Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(12), 3798-3802
Published Online December 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.1312393

关于非线性矩阵方程 $X^s - A_1^* X^{-t_1} A_1 - A_2^* X^{-t_2} A_2 = Q$ 的若干结果

裴伟娟

河南开封科技传媒学院，河南 开封

收稿日期：2023年11月21日；录用日期：2023年12月22日；发布日期：2023年12月30日

摘 要

本文主要研究非线性矩阵方程 $X^s - A_1^* X^{-t_1} A_1 - A_2^* X^{-t_2} A_2 = Q$ 的正定解，其中 A_1、A_2 为 $n \times n$ 复矩阵，s、t_1、t_2 为正整数，Q为 $n \times n$ 正定矩阵。文中将矩阵方程等价变形后，基于线性方程组在系数矩阵非列满秩时有非零解和矩阵特征值、特征向量的定义，研究了该矩阵方程正定解的最大和最小特征值的性质。通过正定矩阵的Cholesky分解给出了该非线性矩阵方程存在Hermitian正定解的新的充分必要条件。

关键词

非线性矩阵方程，**Hermitian**正定解，特征值，解的存在性

Some Results on the Nonlinear Matrix Equation $X^s - A_1^* X^{-t_1} A_1 - A_2^* X^{-t_2} A_2 = Q$

Weijuan Pei

Henan Kaifeng College of Science Technology and Communication, Kaifeng Henan

Received: Nov. 21st, 2023; accepted: Dec. 22nd, 2023; published: Dec. 30th, 2023

Abstract

In this paper, we mainly investigate the Hermitian positive definite solution of the nonlinear matrix equation $X^s - A_1^* X^{-t_1} A_1 - A_2^* X^{-t_2} A_2 = Q$, where A_1, A_2 are $n \times n$ complex matrices, s, t_1, t_2 are positive integers and Q is an $n \times n$ positive definite matrix. Firstly, by equivalent deformation of the matrix equation, with the help of the theory that linear equations have non-zero solutions when the coefficient matrix is not full columnrank, and the definition of matrix eigenvalue and ei-

文章引用: 裴伟娟. 关于非线性矩阵方程 $X^s - A_1^* X^{-t_1} A_1 - A_2^* X^{-t_2} A_2 = Q$ 的若干结果[J]. 理论数学, 2023, 13(12): 3798-3802. DOI: 10.12677/pm.2023.1312393

genvector, the property of the maximum and minimum eigenvalues of positive definite solutionsis studied. Next, by Cholesky decomposition of positive definite matrix, a new sufficient and necessary condition for the equation to have a positive definite solution is proposed.

Keywords

Nonlinear Matrix Equation, Hermitian Positive Definite Solution, Eigenvalue, Existence

1. 引言

非线性矩阵方程在运输理论、控制理论、量子力学、动态规划、统计学、梯形网络等学科和工程计算中都有着广泛的应用，其中的很多实际问题都会转化为矩阵方程的求解问题。比如，在控制系统的设计中，确定系统的稳定性和系统的最优控制过程中的有些问题，会转化为非线性矩阵方程的求解的问题。在工程计算中，化简大型线性方程组的过程中，求解矩阵方程是关键。因此，对非线性矩阵方程解的存在性和求解问题的研究，是近些年来数值代数和非线性分析领域中研究及探讨的重要课题之一。

早在二十世纪九十年代初，人们就开始对矩阵方程 $X+A^*X^{-1}A=Q$ 进行研究，随着研究的深入，人们开始研究该方程的扩展形式 $X^s+A^*X^{-t}A=Q$，对该矩阵方程正定解的存在性、正定解的性质、正定解的扰动、正定解的迭代算法等理论进行了系统地研究[1] [2] [3] [4] [5]。对于更一般形式的非线性矩阵方程

$$X^s-A_1^*X^{-t_1}A_1-A_2^*X^{-t_2}A_2=Q \tag{1}$$

Al-Dubiban 和 El-Sayed 推导出当 $s,t\in(0,1]$ 时非线性方程 $X-A^*X^{-s}A-B^*X^{-t}B=I$ 正定解存在的必要条件和充分条件[6]。段雪峰，廖安平等利用正规锥上的混合单调算子的不动点定理证明了矩阵方程 $X-\sum_{i=1}^{m}A_i^*X^{-\sigma_i}A_i=Q\left(0<|\sigma_i|<1\right)$ 存在唯一正定解，并给出了求得此唯一正定解的数值解法[7]。Lim 利用 Thompson 度量下的压缩映像原理证明了矩阵方程存在唯一正定解[8]。段雪峰等利用范数不等式和 Thompson 度量，推导出关于矩阵方程 $X-\sum_{i=1}^{m}A_i^*X^{-\sigma_i}A_i=Q\left(0<|\sigma_i|<1\right)$ 的两个扰动界[9]。但对于更一般的情况，s、t_1、t_2 为正整数时，学者研究得还比较少，还有许多问题需要进一步研究。

