Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(12), 3559-3564
Published Online December 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.1312370

Hans汉斯

一个自相似集的分形维数与测度的计算

周涛涛

东华理工大学理学院，江西 南昌

收稿日期：2023年11月13日；录用日期：2023年12月14日；发布日期：2023年12月27日

摘 要

有一些分形集是由部分与整体以某种方式相似形成的，比如说Cantor三分集。Falconer提出了自相似集的概念，并且研究了计算其维数的方法。本文将这一方法应用到构造的一个自相似集*F*中，求出集合*F*的分形维数，并且用定义求出集合*F*的Hausdorff测度。

关键词

自相似集，Hausdorff测度，分形维数

Calculation of Fractal Dimension and Measure of a Self Similar Set

Taotao Zhou

School of Science, East China University of Technology, Nanchang Jiangxi

Received: Nov. 13th, 2023; accepted: Dec. 14th, 2023; published: Dec. 27th, 2023

Abstract

There are some fractal sets that are formed by parts that are similar to the whole in some way, such as the Cantor triadic set. Falconer proposed the concept of self-similar sets and studied the method of calculating its dimensions. This paper applies this method to a constructed self-similar set *F*, finds the fractal dimension of the set *F*, and uses the definition to find the Hausdorff measure of the set *F*.

Keywords

Self-Similar Set, Hausdorff Measure, Fractal Dimension

文章引用: 周涛涛. 一个自相似集的分形维数与测度的计算[J]. 理论数学, 2023, 13(12): 3559-3564.
DOI: 10.12677/pm.2023.1312370

1. 研究背景与内容

分形几何结构的定义是 *Hausdoff* 提出，与非分形几何结构相比，分形的形状的维度一般来说不是整数，而是具有分形的 *Hausdoff* 维度。

一般来说，分形集都是杂乱无章的，但是有一种特殊的分形集——自相似集，它具有比较好的规则性，局部与整体之间存在一定的相似比例，如 *Cantor* 三分集、*Sierpinski* 垫片、*Koch* 曲线等。它们都可以由一个基本图形经过无限次的迭代从而形成的图形。满足开集条件的自相似集的 *Hausdorff* 维数求解已经被完美解决。然而，关于它的 *Hausdorff* 测度求解并不容易。特别是当分形集维数大于 1 时，通常只能求出其 *Hausdorff* 测度的估计值。

本文通过在 $[0,1]$ 区间上选取一个子集 F，其中 F 中的元素满足十进制展开式中只能由偶数组成，例如 $0.224608\cdots \in F$ 。即

$$F=\left\{x\in[0,1]: x\text{ 十进制展开式中只有偶数}\right\}.$$

F 是一个自相似集，它可以由 $[0,1]$ 区间反复去掉一些子区间所得到。具体步骤如下。

设 $F_0=[0,1]$，将 F_0 中区间 $\left[\frac{1}{10},\frac{2}{10}\right],\left[\frac{3}{10},\frac{4}{10}\right],\left[\frac{5}{10},\frac{6}{10}\right],\left[\frac{7}{10},\frac{8}{10}\right],\left[\frac{1}{10},\frac{10}{10}\right]$ 去掉之后得到集合 F_1 。按此方法继续进行下去，在第 k 步中， F_k 中有 5^k 个长度为 $\frac{1}{10^k}$ 小区间。F 是属于所有 $F_k\,(k\geq 1)$ 的数组成的。即(图 1)。

$$F=\bigcap_{k=0}^{\infty}F_k .$$

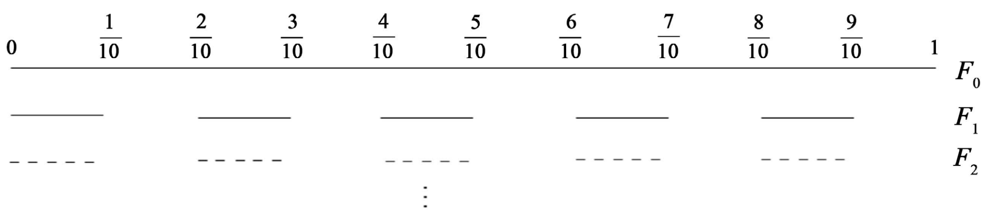

Figure 1. Construction of Set F
图 1. 集合 F 的构造

定理 1 对上述定义的集合 F，$\mathcal{H}^s(F)=1$， $s=\dim_H F=\dim_B F=\dim_P F=\frac{\ln 5}{\ln 10}$.

