Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(12), 3412-3425
Published Online December 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.1312354

具有奇异振荡外力的记忆型粘弹性发展方程一致吸引子的上半连续性

刘文婷

西北师范大学数学与统计学院，甘肃 兰州

收稿日期：2023年11月8日；录用日期：2023年12月8日；发布日期：2023年12月20日

摘　要

本文主要研究了具有奇异振荡外力项和弱阻尼项的记忆型粘弹性发展方程。首先证明了在外力项和记忆核满足恰当条件时方程一致吸引子 $\mathcal{A}^{\varepsilon}$ 在空间 $\mathcal{H} = H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times \mathcal{M}$ 中的一致有界性，进而证明了当 $\varepsilon \to 0^+$ 时一致吸引子的上半连续性。

关键词

奇异振荡，弱阻尼，记忆核，一致吸引子，上半连续性

Upper Semicontinuity of Uniform Attractors for Memory Viscoelastic Evolution Equation with Singularly Oscillating External Forces

Wenting Liu

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu

文章引用: 刘文婷. 具有奇异振荡外力的记忆型粘弹性发展方程一致吸引子的上半连续性[J]. 理论数学, 2023, 13(12): 3412-3425. DOI: 10.12677/pm.2023.1312354

Received: Nov. 8^{th}, 2023; accepted: Dec. 8^{th}, 2023; published: Dec. 20^{th}, 2023

Abstract

This paper is concerned with the development of memory viscoelastic equation with singularly oscillating external force terms and weak damping terms. First, we prove the consistent boundedness of the uniform attractor $\mathcal{A}^{\varepsilon}$ of the equation in $\mathcal{H} = H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times \mathcal{M}$ when the external force term and the memory kernel satisfy the appropriate conditions, and then the upper semicontinuity of the uniform attractor when $\varepsilon \to 0^+$ is achieved.

Keywords

Singular Oscillations, Weak Damping, Memory Kernel, Uniform Attractors, Upper Semicontinuity

1. 引言

吸引子主要描述从物理、化学、大气科学、生物医学等自然科学领域中涌现出来的大量具有能量耗散性的非线性发展型偏微分方程解的长时间渐近行为. 早在 1994 年 V.V. Chepyzhov 和 M.I. Vishik 在 [1] 中给出了非自治发展型方程所对应的无穷维非自治系统的一致吸引子的存在性理论和框架. 此后, 便有越来越多的研究人员对非自治系统的一致吸引子进行了深入的研究 [2–5]. 粘弹性理论是固体力学的主要模型之一, 它可用于聚合物、复合材料、智能材料、地质材料、高温下的金属及其结构中. 这种材料不仅有弹性特征, 而且有粘性特征, 因此被称为粘弹性体. 近几十年来, 这类粘弹性问题已被广泛关注和研究 [6–10]. 关于吸引子的上半连续性也有很多研究者做了广泛的研究 [11,12]. 2014 年, 秦玉明、冯保伟和张明在文 [5] 中研究了具有过去状态的非线性粘弹性方程一致吸引子的存在性, 但并未研究其一致吸引子的上半连续性. 而 2017 年, V.V. Chepyzhov 等在文 [13] 中研究了具有奇异振荡外力项的非自治粘弹性方程解的渐近行为. 因此基于现有的研究成果, 本文将研究如下具有奇异振荡外力项和弱阻尼项的记忆型粘弹性发展方程

$$
\begin{cases}
|u_t|^\rho u_{tt} - \Delta u_{tt} - \Delta u + \int_0^{+\infty} \mu(s)\Delta u(t-s)ds + f(u) + u_t = g_0(x,t) + \frac{1}{\varepsilon^{\rho_0}} g_1(x,t/\varepsilon), \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x \in \Omega, t > \tau, \\
u(x,t) = 0, \qquad\qquad\qquad (x,t) \in \partial\Omega \times [\tau, +\infty), \\
u(x,\tau) = u_0^\tau(x),\ u_t(x,\tau) = u_1^\tau(x),\ u(x,t) = u_\tau(x,t), \qquad x \in \Omega, \tau \in \mathbb{R}^+,
\end{cases} \tag{1.1}
$$

以及 $\varepsilon \to 0^+$ 时的极限方程

$$
\begin{cases}
|u_t|^\rho u_{tt} - \Delta u_{tt} - \Delta u + \int_0^{+\infty} \mu(s)\Delta u(t-s)ds + f(u) + u_t = g_0(x,t), \quad x \in \Omega, t > \tau, \\
u(x,t) = 0, \qquad\qquad\qquad (x,t) \in \partial\Omega \times [\tau, +\infty), \\
u(x,\tau) = u_0^\tau(x),\ u_t(x,\tau) = u_1^\tau(x),\ u(x,t) = u_\tau(x,t), \qquad x \in \Omega, \tau \in \mathbb{R}^+,
\end{cases} \tag{1.2}
$$

其中 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是具有光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界区域, $\varepsilon \in (0,1]$, $\rho_0 \in [0,1]$. $-\Delta u_{tt}$ 是色散项, μ 是记忆核, f 是非线性函数, u_t 是弱阻尼, $g_0(x,t) + \frac{1}{\varepsilon^\rho} g_1(x,t/\varepsilon)$ 表示奇异振荡外力, $u_\tau(x,t)$ (u 的过去状态) 是对所有的 $t \le \tau$ 时所给定的值, $|u_t|^\rho$ 代表非线性材料密度, 其中 ρ 是实数, 并且满足

$$
\text{当 } n \ge 3 \text{ 时}, 1 < \rho \le \tfrac{2}{n-2}; \quad \text{当 } n = 1,2 \text{ 时}, \rho > 1 .
$$

