Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(12), 3365-3370
Published Online December 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.1312349

关于一类单叶函数Schwarz导数的注记

赵　林，陆富强

贵州师范大学数学科学学院，贵州　贵阳

收稿日期：2023年10月29日；录用日期：2023年11月30日；发布日期：2023年12月8日

摘　要

利用Hilbert空间上的一个有界算子和单叶函数的性质，讨论一类单叶函数的Schwarz导数，并引入一类Grunsky系数。得到有界算子的内积与一类单叶函数Schwarz导数的关系，以及其Schwarz导数在复Hilbert空间下的范数与Grunsky系数的关系。

关键词

单叶函数，Schwarz导数，Grunsky算子

A Note on the Schwarz Derivative of a Class of Univalent Functions

Lin Zhao, Fuqiang Lu

School of Mathematical Science, Guizhou Normal University, Guiyang Guizhou

Received: Oct. 29th, 2023; accepted: Nov. 30th, 2023; published: Dec. 8th, 2023

Abstract

By using a bounded operator on a Hilbert space and the properties of univalent functions, the Schwarz derivative of a class of univalent functions is discussed and a class of Grunsky coefficients is introduced. The relation between the inner product of a bounded operator and the Schwarz derivative of a class of univalent functions is obtained, as well as the relation between the norm of its Schwarz derivative in complex Hilbert space and the Grunsky coefficients.

Keywords

Univalent Functions, Schwarz Derivative, Grunsky Operator

文章引用: 赵林, 陆富强. 关于一类单叶函数 Schwarz 导数的注记[J]. 理论数学, 2023, 13(12): 3365-3370.
DOI: 10.12677/pm.2023.1312349

1. 引言及主要结果

1851 年 Riemann 在其博士论文中证明 Riemann 映射定理，使其在复变函数论中成为一块重要的基石，即奠定了单叶函数理论的基础。一对一的解析映射，通常称为单叶函数。20 世纪初，Koebe $\frac{1}{4}$-定理、Koebe 偏差定理(见[1])、T. H. Gronwall 面积定理(见[2])等与单叶函数有关的研究正式展开。1916 年，随着著名的 Bieberbach 猜想提出，它成为单叶函数研究的主要对象之一。在半个多世纪里它都吸引着无数的数学家为之努力，产生了研究单叶函数的许多方法与相关论题。

在研究解析函数的单叶性时，1939 年 Grunsky 发现了有关单叶性的一个充要条件(见[3])：函数

$$\log\frac{f(z)-f(\xi)}{z-\xi}=-\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}b_{kl}z^{-k}\xi^{-l}$$

在 $\{|z|>1,|\xi|>1\}$ 内解析当且仅当 $f\in\Sigma$。从这点出发，人们开始研究 Σ 类函数而不是 S 类函数是很自然的，Grunsky 不等式表述为

$$\left|\sum_{k,l=1}^{\infty}b_{kl}\lambda_k\lambda_l\right|\le\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|\lambda_k|^2}{k},\ \lambda_k\in\mathbb{C}.$$

Grunsky 不等式连同它的推广，成为研究单叶函数理论关键的工具之一。

在数学中，Hilbert 空间是欧几里得空间的一个推广，我们把完备的内积空间称为 Hilbert 空间，Hilbert 空间和作用在 Hilbert 空间上的算子的研究都是泛函分析的重要组成部分。

我们知道单叶函数产生了许多有趣的性质，吸引了不少人的注意与研究，也构成了几何函数论的主要研究对象。而人们有兴趣的主要两类单叶函数：S 类与 Σ 类。两类函数在万有 Teichmüller 空间中也有着重要的研究作用，本文将研究与其相关的一类单叶函数的 Schwarz 导数，同时引入 Hilbert 空间上的一个有界算子，对其 Schwarz 导数作出一些刻画。

我们从一些简单的定义和符号开始。设 $\Delta=\{z:|z|<1\}$ 表示复平面 $\mathbb{C}$ 内的单位圆盘，复平面 $\overline{\mathbb{C}}$ 内一个区域的局部单叶函数的 Schwarzian 导数用 S_f 来表示，且定义为：

$$S_f=\left(\frac{f''}{f'}\right)'-\frac{1}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2.$$

对于以上定义的 Schwarzian 导数有下列性质：

1) 如果函数 f 在定义域内不等于零，则有

$$S_f=S_{\frac{1}{f}}.$$

2) Schwarzian 导数满足复合公式

$$S_{f\circ g}=(S_f\circ g)g'^2+S_g.$$

特别地，如果 g 是一个 Möbius 变换，则 $S_{f\circ g}=(S_f\circ g)g'^2$。关于单叶函数的 Schwarzian 导数更多的研究可参见[4]。