2. 预备知识

2.1. 分形维数与 Hausdorff 测度

定义 1 [1]设 E 为 $\mathbf{R}^n$ 的子集，s 是非负数，对任意的 $\delta>0$，定义

$$\mathcal{H}_\delta^s(E)=\inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}|U_i|^s:\{U_i\}\text{为}E\text{ 的一个}\delta\text{覆盖}\right\}.$$

由下确界定义知，当δ变小时，$\mathcal{H}_\delta^s(E)$变大，且当$\delta\to 0$时趋于一极限。记为$\mathcal{H}^s(E)=\lim_{\delta\to 0}\mathcal{H}_\delta^s(E)$，称$\mathcal{H}^s(E)$为集合$E$的$s$维*Hausdorff*测度。

定义2 [1]使得$\mathcal{H}^s(E)$从∞跳到0，称这个临界值s为E的*Hausdorff*维数，记为$\dim_H E$。即

$$\dim_H E=\inf\left\{s\ge 0:\mathcal{H}^s(E)=0\right\}=\sup\left\{s:\mathcal{H}^s(E)=\infty\right\}.$$

2.2. 引理

引理1 [2]设F是$IFS(S_1,\cdots,S_m)$的吸引子，相似变换S_i的压缩比为c_i，满足

$$F=\bigcup_{i=1}^m S_i(F),$$

则

$$s=\dim_H F=\dim_B F=\dim_P F,$$

其中s是方程

$$\sum_{i=1}^m c_i^s=1$$

的唯一正数解，且有$0<\mathcal{H}^s<\infty$。

定义3 [3]设S是压缩比为c的相似压缩，即满足映射$S:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$，$\forall x,y\in\mathbf{R}^n$，有$\left|S(x)-S(y)\right|=c|x-y|$，$0<c<1$。设相似变换$S_i$的压缩比为$c_i,1\le i\le m$，则存在唯一的不变集$F=\bigcup_{i=1}^m S_i(F)$，不变集$F$称为对于相似压缩族$S_i$的自相似集。

定义4 [3]设F是$IFS(S_1,\cdots,S_m)$所生成的自相似集，如果存在有界非空开集V，满足$V\supset\bigcup_{i=1}^m S_i(F)$，$S_i(V)\cap S_j(V)=\varnothing$，$i\ne j$，则称$F$满足开集条件。

3. 定理1的证明

证明过程分成两部分。第一部分确定F的分形维数。第二部分根据自然覆盖定理推出$\mathcal{H}^s(F)\le 1$，然后构造出一个关于F的δ覆盖，有$\mathcal{H}^s(F)\ge 1$，且该覆盖内的区间长度s次方求和都要小于F的任意δ覆盖。则根据s维Hausdorff测度定义可知$\mathcal{H}^s(F)=1$，$s=\dim_H F=\frac{\ln 5}{\ln 10}$。

证明 $s=\dim_H F=\dim_B F=\dim_P F=\frac{\ln 5}{\ln 10}$.

由F的构造可知，F是五个压缩比为$\frac{1}{10}$的相似映射的吸引子，即

$$F=\bigcup_{i=1}^5 S_i(F),$$

其中$S_i(x)=\frac{1}{10}x+\frac{2(i-1)}{10}$。

取V为F_0的内部，则有$\forall i\ne j$，$i,j\le 5$，$S_i(V)\cap S_j(V)=\varnothing$，且$V\supset\bigcup_{i=1}^5 S_i(F)$，则$F$满足开集条件。于是由引理1知，$s=\dim_H F=\dim_B F=\dim_P F=\frac{\ln 5}{\ln 10}$，即$s$为方程$5\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^s=1$的解。

证明 $\mathcal{H}^s(F)=1$。

证明 $\mathcal{H}^s(F)\le 1$。

在 F 的构造中选取其 k 阶水平区间，则 F_k 包含了 5^k 个长度为 $\frac{1}{10^k}$ 的基本区间。则 F_k 为 F 的一个 $\delta=\frac{1}{10^k}$ 覆盖，则根据 $\mathcal{H}_\delta^s(F)$ 定义可得

$$\mathcal{H}_\delta^s(F)\le 5^k\cdot\left(\frac{1}{10^k}\right)^s=1.$$

令 $\delta\to 0$，则

$$\mathcal{H}^s(E)\le 1,\ s=\dim_H F=\frac{\ln 5}{\ln 10}.$$

证明 $\mathcal{H}^s(F)\ge 1$。

第一步：设区间族 $\mathcal{U}$ 为 F 的任意 $\delta(\delta<1)$ 覆盖，且 F 为闭集，则可将 $\mathcal{U}$ 中区间稍微扩大，使得变成开区间。形成的一个关于 F 的开覆盖。则由有限开覆盖定理可知：存在有限开区间覆盖 F，记此开区间族为 $\mathcal{U}_1$。