引入加权的 L^2 空间为

$$
\mathcal{M} = L^2_\mu\left(\mathbb{R}^+, H_0^1(\Omega)\right) = \left\{ u : (\mathbb{R}^+ \to H_0^1(\Omega) \mid \int_0^{+\infty} \mu(s)\|\nabla u(s)\|^2 ds < +\infty \right\},
$$

赋予下面的内积和范数

$$
(u,v)_{\mathcal{M}} = \int_0^{+\infty} \mu(s) \left(\int_\Omega \nabla u(s) \nabla v(s) dx \right) ds,
$$

$$
\|u\|^2_{\mathcal{M}} = \int_0^{+\infty} \mu(s)\|\nabla u(s)\|^2 ds.
$$

对任意的 $\sigma \in \mathbb{R}$, 我们定义标准的 Hilbert 空间族 $H^\sigma := D\left(A^{\sigma/2}\right)$, 其内积与范数分别为

$$
(u,v)_\sigma = \left(A^{\sigma/2}u, A^{\sigma/2}v\right)_{L^2},
$$

$$
\|u\|_\sigma := \left\|A^{\sigma/2}u\right\|_{L^2},
$$

其中 $A = -\Delta$ 是作用于 $L^2(\Omega)$ 上的严格正的自伴算子, $D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, 特别的,

$$
H^{-1} = H^{-1}(\Omega), \quad H = H^0 = L^2(\Omega), \quad H^1 = H_0^1(\Omega), \quad H^2 = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega).
$$

并且令 $\mathcal{H} = H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times \mathcal{M}$.

我们在系统中加入一个新的变量 $\eta = \eta^t(x,s)$, 则

$$
\eta = \eta^t(x,s) = u(x,t) - u(x,t-s), \quad t \ge \tau,\ (x,s) \in \Omega \times \mathbb{R}^+,
$$

直接计算可得

$$\eta_t^t(x,s) = -\eta_s^t(x,s) + u_t(x,t), \quad t \geq \tau,\ (x,s) \in \Omega \times \mathbb{R}^+,$$

并且有

$$\eta^\tau(x,s) = u_0^\tau(x) - u_0^\tau(x,\tau - s), \quad (x,s) \in \Omega \times \mathbb{R}^+,$$

$$\int_0^{+\infty} \mu(s)\Delta u(t-s)ds = \int_0^{+\infty} \mu(s)ds\Delta u - \int_0^{+\infty} \mu(s)\Delta\eta^t(s)ds,$$

将上式代入 (1.1), 得到一个新的系统

$$\begin{cases} |u_t|^\rho u_{tt} - \left(1 - \int_0^{+\infty} \mu(s)ds\right)\Delta u - \Delta u_{tt} - \int_0^{+\infty} \mu(s)\Delta\eta^t(s)ds \\ +f(u) + u_t = g_0(x,t) + \frac{1}{\varepsilon^{\rho_0}} g_1(x,t/\varepsilon), \qquad x \in \Omega, t > \tau, \\ \eta_t^t + \eta_s^t = u_t, \\ u = 0,\ (x,t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}, \qquad \eta^t = 0,\ (x,t,s) \in \partial\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \\ u(x,\tau) = u_0^\tau(x), \quad u_t(x,\tau) = u_1^\tau(x), \quad \eta^\tau(x,s) = u_0^\tau(x) - u(x,\tau - s). \end{cases} \tag{1.3}$$

我们假设下列条件成立:

(H1) 关于记忆核的假设

设 $\mu : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ 是一个有界的 C^1 函数, 满足

$$\mu(s) < +\infty,\ \ \alpha_0 = 1 - \int_0^{+\infty} \mu(s)ds > 0,$$

并假设存在一个正常数 ξ_2, 使得

$$\mu'(s) \leq -\xi_2\mu(s), \quad \forall s \geq 0.$$

(H2) 关于非线性项的假设

假设非线性函数 $f \in C^2(\mathbb{R}),\ f(0) = 0$, 并满足下列条件,

$$|f(u) - f(v)| \leq c_0\left(1 + |u|^p + +|v|^p\right)|u - v|, \quad \forall u, v \in \mathbb{R}, \tag{1.4}$$

其中

$$\text{当 } n \geq 3 \text{ 时}, 0 < p \leq \tfrac{4}{n-2}; \quad \text{当 } n = 1, 2 \text{ 时}, p > 0.$$

$$f(u)u \geq F(u) \geq 0, \quad \forall u \in \mathbb{R}, \tag{1.5}$$

其中 $F(u) = \int_0^u f(s)ds$.