S 类是指单位圆 Δ 内全体具有下列 Taylor 展开式的单叶函数：

$$f(z)=z+a_2z^2+a_3z^3+\cdots,\ z\in\Delta.$$

这里我们要求 $f(0)=0$ 及 $f'(0)=0$ 是为了规范化。显然，对 S 类的单叶函数的任何命题可以相应推广至 Δ 内任意一个单叶函数上。

Σ 类是表示单位圆外部 $\Delta^*=\{z:|z|>1\}$ 内的全体具有下列展式的单叶函数

$$F(z)=z+a_0+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}+\cdots,\ z\in\Delta^*.$$

很容易看出，Σ 类单叶函数是 Δ^* 内单叶且将 ∞ 变为 ∞ 并满足规范条件：

$$\lim_{z\to\infty}\frac{g(z)}{z}=1$$

的函数。

为了需要，我们引入文献[5]中的两个函数。

设 $S^p\subset S,\ p=1,2,\cdots$，表示 p-对称单叶函数类，其中函数可表为：

$$f_p(z)=\left[f\left(z^p\right)\right]^{\frac{1}{p}}=z+a_{p+1}^{(p)}z^{p+1}+a_{2p+1}^{(p)}z^{2p+1}+\cdots,\ f\in S,$$

同样，设 $\Sigma^p\subset\Sigma,\ p=1,2,\cdots$，也表示 p-对称单叶函数类，但其中函数则表示为：

$$F_p(z)=\frac{1}{f_p(1/z)}=z+\frac{\alpha_{p-1}^{(p)}}{z^{p-1}}+\frac{\alpha_{2p-1}^{(p)}}{z^{2p-1}}+\cdots,\ f_p\in S^p.$$

定义 1：[6]给定在 $|z|<1$ 上的单叶函数 $f(z)=z+a_2z^2+a_3z^3+\cdots$，$f(z)$ 的 Grunsky 系数 $C_{kn}^{(p)},k,n,p\geq1$ 由下式定义：

$$\log\frac{\left[f\left(z^p\right)\right]^{1/p}-\left[f\left(\zeta^p\right)\right]^{1/p}}{z-\zeta}=\sum_{k,n=0}^{\infty}C_{kn}^{(p)}z^k\zeta^n,$$

对于 $C_{kn}^{(p)}$ 的表达式详见[6]，其中当 $z=\zeta=0$ 时对数分支取值为零。

设 D 是 $\mathbb{C}=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ 内的一个区域，对于 D 上的一个亚纯函数 f，设

$$S_f(z,\zeta)=\frac{f'(z)f'(\zeta)}{\left(f(z)-f(\zeta)\right)^2}-\frac{1}{(z-\zeta)^2},\ (z,\zeta)\in D\times D.$$

下列引理表明 $S_f(z,\zeta)$ 是 Schwarz 导数 $S_f(z)$ 的自然对称扩展。

引理 1：[7]设 f 是区域 D 中的亚纯函数，则

$$S_f(z,\zeta)=\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)\psi_n(f,z)(\zeta-z)^{n-2},\ z\in D,|\zeta-z|<d(z,\partial D)$$

其中 $\psi_n(f,z),n=2,3,\cdots$ 是 Aharonov 不变量(它的定义参见[8])。特别地，

$$S_f(z,z)=\psi_2(f,z)=\frac{1}{6}S_f(z).$$

我们将定义 1 中的式子两边同时关于 z,ζ 求导可得

$$\frac{\left\{\left[f\left(z^p\right)\right]^{1/p}\right\}'\left\{\left[f\left(\zeta^p\right)\right]^{1/p}\right\}'}{\left\{\left[f\left(z^p\right)\right]^{1/p}-\left[f\left(\zeta^p\right)\right]^{1/p}\right\}^2}-\frac{1}{(z-\zeta)^2}=\sum_{k,n=1}^{\infty}knC_{kn}^{(p)}z^{k-1}\zeta^{n-1}.$$