本文在 s、t_1、t_2 为正整数的条件下，研究了矩阵方程(1)正定解的最大和最小特征值的性质以及存在正定解的充分和必要条件，将对矩阵方程 $X^s+A^*X^{-t}A=Q$ 的研究成果，推广到了更一般形式的矩阵方程上。

对于 Hermitian 正定矩阵文中用 $A>O\left(A\geq O\right)$ 表示 A 是正定矩阵(半正定矩阵)；对矩阵 A，A^* 表示 A 的共轭转置，$\lambda_1(A)$、$\lambda_n(A)$ 表示矩阵 A 的最大和最小特征值，$\lambda_i(A)$ 表示矩阵 A 的第 i 个特征值，$r(A)$ 表示矩阵 A 的秩。

2. 主要结论

引理 1 [10] (矩阵的 Cholesky 分解定理)设 A 为 Hermitian 正定矩阵，则存在一个对角元为正数的下三

角矩阵 L，使得 $A=L^{*}L$ 成立。

引理 2 [11]对于 $n\times n$ Hermitian 正定矩阵 P 和 Q，$1\le i,j\le n$，下面不等式成立：

$$\lambda_{i+j-1}(PQ)\le\lambda_i(P)\lambda_j(Q),\quad i+j\le n+1,$$

$$\lambda_{i+j-n}(PQ)\ge\lambda_i(P)\lambda_j(Q),\quad i+j\ge n+1。$$

引理 3 [12]若 $A>B>O(A\ge B>O)$，则当 $\alpha\in(0,1]$ 时有 $A^{\alpha}>B^{\alpha}>0\left(A^{\alpha}\ge B^{\alpha}>O\right)$；则当 $\alpha\in[-1,0)$ 时有 $0<A^{\alpha}<B^{\alpha}\left(0<A^{\alpha}\le B^{\alpha}\right)$。

定理 1 当 A_1、A_2 为奇异矩阵且满足 $r\begin{pmatrix}A_1\\A_2\end{pmatrix}<n$ 时，如果矩阵方程(1)有正定解 X，则

$$\lambda_n\left(Q^{-\frac{1}{2}}X^{s}Q^{-\frac{1}{2}}\right)=1.$$

证明：矩阵方程(1)等价于

$$Q^{-\frac{1}{2}}X^{s}Q^{-\frac{1}{2}}-Q^{-\frac{1}{2}}A_1^{*}X^{-t_1}A_1Q^{-\frac{1}{2}}-Q^{-\frac{1}{2}}A_2^{*}X^{-t_2}A_2Q^{-\frac{1}{2}}=I. \tag{2}$$

若矩阵 A_1、A_2 为奇异矩阵且 $r\begin{pmatrix}A_1\\A_2\end{pmatrix}<n$，则线性方程组 $\begin{pmatrix}A_1\\A_2\end{pmatrix}x=0$ 有非零解，存即在非零向量 x_0 使得 $A_1x_0=A_2x_0=0$。从而，$A_1Q^{-\frac{1}{2}}Q^{\frac{1}{2}}x_0=A_2Q^{-\frac{1}{2}}Q^{\frac{1}{2}}x_0=0$。因为 $x_0\ne0$，Q 为正定矩阵，所以 $Q^{\frac{1}{2}}x_0\ne0$。令 $Q^{\frac{1}{2}}x_0=y$，则 $A_1Q^{-\frac{1}{2}}y=A_2Q^{-\frac{1}{2}}y=0$ 且 $y\ne0$。由等式(2)得

$$Q^{-\frac{1}{2}}X^{s}Q^{-\frac{1}{2}}y-Q^{-\frac{1}{2}}A_1^{*}X^{-t_1}A_1Q^{-\frac{1}{2}}y-Q^{-\frac{1}{2}}A_2^{*}X^{-t_2}A_2Q^{-\frac{1}{2}}y=y.$$