(H3) 关于外力项的假设

假设函数 $g_0(t) := g_0(x,t)$ 以及 $g_1(t) := g_1(x,t)$ 在空间 $L_{loc}^2(\mathbb{R}; L^2(\Omega))$ 中平移有界, 即对于某些

正数 M_0, M_1, 有

$$\|g_0\|_{L_b^2}^2 := \sup_{t\in\mathbb{R}} \int_t^{t+h} \|g_0(s)\|^2 \, ds \le M_0^2, \tag{1.6}$$

$$\|g_1\|_{L_b^2}^2 := \sup_{t\in\mathbb{R}} \int_t^{t+h} \|g_1(s)\|^2 \, ds \le M_1^2, \tag{1.7}$$

(1.7) 的一个直接结果是

$$\int_t^{t+h} \|g_1(s/\varepsilon)\|^2 \, ds = \varepsilon \int_{t/\varepsilon}^{(t+h)/\varepsilon} \|g_1(s)\|^2 \, ds \le \varepsilon(1+1/\varepsilon)M_1^2 \le 2M_1^2,$$

且对任意的 $\varepsilon \in (0,1]$,

$$\|g_1(\cdot/\varepsilon)\| \, \|_{L_b^2}^2 \le 2M_1^2.$$

令

$$g^\varepsilon(x,t) := \begin{cases} g_0(x,t) + \frac{1}{\varepsilon^{\rho_0}} g_1(x,t/\varepsilon), & \varepsilon > 0, \\ g_0(x,t), & \varepsilon = 0, \end{cases}$$

因此对于 $\varepsilon > 0$,

$$\|g^\varepsilon\|_{L_b^2} \le M_0 + \sqrt{2}M_1 \frac{1}{\varepsilon^{\rho_0}},$$

所以, 设

$$Q_\varepsilon := \begin{cases} M_0 + \sqrt{2}M_1 \frac{1}{\varepsilon^{\rho_0}}, & \varepsilon > 0, \\ M_0, & \varepsilon = 0, \end{cases}$$

那么对于任意 $\varepsilon \in (0,1]$, 就有

$$\|g^\varepsilon\|_{L_b^2} \le Q_\varepsilon,$$

这意味着, 当 $\varepsilon \to 0^+$ 时, $\|g^\varepsilon\|_{L_b^2}$ 可以以速率 $\frac{1}{\varepsilon^{\rho_0}}$ 增长, 此外, 我们假设

$$\partial_t g_i \in L_b^2\left(\mathbb{R}; L^2(\Omega)\right), \quad i = 0, 1.$$

2. 预备知识

定义2.1 [3] (过程) 设 E 是 Banach 空间, 如果双参数族算子 $\{U(t,\tau)\} = \{U(t,\tau) \mid t \ge \tau, \tau \in \mathbb{R}\}$ 满足:

(1) $U(t,s)U(s,\tau) = U(t,\tau), \forall t \ge s \ge \tau, \tau \in \mathbb{R}$,

(2) $U(\tau,\tau) = I, \forall \tau \in \mathbb{R}$,

那么称 $\{U(t,\tau)\}$ 是 E 上的过程.

考虑过程族 $\{U_\sigma(t,\tau)\}$ 依赖于参数 $\sigma \in \Sigma$, σ 是过程 $\{U_\sigma(t,\tau)\}$ 的特征, Σ 是特征空间. 注意, 以

下的平移恒等式对于一般的过程族 $\{U_\sigma(t,\tau)\}$, $\sigma\in\Sigma$ 是成立的. 如果方程唯一可解, 并且对平移半群 $\{T(s)\mid s\geq 0\}$ 满足

$$T(s)\Sigma=\Sigma,$$

那么

$$U_\sigma(t+s,\tau+s)=U_{T(s)\sigma}(t,\tau),\ \ \forall\sigma\in\Sigma,t\geq\tau,\tau\in\mathbb{R},s\geq 0.$$

定义2.2 [3] (一致有界) 定义 $\mathcal{B}(E)$ 为有界集 E 的集合, 如果对任意集合 $B\in\mathcal{B}(E)$ 满足

$$U_{\sigma\in\Sigma}U_{\tau\in\mathbb{R}}U_{t\geq\tau}U_\sigma(t,\tau)B\in\mathcal{B}(E),$$

那么过程族 $\{U_\sigma(t,\tau)\}$, $\sigma\in\Sigma$ 是(关于 $\sigma\in\Sigma$)一致有界的.

定义2.3 [3] (一致吸收) 如果对任意的 $\tau\in\mathbb{R}$, 以及 $B\in\mathcal{B}(E)$, 存在 $t_0=t_0(\tau,B)\geq\tau$, 使得对所有的 $t\geq t_0$, 有 $U_{\sigma\in\Sigma}U_\sigma(t,\tau)B\subseteq B_0$, 那么集合 $B_0\in E$ 关于过程族 $\{U_\sigma(t,\tau)\}$, $\sigma\in\Sigma$ 是(关于 $\sigma\in\Sigma$)一致吸收的.

引理2.4 [14] (Gronwall 不等式) 设 $X\in L^1(0,T;\mathbb{R}^+)$ 满足

$$X(t)\leq a(t)+\int_0^t b(s)X(s)ds,\qquad \text{a.e. } t\in(0,T),$$

其中 $a,b\in L^\infty(0,T)$, $a(\cdot)$ 非减. 则有

$$X(t)\leq a(t)e^{\int_0^t b(s)ds}.$$

3. 主要结果

方程 (1.1) 的全局解 $(u_0^\tau,u_1^\tau,\eta^\tau)$ 的全局存在性和唯一性已被很多研究者所证明(可参见 [5] [13]). 该解满足