若由$\zeta \to z$，则

$$S_{f_p}(z)=6\sum_{k,n=1}^{\infty}kn\mathrm{C}_{kn}^{(p)}z^{k+n-2},\ |z|<1.$$

由前文可知

$$F_p(z)=\frac{1}{f_p(1/z)},$$

再根据 Schwarzian 导数的性质简单计算可得

$$S_{F_p}(z)=\frac{1}{z^4}S_{f_p}\left(\frac{1}{z}\right),\ |z|>1.$$

于是，

$$S_{F_p}(z)=\frac{6}{z^4}\sum_{k,n=1}^{\infty}kn\mathrm{C}_{kn}^{(p)}z^{-k-n+2}=6\sum_{k,n=1}^{\infty}kn\mathrm{C}_{kn}^{(p)}z^{-k-n-2}$$
$$=6\sum_{k,n=1}^{\infty}kn\mathrm{C}_{kn}^{(p)}z^{-(k+n+2)},\ |z|>1.$$

记l^2表示$x=(x_m)$序列的 Hilbert 空间且具有下列范数和内积：

$$\|x\|=\left(\sum_{m=1}^{\infty}|x|^2\right)^{\frac{1}{2}},\ \langle x,y\rangle=\sum_{m=1}^{\infty}x_m\overline{y}_m.$$

若$F_p\in\Sigma^p$，定义一个 Grunsky 算子$\mathcal{A}(F_p):l^2\to l^2$，具体表示为：

$$\mathcal{A}(F_p):x_k\to\left(\sum_{k,n=1}^{\infty}\sqrt{kn}\,\mathrm{C}_{kn}^{(p)}x_n\right),$$

使得

$$\left\langle\mathcal{A}(F_p)x_z,\overline{x}_z\right\rangle=\sum_{k,n=1}^{\infty}\sqrt{kn}\,\mathrm{C}_{kn}^{(p)}x_kx_n.$$

由此我们有如下陈述：

定理 1：若$F_p(z)\in\Sigma^p$，在单位圆外部Δ^*上存在$x_z=(x_k)$，使得

$$\left\langle\mathcal{A}(F_p)x_z,\overline{x}_z\right\rangle=\frac{1}{6}S_{F_p}(z)\left(|z|^2-1\right)^2$$

成立。

定理 2：若$F_p(z)\in\Sigma^p$，则对$S_{F_p}(z)$在复 Hilbert 空间下的范数有如下不等式成立：

$$\left\|S_{F_p}(z)\right\|_2^2\le 12\pi\sum_{k,n=1}^{\infty}kn\left|\mathrm{C}_{kn}^{(p)}\right|^2.$$

特别指出由函数ϕ满足

$$\|\phi\|_2^2=\iint_{\Delta^*}|\phi(z)|^2\left(|z|^2-1\right)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

组成的空间称为复 Hilbert 空间。

2. 主要结果的证明

在这一小节，我们将证明定理 1、定理 2。

定理 1 的证明：由上文我们知道

$$S_{F_p}(z)=6\sum_{k,n=1}^{\infty}kn\mathrm{C}_{kn}^{(p)}z^{-(k+n+2)},$$

则对于任意 $z\in\Delta^*$，不妨设 $x_z=(x_k)$ 且 $x_k=\sqrt{k}\left(|z|^2-1\right)z^{-(k+1)}$，注意有

$$\sum_{k=1}^{\infty}kt^k=\frac{t}{(1-t)^2},\ |t|<1,$$

我们得到

$$\|x_z\|^2=\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^2=\left(|z|^2-1\right)^2\sum_{k=1}^{\infty}k\left(|z|^2\right)^{-(k+1)}=\frac{\left(|z|^2-1\right)^2}{|z|^2}\frac{\frac{1}{|z|^2}}{\left(1-\frac{1}{|z|^2}\right)^2}=1.$$

所以

$$\begin{aligned}\left\langle\mathcal{A}(F_p)x_z,\overline{x}_z\right\rangle&=\sum_{k,n=1}^{\infty}\sqrt{kn}\mathrm{C}_{kn}^{(p)}x_kx_n\\&=\sum_{k,n=1}^{\infty}\sqrt{kn}\mathrm{C}_{kn}^{(p)}\sqrt{k}\left(|z|^2-1\right)z^{-(k+1)}\sqrt{n}\left(|z|^2-1\right)z^{-(n+1)}\\&=\sum_{k,n=1}^{\infty}kn\mathrm{C}_{kn}^{(p)}z^{-(k+n+2)}\left(|z|^2-1\right)^2\\&=\frac{1}{6}S_{F_p}(z)\left(|z|^2-1\right)^2.\end{aligned}$$