第二步：$\forall u_1=(x_1,y_1), u_2=(x_2,y_2)$，若 $u_1\cap u_2\ne\varnothing$，则 $\exists z\in(x_2,y_1), \text{s.t.}\ z\notin F$。从而用新的区间 $u_1'=(x_1,z), u_2'=(z,y_2)$ 代替 u_1,u_2。以此类推，则得到一个关于 F 的 δ 覆盖 $\mathcal{U}_1'$。并且 $\mathcal{U}_1'$ 中的元素是两两不相交的。

$\forall u=(x,y)\in\mathcal{U}_1'$，令 $x'=\sup\{p:(x,p)\cap F=\varnothing\}$，$y'=\inf\{q:(q,y)\cap F=\varnothing\}$，则由确界定义以及 F 为闭集可知：$x',y'\in F$，且 x' 为 F 某基本区间的左端点，y' 为 F 某基本区间的右端点。令 $u'=[x',y']$，则有 $u'\cap F=u\cap F$。由 u 的任意性可知，存在一个 F 的 δ 覆盖 $\mathcal{U}_2$，且 $\mathcal{U}_2$ 中的元素是两两不相交的闭集，每一个区间端点都落在 F 上。

第三步：将区间族 $\mathcal{U}_2$ 中的元素都分解成 F 的某基本区间。

$\forall u\in\mathcal{U}_2$，存在唯一的正整数 k，使得

$$\frac{1}{10^{k+1}}\le|u|<\frac{1}{10^k}.$$

则 u 至少与一个 k 阶基本区间相交。由 u 的定义可知，若 u 不是基本区间，则 u 至少与两个 $k+1$ 阶基本区间相交。不妨设 u 与 $k+1$ 阶基本区间中的 $F_{k,i},\cdots,F_{k,j}$ 相交，其中 $j\le i+5$。令

$$u=L_1\cup\left(\bigcup_{p=1}^{j-1}I_{k,p}\right)\cup\left(\bigcup_{p=i+1}^{j-1}F_{k,p}\right)\cup L_2.$$

故可将 u 分解成四部分。其中 $I_{k,p}$ 为某 k 阶基本间隔区间，$F_{k,p}$ 为某 k 阶基本区间，L_1 与 L_2 分别为 F 与某个 $k+1$ 阶基本区间的交集(图 2)。

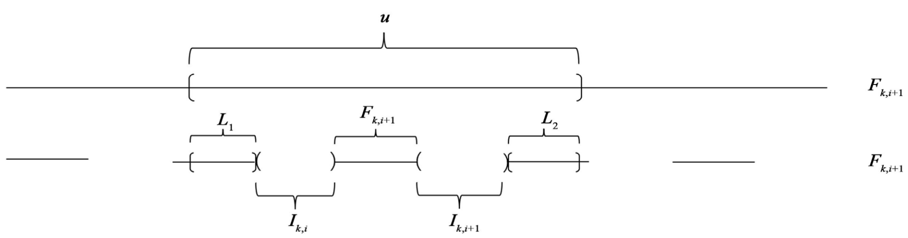

Figure 2. Decomposition of interval u

图 2. 区间 u 的分解

由于 $I_{k,p}\cap F=\varnothing$，故令 $u'=u\setminus\left(\bigcup_{p=1}^{j-1}I_{k,p}\right)$，则

$$u'\cap F=u\cap F.$$

为方便讨论，在不混淆的前提下，将简记 u 的分解，令

$$u=L_1\cup\left(\bigcup_{p=1}^{m}I_p\right)\cup\left(\bigcup_{p=1}^{m-1}F_p\right)\cup L_2.$$

其中 $m=1,2,3,4$。

① 当 $m=1$ 时，$u=L_1\cup I_1\cup L_2$，则

$$|u|^s=\left||L_1|+|I_1|+|L_2|\right|^s.$$

而 $|I_1|\ge\frac{1}{2}|L_1|+\frac{1}{2}|L_2|$，故

$$|u|^s=3^s\cdot\left|\frac{1}{2}|L_1|+\frac{1}{2}|L_2|\right|^s\ge\frac{1}{2}\cdot 3^s\cdot\left(|L_1|^s+|L_2|^s\right)\ge|L_1|^s+|L_2|^s.$$