结合前面有

$$Q^{-\frac{1}{2}}X^{s}Q^{-\frac{1}{2}}y=y.$$

所以，1 为矩阵 $Q^{-\frac{1}{2}}X^{s}Q^{-\frac{1}{2}}$ 的一个特征值。

另一方面，由(2)式易知 $Q^{-\frac{1}{2}}X^{s}Q^{-\frac{1}{2}}\ge I$，所以 $\lambda_n\left(Q^{-\frac{1}{2}}X^{s}Q^{-\frac{1}{2}}\right)\ge1$。综上 $\lambda_n\left(Q^{-\frac{1}{2}}X^{s}Q^{-\frac{1}{2}}\right)=1$，证毕。

定理 2 当 A_1、A_2 为奇异矩阵且满足 $r\begin{pmatrix}A_1\\A_2\end{pmatrix}<n$ 时，如果矩阵方程(1)有正定解 X，则有下列不等式成立

$$\lambda_n^{\frac{1}{s}}(Q)\le\lambda_n(X)\le\lambda_1^{\frac{1}{s}}(Q). \tag{3}$$

证明：由定理 1 和引理 2，我们有

$$1=\lambda_n\left(Q^{-\frac{1}{2}}X^{s}Q^{-\frac{1}{2}}\right)\ge\lambda_n^{s}(X)\lambda_n\left(Q^{-1}\right)=\frac{\lambda_n^{s}(X)}{\lambda_1(Q)}.$$

由此，$\lambda_n(X)\le\lambda_1^{\frac{1}{s}}(Q)$。

另一方面，由矩阵方程(1)有 $X^{s}\ge Q$，所以 $\lambda_n^{s}(X)\ge\lambda_n(Q)$，即 $\lambda_n(X)\ge\lambda_n^{\frac{1}{s}}(Q)$。综上，$\lambda_n^{\frac{1}{s}}(Q)\le\lambda_n(X)\le\lambda_1^{\frac{1}{s}}(Q)$ 成立。

定理 3 矩阵方程(1)有解当且仅当 A_1、A_2 分别可以分解成下列形式：

$$A_1=\left(L^*L\right)^{\frac{t_1}{2s}}N_1,\quad A_2=\left(L^*L\right)^{\frac{t_2}{2s}}N_2,$$

其中 L 为正定下三角矩阵，并且 $Q^{-\frac{1}{2}}L^*LQ^{-\frac{1}{2}}-Q^{-\frac{1}{2}}N_1^*N_1Q^{-\frac{1}{2}}-Q^{-\frac{1}{2}}N_2^*N_2Q^{-\frac{1}{2}}=I$。在这种情况下，$X=\left(L^*L\right)^{\frac{1}{s}}$ 是矩阵方程(1)的解。

证明：若矩阵方程(1)有正定解 X，则 $X^s>O$。由引理 1，把 X^s 分解为 $X^s=L^*L$，其中 L 为正定下三角矩阵。那么方程(1)等价于

$$Q^{-\frac{1}{2}}L^*LQ^{-\frac{1}{2}}-Q^{-\frac{1}{2}}A_1^*\left(L^*L\right)^{-\frac{t_1}{2s}}\left(L^*L\right)^{-\frac{t_1}{2s}}A_1Q^{-\frac{1}{2}}-Q^{-\frac{1}{2}}A_2^*\left(L^*L\right)^{-\frac{t_2}{2s}}\left(L^*L\right)^{-\frac{t_2}{2s}}A_2Q^{-\frac{1}{2}}=I.$$

设 $N_1=\left(L^*L\right)^{-\frac{t_1}{2s}}A_1$，$N_2=\left(L^*L\right)^{-\frac{t_2}{2s}}A_2$，那么 $A_1=\left(L^*L\right)^{\frac{t_1}{2s}}N_1$，$A_2=\left(L^*L\right)^{\frac{t_2}{2s}}N_2$。整理上述方程得 $Q^{-\frac{1}{2}}L^*LQ^{-\frac{1}{2}}-Q^{-\frac{1}{2}}N_1^*N_1Q^{-\frac{1}{2}}-Q^{-\frac{1}{2}}N_2^*N_2Q^{-\frac{1}{2}}=I$。必要性得证。