定理 1 证明完毕。

定理 2 的证明：已知

$$S_{F_p}(z)=6\sum_{k,n=1}^{\infty}kn\mathrm{C}_{kn}^{(p)}z^{-(k+n+2)}=6\sum_{m=2}^{\infty}\left(\sum_{k+n=m}kn\mathrm{C}_{kn}^{(p)}\right)z^{-(m+2)},$$

则

$$\begin{aligned}\left|S_{F_p}(z)\right|^2&=36\left|\sum_{m=2}^{\infty}\left(\sum_{k+n=m}kn\mathrm{C}_{kn}^{(p)}\right)z^{-(m+2)}\right|^2\\&=36\sum_{m=2}^{\infty}\left|\sum_{k+n=m}kn\mathrm{C}_{kn}^{(p)}\right|^2\left|z^{-(m+2)}\right|^2\\&=36\sum_{m=2}^{\infty}\left|\sum_{k+n=m}kn\mathrm{C}_{kn}^{(p)}\right|^2z^{-(m+2)}\overline{z}^{-(m+2)}.\end{aligned}$$

我们由文献[9]知

$$\iint_{\Delta^*}\sum_{m,n=2}^{\infty}a_m\overline{b}_nz^{-(m+2)}\overline{z}^{-(m+2)}\left(|z|^2-1\right)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\pi\sum_{n=2}^{\infty}\left(n^3-n\right)^{-1}a_m\overline{b}_n,$$

再结合 Schwarz 不等式可得

$$
\begin{aligned}
\left\|S_{F_p}(z)\right\|_2^2 &= \iint_{\Delta^*}\left|S_{F_p}(z)\right|^2\left(|z|^2-1\right)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \iint_{\Delta^*} 36\sum_{m=2}^{\infty}\left|\sum_{k+n=m} kn\mathrm{C}_{kn}^{(p)}\right|^2 z^{-(m+2)}\overline{z}^{-(m+2)}\left(|z|^2-1\right)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= 36\sum_{m=2}^{\infty}\left|\sum_{k+n=m} kn\mathrm{C}_{kn}^{(p)}\right|^2 \iint_{\Delta^*} z^{-(m+2)}\overline{z}^{-(m+2)} \\
&= 72\pi\sum_{m=2}^{\infty}\left(m^3-m\right)^{-1}\left|\sum_{k+n=m} kn\mathrm{C}_{kn}^{(p)}\right|^2 \\
&\le 72\pi\sum_{m=2}^{\infty}\left(m^3-m\right)^{-1}\sum_{k+n=m} kn\sum_{k+n=m} kn\left|\mathrm{C}_{kn}^{(p)}\right|^2 \\
&= 12\pi\sum_{k,n=1}^{\infty} kn\left|\mathrm{C}_{kn}^{(p)}\right|^2.
\end{aligned}
$$

定理 2 证明完毕。

参考文献

[1] Koebe, P. (1907) Ueber die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven. Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zuGöttingen. *Mathematisch-Physikalische Klasse*, **1907**, 191-210. http://eudml.org/doc/58678

[2] Gronwall, T.H. (1914/1915) Some Remarks on Conformal Representation. *Annals of Mathematics*, **16**, 72-76. https://doi.org/10.2307/1968044

[3] Grunsky, H. (1939) Koeffizientenbedingungen für schlicht abbildende meromorphe Funktionen. *Mathematische Zeitschrift*, **45**, 29-61. https://doi.org/10.1007/BF01580272

[4] Sergeev, A. (2014) Lectures on Universal Teichmüller Space. Steklov Mathematical Institute, Moscow. https://doi.org/10.4171/141

[5] Todorov, P.G. (1979) New Explicit Formulas for the Coefficients of P-Symmetric Functions. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **77**, 81-86. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1979-0539635-3

[6] Hummel, J.A. (1964) The Grunsky Coefficients of a Schlicht Functions. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **15**, 142-150. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1964-0158060-X

[7] Harmelin, R. (1982) Bergman Kernel Function and Univalence Criteria. *Journal d'Analyse Mathématique*, **41**, 249-258. https://doi.org/10.1007/BF02803404

[8] Aharonov, D. (1969) A Necessary and Sufficient Condition for Univalence of a Meromorphic Function. *Duke Mathematical Journal*, **36**, 599-604. https://doi.org/10.1215/S0012-7094-69-03671-0

[9] Shen, Y. (2007) On Grunsky Operator. *Science in China Series A*: *Mathematics*, **50**, 1805-1817. https://doi.org/10.1007/s11425-007-0141-1