Pure Mathematics 理论数学, 2024, 14(1), 131-152
Published Online January 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.141015

从矩阵次对角线的角度考察矩阵的性质

陈洪楠

上海理工大学理学院，上海

收稿日期：2023年12月1日；录用日期：2023年12月18日；发布日期：2024年1月19日

摘　要

本论文不同于以往研究者大多数从矩阵主对角线方向去讨论矩阵的性质，而是从矩阵次对角线角度考察矩阵的性质，提出次转置、次对称、次单位、次正交、次可逆矩阵的概念，得到了大体有趣的新结果。对于开阔读者的视野，以及进一步研究矩阵性质有一定的启发作用，相信在一些领域会有一定的应用。

关键词

矩阵，次转置矩阵，次对称矩阵，次对角线，次正交矩阵，次可逆矩阵

Examining the Properties of Matrices in Terms of Their Subdiagonals

Hongnan Chen

College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai

Received: Dec. 1st, 2023; accepted: Dec. 18th, 2023; published: Jan. 19th, 2024

Abstract

This paper is different from the previous researchers who mostly discuss the properties of matrix from the direction of the main diagonal of matrix, but investigate the properties of matrix from the perspective of sub diagonal of matrix, put forward the concepts of sub transpose, sub symmetry, sub unit, sub orthogonal and sub reversible matrix, and obtained generally interesting new results. It has a certain enlightening effect on broadening readers' horizons and further studying matrix properties. I believe it will be applied in some fields.

Keywords

Matrix, Secondary Transpose Matrix, Subsymmetric Matrix, Sub Diagonal, Suborthogonal Matrix,

文章引用: 陈洪楠. 从矩阵次对角线的角度考察矩阵的性质[J]. 理论数学, 2024, 14(1): 131-152.
DOI: 10.12677/pm.2024.141015

Sub invertible Matrix

1. 绪论

在一个 n 阶方阵中，从左下角至右上角这一斜线方向上的 n 个元素所在的对角线，叫做 n 阶方阵的次对角线。从矩阵次对角线角度考察矩阵的性质，主要是不同于以往的矩阵从主对角线角度来考察，本文将从次对角线角度考察矩阵的次转置、次对称、反次对称、次正定、次特征值、次合同、次对称变换等多种性质，同时考察一些特殊的次矩阵及其性质，比如次单位矩阵、次对角矩阵、次数量矩阵以及次可逆矩阵等等。

1.1. 从矩阵次对角线角度研究现状

矩阵一直是数学理论研究中的一个重要课题，其中对实对称矩阵的研究更为深入。人们通常从主对角线方向考虑(例如对角化、正定性等)，而次对角线方向往往被忽视或遗忘。事实上，次对角方向的矩阵理论(如次对称性、次正定性等)在多个领域中同样适用，因此，对次对角方向进行不断深入的理论和应用研究是非常重要的。

至今已经有不少学者进行研究，并提出了次转置、次对称、次正定等诸多概念，取得了不少成果。卢业广在文[1]于 1962 年首次提出了次对称矩阵的概念，之后又于 1989 年在文[2]中提出了次转置、次对称、次正交的概念，而 1992 年，刘玉波在文[3]将次转置的定义及其结论推广到一般矩阵，并引入了次正定的次对称矩阵的概念。

目前的国内外的代数教科书中，对矩阵的研究仅限于对称、反对称、正交、酉矩阵等，而在次对角线上的矩阵性质的研究，对于拓展学生的视野、丰富书本知识内容、加深对矩阵的认识和运用，都有很大的帮助。因此，这篇论文从次对角线出发，对矩阵的性质进行整理和研究。

1.2. 定义和引理

定义 1.2.1 设 $A=\left(a_{ij}\right)\in R^{m\times n}$， $B=\left(b_{ij}\right)\in R^{n\times m}$，满足 $b_{ij}=a_{m-j+1,n-i+1}$， $i=1,2,\cdots,n$； $j=1,2,\cdots,m$，即

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

$$B=\begin{pmatrix} a_{nm} & a_{m-1,n} & \cdots & a_{1n} \\ a_{m,n-1} & a_{m-1,n-1} & \cdots & a_{1,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m-1,1} & \cdots & a_{11} \end{pmatrix},$$

则称 B 为 A 的次转置，记为 $B=A^{ST}$。

定义 1.2.2 称次对角线元素全为 1，其余全为 0 的方阵 J，即

$$J=\begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & \iddots & \\ & 1 & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}$$