设 $(u_0^\tau,u_1^\tau,\eta^\tau)\in\mathcal{H}$ $(\forall\tau\in\mathbb{R})$, $\mathbb{R}_\tau=[\tau,+\infty)$, 假设 (H1)-(H3) 成立, 那么问题 (1.3) 存在唯一的全局解 $(u,u_t,\eta^t)\in C([0,T],\mathcal{H})$, 使得

$$u\in L^\infty\left(\mathbb{R}_\tau,H_0^1(\Omega)\right),u_t\in L^\infty\left(\mathbb{R}_\tau,H_0^1(\Omega)\right),u_{tt}\in L^2\left(\mathbb{R}_\tau,H_0^1(\Omega)\right),\eta^t\in L^\infty\left(\mathbb{R}_\tau,\mathcal{M}\right).$$

定理3.1 (一致吸引子存在性定理) 假设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界光滑区域, 并且 (H1)-(H3) 成立, 那么问题 (1.3) 对应的过程族 $\{U_{g^\varepsilon}(t,\tau)\}$, $g^\varepsilon\in\mathcal{H}(g^\varepsilon)$, $t\geq\tau$, $\tau\in\mathbb{R}$, 在 $\mathcal{H}$ 上存在紧的一致(关于 $g^\varepsilon\in\mathcal{H}(g^\varepsilon)$) 吸引子 $\mathcal{A}^\varepsilon$.

证明 该定理证明与文献 [5] 中定理 2.3 的证明类似, 详见文献 [5].

接下来证明本节主要结果, 即上半连续性的证明. 为了得到上半连续性, 对于 $\varepsilon\in(0,1]$, 以及 $\tau\in\mathbb{R}$, 首先考虑如下问题:

$$\begin{cases} |v_t|^\rho v_{tt} + Av + Av_{tt} + \int_0^{+\infty} \mu(s) A\zeta^t(s)ds = k(t/\varepsilon), \\ \zeta_t^t = T\zeta^t + v_t, \\ (v(\tau), v_t(\tau), \zeta^\tau) = (0,0,0), \end{cases} \tag{3.1}$$

其中对任意的 $\sigma \in \mathbb{R}$, $k \in L^2_{loc}(\mathbb{R}, H^\sigma)$. 设

$$k(t,\tau) = \int_t^\tau k(s)ds, \quad t \geq \tau,$$

则如下内容成立.

引理3.2 假设 $l \geq 0$,

$$\sup_{t\geq\tau,\tau\in\mathbb{R}} \left\{ \|k(t,\tau)\|_{\sigma-1}^2 + \int_t^{t+1} \|k(s,\tau)\|_\sigma^2 ds \right\} \leq l^2, \tag{3.2}$$

那么问题 (3.1) 有唯一解 $V(t) = (v(t), v_t(t), \zeta^t)$ 满足

$$\|V(t)\|_{\mathcal{H}^{\sigma-1}} \leq cl\varepsilon, \quad \forall t \geq \tau,$$

其中 $c > 0$ 依赖于 k .

注: 条件 (3.2) 是成立的. 例如, 若 $k \in L^\infty(\mathbb{R}, H^{\sigma-1}) \cap L^1_{loc}(\mathbb{R}, H^\sigma)$ 是一个周期 $\prod > 0$ 在零处有意义的时间周期函数, 则

$$\int_0^\Pi k(s)ds = 0.$$

引理3.3 问题 (3.1) 在 $\varepsilon = 1$ 时的唯一解 $V(t) = (v(t), v_t(t), \zeta^t)$ 满足不等式

$$\|V(t)\|_{\mathcal{H}^\sigma}^2 \leq c\int_\tau^t e^{-z(t-s)}\|k(s)\|_\sigma^2 ds,$$

对每个 $t \geq \tau$, 以及一些 $z > 0$ 依赖于初值 τ.

证明 该引理证明与文献 [13] 中的证明类似, 详见文献 [13].

现在加入一些条件, 来保证方程 (1.1) 一致吸引子 $\mathcal{A}^\varepsilon$ 的一致(关于 $\varepsilon \in (0,1]$)有界性, 这些条件只和函数 g_1 有关, 引入方程的外力项 $g_0(x,t) + \frac{1}{\varepsilon^{\rho_0}} g_1(x, t/\varepsilon)$ 中的奇异振荡, 条件如下:
设

$$G_1(t,\tau) = \int_\tau^t g_1(s)ds, \quad t \geq \tau, \ \tau \in \mathbb{R},$$

对于某些 $l \geq 0$, 有

$$\sup_{t\geq\tau,\tau\in\mathbb{R}} \left\{ \|G_1(t,\tau)\|_{\nu-1}^2 + \int_t^{t+1} \|G_1(s,\tau)\|_\nu^2 ds \right\} \leq l^2, \tag{3.3}$$

其中 $\nu \in \mathbb{R}$.