令 $u'=L_1\cup L_2$，且有 $u'\cap F=u\cap F$，且 $|u|^s\ge|u'|^s$。

② 当 $m=2$ 时，$u=L_1\cup I_1\cup I_2\cup F_1\cup L_2$。令 $u'=L_1\cup F_1\cup L_2$，即 $u=u'\cup I_1\cup I_2$。从而有

$$|u|^s=\left||u'|+|I_1|+|I_2|\right|^s\ge|u'|^s.$$

③ 当 $m=3$ 时，$u=L_1\cup\left(\bigcup_{p=1}^{3}I_p\right)\cup\left(\bigcup_{p=1}^{2}F_p\right)\cup L_2$。$u'=L_1\cup\left(\bigcup_{p=1}^{2}F_p\right)\cup L_2$，则 $u=u'\cup\left(\bigcup_{p=1}^{3}I_p\right)$，因此有

$$|u|^s=\left||u'|+|I_1|+|I_2|+|I_3|\right|^s\ge|u'|^s.$$

且有 $u'\cap F=u\cap F$。

④ 当 $m=4$ 时，$u=L_1\cup\left(\bigcup_{p=1}^{4}I_p\right)\cup\left(\bigcup_{p=1}^{3}F_p\right)\cup L_2$。$u'=L_1\cup\left(\bigcup_{p=1}^{3}F_p\right)\cup L_2$，则 $u=u'\cup\left(\bigcup_{p=1}^{4}I_p\right)$，因此有

$$|u|^s=\left||u'|+|I_1|+|I_2|+|I_3|+|I_4|\right|^s\ge|u'|^s.$$

综上，$\forall u\in\mathscr{U}_2$，都可以将 u 分解成四部分，且有 $|u|^s\ge|u'|^s$ 成立。

注意到 u 的分解只有 L_1 和 L_2 不是基本区间，故下一步分解只对 L_1 和 L_2 进行如上分解，则经有限步后必然得到全都是基本区间的组合。

最后由 u 的任意性知，可得到区间族 $\mathscr{U}_3$，其中 $\mathscr{U}_3$ 中的区间均为 F 的某个基本区间，且有

$$\sum_{u\in\mathscr{U}_3}|u|^s\le\sum_{u\in\mathscr{U}_2}|u|^s,\ s=\frac{\ln 5}{\ln 10}.$$

第四步：将 $\mathscr{U}_3$ 中的基本区间全部分解成 F 的同阶基本区间。

设 $\mathscr{U}_3$ 中基本区间阶数最大是 N 阶。对任意的阶数比 N 小的 k 阶基本区间 u，该 k 阶区间可以分解成 5^{N-k} 个长度为 $\frac{1}{10^N}$ 的 N 阶基本区间。不妨设分解为 $\{E_i\}_{i=1}^{5^{N-k}}$。而

$$\sum_{i=1}^{5^{N-k}}|E_i|^s=5^{N-k}\cdot\left(\frac{1}{10^N}\right)^s=5^{-k}.$$

即有

$$\sum_{i=1}^{5^{N-k}} |E_i|^s = |u|^s = 5^{-k}.$$

由于 $\mathcal{U}_3$ 是 F 的覆盖，故

$$\sum_{u\in\mathcal{U}_3} |u|^s = \sum_{u\in\mathcal{U}_3} \sum_{E_i\in u} |E_i|^s = 5^N \cdot \left(\frac{1}{10^N}\right)^s = 1$$

而 $\mathcal{U}$ 为 F 的任意 $\delta(\delta<1)$ 覆盖，且有 $\mathcal{U} \supset \mathcal{U}_3$。

故由 $\mathcal{H}_\delta^s(F)$ 定义可知：

$$\mathcal{H}_\delta^s(F) \geq 1.$$

令 $\delta \to 0$，可得

$$\mathcal{H}^s(F) \geq 1, s = \dim_H F = \frac{\ln 5}{\ln 10}.$$

最终，我们证明定理 1。

参考文献

[1] 肯尼迪, 法尔科内. 分形几何——数学基础区其应用[M]. 曾文曲, 刘世耀, 戴连贵, 高占阳, 译. 沈阳: 东北大学出版社, 1999: 113-121.

[2] 肯尼迪, 法尔科内. 分形几何中的技巧[M]. 曾文曲, 王向阳, 陆卖, 译. 沈阳: 东北大学出版社, 1997: 42-43.

[3] 文志英. 分形几何的数学基础[M]. 上海: 上海科技教育出版社, 2000: 114-119.