为次单位矩阵。

定义 1.2.3 设 $A=\left(a_{ij}\right)\in R^{n\times n}$，且 $A^{ST}=A$，即 $a_{n-j+1,n-i+1}=a_{ij}$，$i,j=1,2,\cdots,n$，则称 A 为实次对称矩阵；如果 $A^{ST}=-A$，则称 A 为反次对称矩阵。

定义 1.2.4 如果数域 P 上的 n 阶方阵满足 $A^{ST}A=E$ (或 $AA^{ST}=E$)，则 A 称是次正交矩阵。

定义 1.2.5 设 A 是 n 阶方阵，如果存在 n 阶方阵 B，使得 $AB=BA=J$，称 A 为次可逆矩阵，矩阵 B 称 A 为的次逆矩阵，记为 $A^{(-1)}$。

1.3. 本文的基本框架

本论文是笔者在学习期间，进行的一项关于代数中矩阵的研究工作。其主要内容和安排如下：

全文由五章组成。第一章主要是对目前国内外关于次矩阵的一些初步认识；第二章讨论了次转置矩阵的一些基本性质和次转置矩阵可对角化条件；第三章主要讨论了次对称以及反次对称矩阵的若干基本性质；第四章讨论了次对角、次数量、次三角形、次正交、次可逆矩阵五类矩阵；第五章探究了次对角线上类比主对角线关于矩阵可以推广的问题。最后是参考文献。

2. 次转置矩阵的性质

2.1. 次转置矩阵的基本性质

性质 2.1.1 如果 E 是 n 级单位矩阵，则 $E^{ST}=E$。

性质 2.1.2 设 A 是一个 $m\times n$ 矩阵，则 $J_nA^{ST}J_m=A^T$ 或 $J_nA^TJ_m=A^{ST}$，其中 J_n 为 n 级次单位矩阵，A^T 是 A 的转置矩阵。

推论：

1) $\left(A^{ST}\right)^{ST}=A$
2) $\left(A+B\right)^{ST}=A^{ST}+B^{ST}$ (A 与 B 是同级矩阵)
3) $\left(\lambda A\right)^{ST}=\lambda A^{ST}$ (λ 是常数)
4) $\left(AB\right)^{ST}=B^{ST}A^{ST}$ (A 是 $m\times s$ 矩阵，B 是 $s\times n$ 矩阵)

性质 2.1.3 设 A 是 n 阶方阵，则 $|A|=\left|A^{ST}\right|$。

性质 2.1.4 设 A 是可逆的 n 级方阵，则 A^{ST} 也可逆，且 $\left(A^{ST}\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^{ST}$，显然，$\left(E^{ST}\right)^{-1}=E$。

证明：先证 A^{ST} 也可逆。由于 n 阶方阵 A 可逆，故存在矩阵 B，使得 $AB=E$。由推论(4)可知，$\left(AB\right)^{ST}=B^{ST}A^{ST}=E^{ST}=E$，则 A^{ST} 也可逆。再证 $\left(A^{ST}\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^{ST}$。由于 $\left(A^{ST}\right)\left(A^{-1}\right)^{ST}=\left(A^{-1}A\right)^{ST}=E^{ST}=E$，则有 $\left(A^{ST}\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^{ST}$。

性质 2.1.5 对任意方阵 A，则 $A+A^{ST}$ 是次对称矩阵。

证明：由性质 2.1.2 的推论得

$$\left(A+A^{ST}\right)^{ST}=A^{ST}+\left(A^{ST}\right)^{ST}=A^{ST}+A=A+A^{ST}$$

$\therefore$ $A+A^{ST}$ 是次对称矩阵。证毕。

性质 2.1.6 上(下)三角形矩阵的次转置仍是上(下)三角形矩阵(显然)。

性质 2.1.7 任一 n 阶方阵都可以唯一地表示成一个 n 阶次对称矩阵与一个 n 阶反次对称矩阵的和。

证明：$\forall n$ 阶方阵 A，有

$$A=\frac{A+A^{ST}}{2}+\frac{A-A^{ST}}{2},$$

则由性质 2.1.2 的推论容易验证 $\frac{A+A^{ST}}{2}$ 是一个 n 阶次对称矩阵，$\frac{A-A^{ST}}{2}$ 是一个 n 阶反次对称矩阵。