主要结论如下:

定理3.4 假设 (H1)-(H3) 成立, 以及 G_1 满足 (3.3), 那么, 对所有的 $\rho_0 \in [0,1]$, 一致吸引子 $\mathcal{A}^{\varepsilon}$ 在 $\mathcal{H}$ 中是一致(关于 $\varepsilon \in (0,1]$)有界的, 即

$$\sup_{\varepsilon\in(0,1]} \|\mathcal{A}^{\varepsilon}\|_{\mathcal{H}} < \infty.$$

证明 设 $\varepsilon \in (0,1]$ 是固定的, 设 $U(t) = (u(t), u_t(t), \eta^t)$ 是依赖于吸引子 $\mathcal{A}^{\varepsilon}$ 的,

$$\hat{g}^{\varepsilon}(t) = \hat{g}_0(t) + \frac{1}{\varepsilon^{\rho_0}}\hat{g}_1(t/\varepsilon) \in \mathcal{H}\left(g^{\varepsilon}\right).$$

特别地

$$\hat{G}_1(t,\tau) = \int_{\tau}^{t} \hat{g}_1(s)ds, \quad t \geq \tau.$$

对 $t > \tau$, 设 $V(t) = (v(t), v_t(t), \zeta^t)$ 是如下辅助问题的解. 为了得到一致吸引子的上半连续性, 对于 $\varepsilon \in (0,1]$, 以及 $\tau \in \mathbb{R}$, 首先考虑如下问题:

$$\begin{cases} |v_t|^{\rho} v_{tt} + Av + Av_{tt} + \int_0^{+\infty} \mu(s) A\zeta^t(s) ds = \frac{1}{\varepsilon^{\rho_0}}\hat{g}_1(t/\varepsilon), \\ \zeta_t^t = T\zeta^t + v_t, \end{cases} \tag{3.4}$$

具有初值 $v(\tau) = 0$.

根据引理 3.2, 有如下不等式

$$\|V(t)\|_{\mathcal{H}^{\nu-1}} \leq cl\varepsilon^{1-\rho_0}. \tag{3.5}$$

定义函数

$$W(t) = \left(\omega(t), \omega_t(t), \xi^t\right) = U(t) - V(t).$$

满足如下系统

$$\begin{cases} |u_t|^{\rho} u_{tt} - |v_t|^{\rho} v_{tt} + A\omega + A\omega_{tt} + \int_0^{+\infty} \mu(s) A\xi^t(s) ds + f(\omega) + \omega_t \\ = -[f(\omega + v) - f(\omega)] + \hat{g}_o(t), \\ \xi_t^t = T\xi^t + \omega_t. \end{cases} \tag{3.6}$$

定义

$$\omega_t = \xi_t^t + \xi_s^t$$

系统具有初值条件

$$W(\tau) = U(\tau).$$

用 $\omega_t + \alpha\omega$ 与方程 (3.6) 在 $\mathcal{H}$ 上作内积, 计算相加后可得

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(\|\nabla \omega\|^2+\left\|\nabla \omega_t\right\|^2+2\alpha\left(A\omega_t,\omega\right)+2(F(\omega),1)+\alpha\|\omega\|^2+\left\|\xi^t\right\|_{\mathcal{M}}^2\right)+2\|\omega_t\|^2\\
&\quad+2\left(\left|u_t\right|^\rho u_{tt},\omega_t\right)+2\alpha\left(\left|u_t\right|^\rho u_{tt},\omega\right)-2\left(\left|v_t\right|^\rho v_{tt},\omega_t\right)-2\alpha\left(\left|v_t\right|^\rho v_{tt},\omega\right)\\
&\quad+2\alpha(f(\omega),\omega)+2\alpha\left(\int_0^{+\infty}\mu(s)A\xi^t(s)ds,\omega\right)-\int_\Omega\int_0^\infty\mu'(s)\left|\nabla\xi^t\right|^2dsdx\\
&=2\left(-f(\omega+v)-f(\omega),\omega_t\right)+2\left(-f(\omega+v)-f(\omega),\alpha\omega\right)+2\left(\hat{g}_o(t),\omega_t\right)+2\left(\hat{g}_o(t),\alpha\omega\right),
\end{aligned}\tag{3.7}
$$

其中 $(F(\omega),1)=\int_0^\omega f(y)dy$.

令

$$
E_\alpha=\|\nabla\omega\|^2+\left\|\nabla\omega_t\right\|^2+2\alpha\left(A\omega_t,\omega\right)+2(F(\omega),1)+\alpha\|\omega\|^2+\left\|\xi^t\right\|_{\mathcal{M}}^2,
$$

先估计等式 (3.7)左端的项, 取 α 充分小, 且 λ 代表 Poincaré 常数.

$$
2\alpha(f(\omega),\omega)\geq\alpha\lambda\|\nabla\omega\|^2-c,\tag{3.8}
$$

$$
2\left(\left|u_t\right|^\rho u_{tt},\omega_t\right)-2\left(\left|v_t\right|^\rho v_{tt},\omega_t\right)\leq\frac{1}{2}\alpha\lambda\left\|\nabla\omega_t\right\|^2,\tag{3.9}
$$

$$
2\alpha\left(\left|u_t\right|^\rho u_{tt},\omega\right)-2\alpha\left(\left|v_t\right|^\rho v_{tt},\omega\right)\leq\frac{1}{2}\alpha\lambda\|\nabla\omega\|^2,\tag{3.10}
$$

$$
\begin{aligned}
-2\alpha\left(\int_0^{+\infty}\mu(s)\Delta\xi^t(s)ds,\omega\right)&\leq\alpha\|\nabla\omega\|\left\|\int_0^\infty\mu(s)\nabla\xi^t(s)ds\right\|\\
&\leq\frac{\alpha\lambda}{4}\|\nabla\omega\|^2+\frac{\alpha}{4}\left\|\xi^t\right\|^2.
\end{aligned}\tag{3.11}
$$

