enlargement. *European Journal of Operational Research*, **143**, 181-196. https://doi.org/10.1016/S0377-2217(01)00334-4

[4] 赵昌文，庄道军. 中国上市公司的有效控制权及实证研究[J]. 管理世界, 2004(11): 126-135.

[5] 逢淑梅，易建新. 从 Banzhaf 指数看国有股减持[J]. 长春师范大学学报, 2005, 24(2): 69-72.

[6] 王华，汪贤裕. 国有资本对公共项目的相对控股分析——基于 Banzhaf 势指标的定量研究[J]. 求索, 2011, 31(4): 15-17.

[7] 姚大庆. 加权投票制、投票力与美国的金融霸权[J]. 世界经济研究, 2010, 29(3):43-47.

[8] 韩立岩，汪培庄. 应用模糊数学[M]. 北京：首都经济贸易大学出版社, 1992.

[9] Tsurumi, M., Tanino, T. and Inuiguchi, M. (2001) A Shapley Function on a Class of Cooperative Fuzzy Games. *European Journal of Operational Research*, **129**, 596-618. https://doi.org/10.1016/S0377-2217(99)00471-3

[10] 夏逸文，陈晔. 基于 Banzhaf 指数阿里合伙人模式投票权研究[J]. 数学的实践与认识, 2022, 52(5): 1-8.

[11] 陈雯. 基于模糊合作对策的动态联盟企业收益分配策略研究[D]: [硕士学位论文]. 北京：北京理工大学, 2007: 2-147.