性质 2.1.8 若 n 级方阵 A 与 B 可交换，且 A 可逆，则 $\left(A^{ST}\right)^{-1}$ 与 B^{ST} 也可交换。

证明：$\because A$ 可逆，$\therefore$ 由性质 2.1.7 知 A^{ST} 也可逆，且 $\left(A^{ST}\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^{ST}$，又 $\because AB=BA$，$\therefore AA^{-1}B=BAA^{-1}=ABA^{-1}$，将等式 $AA^{-1}B=ABA^{-1}$ 两边取转置得

$$B^{ST}\left(A^{-1}\right)^{ST}A^{ST}=\left(A^{-1}\right)^{ST}B^{ST}A^{ST}$$

将上式等号两边右乘 $\left(A^{ST}\right)^{-1}$ 得

$$B^{ST}\left(A^{-1}\right)^{ST}=\left(A^{-1}\right)^{ST}B^{ST}，即$$

$$B^{ST}\left(A^{ST}\right)^{-1}=\left(A^{ST}\right)^{-1}B^{ST}$$

$\therefore\left(A^{ST}\right)^{-1}$ 与 B^{ST} 可交换。证毕。

性质 2.1.9 若 n 级方阵 A 可逆，$k\neq 0$，则 kA^{ST} 也可逆，且 $\left(kA^{ST}\right)^{-1}=\frac{1}{k}\left(A^{ST}\right)^{-1}$。

证明：由性质 2.1.7 知 A^{ST} 可逆，且 $\left(A^{ST}\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^{ST}$ 而

$$\left(kA^{ST}\right)\left[\frac{1}{k}\left(A^{ST}\right)^{-1}\right]=k\cdot\frac{1}{k}\left[A^{ST}\left(A^{ST}\right)^{-1}\right]=A^{ST}\left(A^{-1}\right)^{ST}=\left(A^{-1}A\right)^{ST}=E^{ST}=E$$

$\therefore kA^{ST}$ 可逆，且 $\left(kA^{ST}\right)^{-1}=\frac{1}{k}\left(A^{ST}\right)^{-1}$。证毕。

性质 2.1.10 设 A,B 均是数域 P 上的 n 级可逆矩阵，则 $A^{ST}B^{ST}$ 也可逆，且

$$\left(A^{ST}B^{ST}\right)^{-1}=\left(B^{ST}\right)^{-1}\left(A^{ST}\right)^{-1}$$

证：$\because A$ 与 B 均可逆，$\therefore$ 由性质 2.1.7 知 A^{ST} 与 B^{ST} 也可逆，且

$$\left(A^{ST}\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^{ST},\ \left(B^{ST}\right)^{-1}=\left(B^{-1}\right)^{ST}$$

由性质 2.1.2 的推论，性质 2.1.7，矩阵的乘法性质得

$$\begin{aligned}&\left(A^{ST}B^{ST}\right)\left[\left(B^{ST}\right)^{-1}\left(A^{ST}\right)^{-1}\right]\\&=A^{ST}\left[B^{ST}\left(B^{ST}\right)^{-1}\right]\left(A^{ST}\right)^{-1}=A^{ST}\left[B^{ST}\left(B^{-1}\right)^{ST}\right]\left(A^{ST}\right)^{-1}\\&=A^{ST}\left(B^{-1}B\right)^{ST}\left(A^{ST}\right)^{-1}=A^{ST}E^{ST}\left(A^{ST}\right)^{-1}=A^{ST}E\left(A^{ST}\right)^{-1}\\&=A^{ST}\left(A^{-1}\right)^{ST}=\left(A^{-1}A\right)^{ST}=E^{ST}=E\end{aligned}$$

$\therefore A^{ST}B^{ST}$ 也可逆，且

$$\left(A^{ST}B^{ST}\right)^{-1}=\left(B^{ST}\right)^{-1}\left(A^{ST}\right)^{-1}\text{ 证毕}$$

推论 若 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 均是数域 P 上的 n 级可逆矩阵，则 $A_1^{ST}A_2^{ST}\cdots A_k^{ST}$ 也可逆，且

$$\left(A_1^{ST}A_2^{ST}\cdots A_k^{ST}\right)^{-1}=\left(A_k^{ST}\right)^{-1}\cdots\left(A_2^{ST}\right)^{-1}\left(A_1^{ST}\right)^{-1}。$$

推论可见文[4]。

性质 2.1.11 若 n 级方阵 A 可逆，则

$$\left|\left(A^{ST}\right)^{-1}\right|=\left|A^{ST}\right|^{-1}$$

证$\because A$ 可逆，$\therefore |A|\neq 0$，由性质 2.1.7 知 A^{ST} 也可逆。$\because A^{ST}\left(A^{ST}\right)^{-1}=E$。将等式 $A^{ST}\left(A^{ST}\right)^{-1}=E$ 两边同时取行列式，再由方阵的行列式的性质得