下面估计右端的项. 利用 (3.4) 及连续嵌入 $H_0^1\hookrightarrow L^p(\Omega)$, 得到

$$
2\left(\hat{g}_o,\omega_t\right)\leq\alpha\left\|\omega_t\right\|^2+\frac{1}{\alpha}\left\|\hat{g}_o\right\|^2,\tag{3.12}
$$

$$
2\left(\hat{g}_o,\alpha\omega\right)\leq\frac{1}{4}\alpha\lambda\|\nabla\omega\|^2+4\alpha\lambda^{-1}\left\|\hat{g}_o\right\|^2.\tag{3.13}
$$

由 Young 不等式, 以及 (1.4) 和 (3.6) 有

$$
\begin{aligned}
2\left(-f(\omega+v)-f(\omega),\omega_t\right)&=\int_\Omega-2f'(\omega+v)v\omega_tdx\leq2l\int_\Omega v\omega_tdx\\
&\leq\alpha\left\|\omega_t\right\|^2+\alpha^{-1}\lambda^{-1}l^2\|\nabla v\|^2,
\end{aligned}\tag{3.14}
$$

$$
\begin{aligned}
2\left(-f(\omega+v)-f(\omega),\alpha\omega\right)&=\int_\Omega-2\alpha f'(\omega+v)v\omega dx\leq2l\alpha\int_\Omega v\omega dx\\
&\leq\frac{1}{4}\alpha\lambda\|\nabla\omega\|^2+4l^2\alpha\lambda^{-1}\|\nabla v\|^2,
\end{aligned}\tag{3.15}
$$

将 (3.8)–(3.15) 代入 (3.7), 得

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}E_\alpha+\alpha\lambda\|\nabla\omega\|^2+2\left\|\omega_t\right\|^2+\frac{1}{2}\alpha\lambda\left\|\nabla\omega_t\right\|^2\\
&\leq\left(\alpha^{-1}\lambda^{-1}l^2+4l^2\alpha\lambda^{-1}\right)cl\varepsilon^{1-\rho_0}+\left(\alpha^{-1}+4\alpha\lambda^{-1}\right)\left\|\hat{g}_o\right\|^2+C,
\end{aligned}
$$

即

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}E_\alpha+\alpha\lambda\|\nabla\omega\|^2+2\|\omega_t\|^2+\frac{1}{2}\alpha\lambda\|\nabla\omega_t\|^2\\ \leq&C_1\left(1+\|\hat{g}_o\|^2+l\varepsilon^{1-\rho_0}\right),\end{aligned}$$

其中 $C_1=\max\{\alpha^{-1}\lambda^{-1}l^2+4l^2\alpha\lambda^{-1},\alpha^{-1}+4\alpha\lambda^{-1},C\}$, 则

$$\frac{d}{dt}E_\alpha+\frac{1}{2}\alpha\lambda\|W_\omega\|_{\mathcal{H}}^2\leq C_1\left(1+\|\hat{g}_0\|^2+l\varepsilon^{1-\rho_0}\right).$$

现在给出, 存在两个正常数 $\beta_1,\beta_2>0$, 使得

$$\beta_1\|W_\omega\|_{\mathcal{H}}^2-C\leq E_\alpha\leq\beta_2\|W_\omega\|_{\mathcal{H}}^2+C, \tag{3.16}$$

那么得到

$$\frac{d}{dt}E_\alpha+\varpi E_\alpha\leq C_1\left(1+\|\hat{g}_o\|^2+l\varepsilon^{1-\rho_0}\right),$$

其中 $\varpi=\frac{1}{2}\alpha\lambda>0$. 因此由 Gronwall 引理以及 (1.6), 可得

$$\begin{aligned}E_\alpha(t)&\leq E_\alpha(\tau)e^{-\varpi(t-\tau)}+C_1\frac{1}{\varpi}\left(1+l\varepsilon^{1-\rho_0}\right)\left(1-e^{-\varpi(\tau-t)}\right)+C_1\left(1+\frac{1}{\varpi}\right)M_0^2\\&\leq E_\alpha(\tau)e^{-\varpi(t-\tau)}+C_1\frac{1}{\varpi}\left(1+l^2\right)+C_1\left(1+\frac{1}{\varpi}\right)M_0^2\\&\leq E_\alpha(\tau)e^{-\varpi(t-\tau)}+C_2\left(1+l^2+M_0^2\right),\end{aligned}$$

其中 $C_2=C_1\left(\frac{1}{\varpi}+1\right)$. 由 (3.13) 可得

$$\|W_\omega(t)\|_{\mathcal{H}}^2\leq\beta_2\left(\|W_\omega(\tau)\|_{\mathcal{H}}\right)e^{-\varpi(t-\tau)}+C_3\left(1+l^2+M_0^2\right),$$

其中 $C_3=\beta_1^{-1}C_2+C$. 由于 $W_\omega(\tau)=W_u(\tau)$, 所以

$$\|W_\omega(t)\|_{\mathcal{H}}^2\leq\beta_2\left(\|W_u(\tau)\|_{\mathcal{H}}\right)e^{-\varpi(t-\tau)}+C_3\left(1+l^2+M_0^2\right),\quad\forall t\geq\tau,\tau\in\mathbb{R}.$$

由 (3.5) 可知

$$\|W_v(t)\|_{\mathcal{H}}^2\leq cl^2\varepsilon^{1-\rho}\leq cl^2,\quad\forall t\geq\tau,\tau\in\mathbb{R},$$