反之，若 A_1、A_2 分别可以分解成 $A_1=\left(L^*L\right)^{\frac{t_1}{2s}}N_1$，$A_2=\left(L^*L\right)^{\frac{t_2}{2s}}N_2$，令 $X=\left(L^*L\right)^{\frac{1}{s}}$ 代入矩阵方程(1)得

$$\begin{aligned}
&X^s-A_1^*X^{-t_1}A_1-A_2^*X^{-t_2}A_2\\
&=L^*L-N_1^*\left(L^*L\right)^{\frac{t_1}{2s}}\left(L^*L\right)^{-\frac{t_1}{s}}\left(L^*L\right)^{\frac{t_1}{2s}}N_1-N_2^*\left(L^*L\right)^{\frac{t_2}{2s}}\left(L^*L\right)^{-\frac{t_2}{s}}\left(L^*L\right)^{\frac{t_2}{2s}}N_2\\
&=L^*L-N_1^*N_1-N_2^*N_2\\
&=Q^{\frac{1}{2}}\left(Q^{-\frac{1}{2}}L^*LQ^{-\frac{1}{2}}-Q^{-\frac{1}{2}}N_1^*N_1Q^{-\frac{1}{2}}-Q^{-\frac{1}{2}}N_2^*N_2Q^{-\frac{1}{2}}\right)Q^{\frac{1}{2}}\\
&=Q.
\end{aligned}$$

于是，此时矩阵方程(1)有正定解，且 $X=\left(L^*L\right)^{\frac{1}{s}}$ 是矩阵方程(1)的正定解。必要性得证。

参考文献

[1] Liu, X.G. and Gao, H. (2003) On the Positive Definite Solutions of the Matrix Equations $X^s\pm A^*X^{-t}A=I_n$. *Linear Algebra and Its Applications*, **368**, 83-97. https://doi.org/10.1016/S0024-3795(02)00661-4

[2] Duan, X.F. and Liao, A.P. (2008) On the Existence of Hermitian Positive Definite Solutions of the Matrix Equation $X^s+A^*X^{-t}A=Q$. *Linear Algebra and Its Applications*, **429**, 673-687. https://doi.org/10.1016/j.laa.2008.03.019

[3] Cai, J. and Chen, G.L. (2009) Some Investigation on Hermitian Positive Definite Solutions of the Matrix Equation $X^s+A^*X^{-t}A=Q$. *Linear Algebra and Its Applications*, **430**, 2448-2456. https://doi.org/10.1016/j.laa.2008.12.033

[4] Yang, Y.T. (2007) The Iterative Method for Solving Nonlinear Matrix Equation $X^s+A^*X^{-t}A=Q$. *Applied Mathematics and Computation*, **188**, 46-53. https://doi.org/10.1016/j.amc.2006.09.085

[5] Zhou, D.M., Chen, G.L. and Wu, G.X. (2012) Some Properties of the Nonlinear Matrix Equation $X^s+A^*X^{-t}A=Q$. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **392**, 75-82. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2012.02.046

[6] Al-Dubiban, A.M. and Ei-sayed, S.M. (2012) On the Positive Definite Solutions of the Nonlinear Matrix Equation $X-A^*X^{-s}A-B^*X^{-t}B=I$. *Communications in Numerical Analysis*, 8.

[7] Duan, X.F., Liao, A.P. and Tang, B. (2008) On the Nonlinear Matrix Equation $X-\sum_{i=1}^{m}A_i^*X^{-\sigma_i}A_i=Q$. *Linear Algebra and Its Applications*, **429**, 110-121.

[8] Lim. Y.D. (2009) Solving the Nonlinear Matrix Equation $X=Q+\sum_{i=1}^{m}M_i^*X^{\sigma_i}M_i$ via a Contraction Principle. *Linear Algebra and Its Applications*, **430**, 1380-1383. https://doi.org/10.1016/j.laa.2008.10.034

[9] Duan, X.F., Wang, Q.W. and Li. C.M. (2012) Perturbation Analysis for Positive Definite Solutions of the Nonlinear Matrix Equation $X-\sum_{i=1}^{m}A_i^*X^{-\sigma_i}A_i=Q$. *Applied Mathematics and Informatics*, **30**, 655-663.

[10] 孙继广. 矩阵扰动分析[M]. 第 2 版. 北京: 科学出版社, 2001.

[11] Zhang, F.Z. (2011) Matrix Theory: Basic Results and Techniques. Springer, New York. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-1099-7

[12] Ali, H. and Hossein, S.M. (2020). On the Positive Definite Solution of a Class of Pair of Nonlinear Matrix Equation. *Computational and applied Mathematics*, **39**, Article No. 102. https://doi.org/10.1007/s40314-020-1127-7