$\left|A^{ST}\left(A^{ST}\right)^{-1}\right|=|E|$，即

$$\left|A^{ST}\right|\cdot\left|\left(A^{ST}\right)^{-1}\right|=1$$

由性质 2.1.6 知 $\left|A^{ST}\right|=|A|$，而 $|A|\neq 0$，

$$\therefore \left|\left(A^{ST}\right)^{-1}\right|=\left|A^{ST}\right|^{-1} \text{证毕}$$

性质 2.1.12 若 n 级方阵 A 与 B 相似，则 A^{ST} 与 B^{ST} 也相似。

证：$\because A$ 与 B 相似，$\therefore$ 存在 n 级可逆矩阵 Q，使得 $B=Q^{-1}AQ$。将等式 $B=Q^{-1}AQ$ 两边同时取转置，再由性质 2.1.2 的推论与性质 2.1.7 得

$$B^{ST}=\left(Q^{-1}AQ\right)^{ST}=Q^{ST}A^{ST}\left(Q^{-1}\right)^{ST}=\left[\left(Q^{ST}\right)^{-1}\right]^{-1}A^{ST}\left(Q^{ST}\right)^{-1}$$

由性质 2.1.7 知 Q^{ST} 可逆，由逆矩阵的性质知 $\left(Q^{ST}\right)^{-1}$ 也可逆。从而 A^{ST} 与 B^{ST} 相似。证毕

性质 2.1.13 若 n 级方 A 阵可逆，则 $r(A)=r\left(A^{ST}\right)$，$r$ 表示矩阵的秩。

证：$\because A$ 可逆，$\therefore A$ 与 n 级单位阵 E 等价，由性质 2.1.7 知 A^{ST} 也可逆，$\therefore A^{ST}$ 也与 E 等价，由等价的对称性与传递性知 A 与 A^{ST} 也等价，从而 $r(A)=r\left(A^{ST}\right)$。证毕。

性质 2.2.14 如果 λ 是 n 级方阵 A 的特征值，则 λ 也是 A^{ST} 的特征值。

证：由性质 2.1.2 的推论和性质 2.1.3 可得

$$\left|(\lambda E-A)^{ST}\right|=\left|\lambda E-A^{ST}\right|$$

$$\left|(\lambda E-A)^{ST}\right|=|\lambda E-A|$$

即 $\left|\lambda E-A^{ST}\right|=|\lambda E-A|$

$\therefore A^{ST}$ 与 A 有相项式，从而也有相同的特征值。

$\therefore \lambda$ 也是 A^{ST} 的特征值。

2.2. 次转置矩阵的可对角化条件

当一个 n 阶矩阵相似于对角矩阵时，可以简化很多问题的研究与计算。基于上述的研究，下面对次转置矩阵逆的结论作了如下总结：若 n 阶方阵 A 可逆，则 A^{ST} 也可逆，且 $\left(A^{ST}\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^{ST}$。并结合矩阵对角化理论，给出并证明了在数域 F 上 n 阶矩阵 A 的次转置矩阵 A^{ST} 可对角化的充分必要条件是存在 n 个数 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\cdots,\lambda_n$ 及 n 个线性无关的列向量 $P_1,P_2,\cdots,P_n$，使得 $A^{ST}P_i=\lambda_iP_i$，这对研究次转置矩阵的对角化问题将起到重要作用。文[5]中对可对角化条件作出了具体说明。

定义 2.2.1：设 A 是数域 F 上 n 阶矩阵，如果存在可逆阵 P，使 $P^{-1}AP$ 为对角阵，那么，A 称为可对角化矩阵。

定理 2.2.1 数域 F 上 n 阶矩阵 A 的次转置矩阵 A^{ST} 可对角化的充分必要条件是存在 n 个数 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\cdots,\lambda_n$ 及存在 n 个线性无关的列向量 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 使得 $A^{ST}P_i=\lambda_i P_i$，$(i=1,2,\cdots,n)$。

证明：先证必要性。设 $A^{ST}\in M_n(F)$ 是可对角化矩阵，即存在可逆阵 P，使得 $P^{-1}A^{ST}P=diag(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\cdots,\lambda_n)$，其中 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\cdots,\lambda_n\in F$。又设 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 是 P 的 n 个列向量，由于 P 是可逆的，向量组 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 线性无关，并且 $A^{ST}P=A^{ST}(P_1,P_2,\cdots,P_n)=(P_1,P_2,\cdots,P_n)diag(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\cdots,\lambda_n)$，即有

$$\left(A^{ST}P_1,A^{ST}P_2,\cdots,A^{ST}P_n\right)=\left(\lambda_1P_1,\lambda_2P_2,\cdots,\lambda_nP_n\right)$$