因此 $u(t)=\omega(t)+v(t)$ 满足

$$\|W_u(t)\|_{\mathcal{H}}^2\leq\beta_2\left(\|W_u(\tau)\|_{\mathcal{H}}\right)e^{-\varpi(t-\tau)}+C_4\left(1+l^2+M_0^2\right),\quad\forall t\geq\tau,\tau\in\mathbb{R},$$

这意味着, 对所有的 $\varepsilon\in(0,1]$, 过程 $\{U_{g^\varepsilon}(t,\tau)\}$ 拥有不依赖于 ε 的吸收集,

$$\mathcal{B}^*=\left\{\|W_u(t)\|_{\mathcal{H}}^2\leq C_4\left(1+l^2+M_0^2\right)\right\}.$$

故对所有的 $\varepsilon \in (0,1]$, 有

$$\mathcal{A}^{\varepsilon} \in \mathcal{B}^{*}.$$

下面证明, 当 $\varepsilon \to 0^{+}$ 时, 一致吸引子的上半连续性.

首先比较问题 (1.1) 和 (1.2) 在同一初值下的解. 为此, 对给定的 $\varepsilon > 0$, 设过程 $\{U_{g^{\varepsilon}}(t,\tau)\}$ 关于

$$\hat{g}^{\varepsilon}(t) = \hat{g}_0(t) + \frac{1}{\varepsilon^{\rho_0}}\hat{g}_1(t/\varepsilon) \in \mathcal{H}\left(g^{\varepsilon}\right)$$

的解为

$$U_{\varepsilon}(t) = \left(u_{\varepsilon}(t), u_{\varepsilon t}(t), \eta_{\varepsilon}^{t}\right),$$

那么对于任意固定的 $\tau \in \mathbb{R}$, 考虑 (当 $\varepsilon = 0$ 的) 解

$$U_0(t) = U_{\hat{g}_0(t)}(t,\tau)U_{\varepsilon}(\tau) = \left(u_0(t), u_{0t}(t), \eta_0^{t}\right).$$

由引理 3.2, 我们可以估计当 $\varepsilon = 0$ 时的情况. 有一致有界

$$\sup_{\varepsilon\in(0,1]} \|U_{\varepsilon}(t)\|_{\mathcal{H}} \le C, \quad \forall t \ge \tau, \tau \in \mathbb{R}. \tag{3.17}$$

现在定义这个误差

$$\bar{U}(t) = U_{\varepsilon}(t) - U_0(t) = \left(\bar{u}(t), \bar{u}_t(t), \bar{\eta}^{t}\right).$$

为了得到一致吸引子上半连续性的证明, 我们首先证明下面的估计式成立

引理3.5 下面的估计式成立

$$\|\bar{U}(t)\|_{\mathcal{H}} \le cl\varepsilon^{1-\rho_0}e^{c(t-\tau)}, \quad \forall t \ge \tau,$$

其中 $c > 0$ 依赖于 $\varepsilon, \tau, \hat{g}^{\varepsilon}$,以及 $U_{\varepsilon}(t)$.

证明 设 $V(t) = (v(t), v_t(t), \xi^{t})$ 是问题 (3.4) 带有初值 $V(\tau) = 0$ 的解, 那么有

$$W(t) = \bar{U}(t) - V(t) = \left(\omega(t), \omega_t(t), \xi^{t}\right),$$

满足问题 (3.6)

$$\begin{cases} |u_t|^{\rho} u_{tt} + |v_t|^{\rho} v_{tt} + A\omega + A\omega_{tt} + \int_0^{+\infty} \mu(s)A\xi^{t}(s)ds + f(\omega) + \omega_t \\ = -\left[f\left(u_{\varepsilon}\right) - f\left(u_0\right)\right], \\ \xi_t^{t} = T\xi^{t} + \omega_t, \end{cases}$$

具有初值 $W(\tau) = 0$, 从而得到

$$\frac{d}{dt}\|W\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \|\omega_t\|^2 + c_0 \|f(u_\varepsilon) - f(u_0)\|^2.$$

由 (1.7) 和 (3.17) , 有

$$\|f(u_\varepsilon) - f(u_0)\| \leq c_0\|\bar{u}\|_1 \leq c_0\|\omega\|_1 + c_0\|v\|_1,$$

由于

$$\|V(t)\|_{\mathcal{H}} \leq c\varepsilon^{1-\rho_0}, \quad \forall t \geq \tau,$$

结合以上估计, 得到

$$\frac{d}{dt}\|W\|_{\mathcal{H}}^2 \leq c\|\omega\|_{\mathcal{H}}^2 + c\varepsilon^{2(1-\rho_0)}.$$

由 Gronwall 引理即得

$$\|W\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \varepsilon^{2(1-\rho_0)} ce^{c(t-\tau)}, \quad \forall t \geq \tau.$$

接下来, 我们给出当 $\varepsilon \to 0^+$ 时, 一致吸引子上半连续性的证明.

定理3.6 设 $g_0(t)$ 和 $g_t(t)$ 在 $L^2_{loc}(\mathbb{R}; H)$ 中是平移有界的, 并且 G_1 满足 (3.3), 那么, 对任意的 $\rho_0 \in [0,1]$, 当 $\varepsilon \to 0^+$ 时, 一致吸引子 $\mathcal{A}^\varepsilon$ 在 $\mathcal{H}$ 中按 Hausdorff 半距离收敛到 $\mathcal{A}^0$, 即

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \operatorname{dist}_{\mathcal{H}}\left(\mathcal{A}^\varepsilon, \mathcal{A}^0\right) = 0.$$

证明 对 $\varepsilon > 0$, 设 U_ε 是 $\mathcal{A}^\varepsilon$ 的一个任意元素, 那么, 由引理 3.5 , 当 $t = 0$ 时,

$$\|U_\varepsilon - U_{\hat{g}_0}(0,\tau)U_\varepsilon(\tau)\|_{\mathcal{H}} \leq c\varepsilon^{1-\rho_0}e^{-c\tau}, \quad \forall \tau \leq 0.$$

与此同时, 集合 $\mathcal{A}^0$ 不仅关于 $\tau \in \mathbb{R}$ 一致吸收, 也关于 $\hat{g}_0 \in \mathcal{H}(g_0)$ 一致吸收, 因此,设 $\nu > 0$ 充分小, 由 (3.17), 我们有 $\tau = \tau(\nu) \leq 0$, 使得

$$\operatorname{dist}_{\mathcal{H}}\left(U_{\hat{g}_0}(0,\tau)U_\varepsilon(\tau), \mathcal{A}^0\right) \leq \nu.$$

进而

$$\operatorname{dist}_{\mathcal{H}}\left(U_\varepsilon, \mathcal{A}^0\right) \leq c\varepsilon^{1-\rho_0}e^{-c\tau} + \nu.$$

对任意的 $U_\varepsilon \in \mathcal{A}^\varepsilon$, 有如下结论

$$\operatorname{dist}_{\mathcal{H}}\left(\mathcal{A}^\varepsilon, \mathcal{A}^0\right) \leq c\varepsilon^{1-\rho_0}e^{-c\tau} + \nu,$$

以及

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \operatorname{dist}_{\mathcal{H}}\left(\mathcal{A}^\varepsilon, \mathcal{A}^0\right) \leq \nu.$$

最后, 当 $\nu \to 0$ 时, 证明完成.

基金项目

国家自然科学基金(批准号: 11961059)。

参考文献

[1] Chepyzhov, V.V. and Vishik, M.I. (1994) Attractors of Nonautonomous Dynamical Systems and Their Dimension. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, **73**, 279-333.

[2] Sun, C.Y., Cao, D.M. and Duan, J.Q. (2007) Uniform Attractors for Nonautonomous Wave Equations with Nonlinear Damping. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, **6**, 293-318. https://doi.org/10.1137/060663805

[3] Chepyzhov, V.V. and Vishik, M.J. (2001) Attractors for Equations of Mathematical Physics. In: *American Mathematical Society Colloquium Publications*, AMS. https://doi.org/10.1090/coll/049

[4] Song, X.L. and Hou, Y.R. (2015) Uniform Attractors for Three-Dimensional Navier-Stokes Equations with Nonlinear Damping. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **422**, 337-351. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2014.08.044

[5] Qin, Y.M., Feng, B.W. and Zhang, M. (2014) Uniform Attractors for a Nonautonomous Viscoelastic Equation with a Past History. *Nonlinear Analysis*, **101**, 1-15. https://doi.org/10.1016/j.na.2014.01.006

[6] Munoz Rivera, J.E. (1994) Asymptotic Behaviour in Linear Viscoelasticity. *Quarterly of Applied Mathematics*, **52**, 629-648. https://doi.org/10.1090/qam/1306041

[7] Park, J.Y. and Kang, J.R. (2010) Global Attractor for Hyperbolic Equation with Nonlinear Damping and Linear Memory. *Science China Mathematics*, **53**, 1531-1539. https://doi.org/10.1007/s11425-010-3110-z

[8] Guesmia, A. and Messaoudi, S.A. (2012) A General Decay Result for a Viscoelastic Equation in the Presence of Past and Finite History Memories. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, **13**, 476-485. https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2011.08.004

[9] Munoz Rivera, J.E., Lapa, E.C. and Barreto, R. (1996) Decay Rates for Viscoelastic Plates with Memory. *Journal of Elasticity*, **44**, 61-87. https://doi.org/10.1007/BF00042192

[10] Conti, M., Ma, T.F., Marchini, E.M. and Seminario Huertas, P.N. (2018) Asymptotics of Viscoelastic Materials with Nonlinear Density and Memory Effects. *Journal of Differential Equations*, **264**, 4235-4259. https://doi.org/10.1016/j.jde.2017.12.010

[11] Zhang, J.W., Liu, Z.M. and Huang, J.H. (2023) Upper Semicontinuity of Optimal Attractors for Viscoelastic Equations Lacking Strong Damping. *Applicable Analysis*, **102**, 3609-3628. https://doi.org/10.1080/00036811.2022.2088532

[12] Qin, Y.M., Zhang, J.P. and Sun, L.L. (2013) Upper Semicontinuity of Pullback Attractors for a Non-Autonomous Viscoelastic Equation. *Applied Mathematics and Computation*, **223**, 362-376. https://doi.org/10.1016/j.amc.2013.08.034

[13] Chepyzhov, V.V., Conti, M. and Pata, V. (2017) Averaging of Equations of Viscoelasticity with Singularly Oscillating External Forces. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, **108**, 841-868. https://doi.org/10.1016/j.matpur.2017.05.007

[14] Temam, R. (1997) Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics. 2nd Edition, Springer, New York.