故有 $A^{ST}P_i=\lambda_iP_i$，$(i=1,2,\cdots,n)$。

再证充分性。如果存在 F^n 中 n 个线性无关 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 的向量及 n 个数 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\cdots,\lambda_n$，满足式 $A^{ST}P_i=\lambda_iP_i$，$(i=1,2,\cdots,n)$，那么取 $P=(P_1,P_2,\cdots,P_n)^T\in M_n(F)$，就有如下结论：$P^{-1}A^{ST}P=diag(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\cdots,\lambda_n)$，即 A^{ST} 可对角化。

3. 次对称矩阵的性质

3.1. 次对称矩阵的基本性质

定理 3.1.1 A 为实次对称矩阵(反次对称矩阵) $\Leftrightarrow$ JA (或 AJ)为实对称矩阵(反对称矩阵)。

证明：设 A 为实次对称矩阵，即 $A^{ST}=A$，则 $(JA)^T=A^TJ^T=A^TJ=J^TAJ\cdot J=J^TA=JA$，因此 JA 为实对称矩阵。

反之，若 $(JA)^T=JA$，由 $(JA)^T=A^TJ^T=A^TJ$ 有 $A^TJ=JA$，因此 $J^{-1}A^TJ=J^{-1}JA$，所以 $A^{ST}=A$，A 为实次对称矩阵。

定义 3.1.1 n 阶方阵 A，若存在数 λ 和非零向量 $X\in R^{n\times1}$，使得 $AX=\lambda JX$，则称 λ 为 A 的次特征值，X 为 A 的属于 λ 的次特征向量。

引理 3.1.1 实对称矩阵 A 的特征值均为实数。

定理 3.1.2 实次对称矩阵 A 的次特征值均为实数。

证明：A 实次对称，由定理 3.1.1 得 JA 实对称，由引理 3.1.1 知，JA 的所有特征值 $\lambda\in R$，令 X 为 JA 的属于 λ 的特征向量，则 $JAX=\lambda X$，于是 $AX=\lambda JX$，故 $\lambda\in R$ 为 A 的次特征值，又显然 A 的次特征值与 JA 的特征值一一对应，因此定理得证。

关于次对称以及反次对称矩阵的性质，我们总结如下：

1) 次对称矩阵的和，直和幂，逆(可逆时)，多项式都是次对称矩阵；反次对称矩阵 A、B 的和、直和、奇次幂、逆(可逆时)、$AB-BA$ 任为反次对称矩阵。

2) 次对称矩阵 A、B 的乘积 AB 仍为次对称矩阵 $\Leftrightarrow$ $AB=BA$。

性质 3.1.1 设 A 为 n 阶次对称矩阵，则 $A^k\,(k=1,2,\cdots)$ 为次对称矩阵。

性质 3.1.2 设 A 为 n 阶方阵，则 $A+A^{ST},AA^{ST},A^{ST}A$ 是次对称矩阵。

定理 3.1.3 设 λ_1,λ_2 为 n 阶实次对称矩阵 A 两个相异次特征值，X_1,X_2 为对应的次特征向量，那么 X_1,X_2 正交。

证明：由条件知 $AX_1=\lambda_1JX_1$，$AX_2=\lambda_2JX_2$。两边同时乘上 X_2^{ST} 得到

$$X_2^{ST}AX_1=\lambda_1X_2^{ST}JX_1$$

因为 $A=A^{ST}$，所以

$$X_2^{ST}AX_1=X_2^{ST}A^{ST}X_1=\left(AX_2\right)^{ST}X_1=\left(\lambda_2JX_2\right)^{ST}X_1=\lambda_2JX_2^{ST}J^{ST}X_1=\lambda_2X_2^{ST}JX_1$$

又因为

$$X_2^{ST}JX_1 = X_2^{ST}J_nX_1 = J_1^{-1}J_1X_2^{ST}J_nX_1 = J_1^{-1}\left(J_1X_2^{ST}J_n\right)X_1 = J_1^{-1}X_2^TX_1 = X_2^TX_1$$

所以

$$(\lambda_1 - \lambda_2)X_2^TX_1 = 0\text{。}$$

因为$\lambda_1 \neq \lambda_2$，所以$\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$。从而$X_2^TX_1 = 0$，即$X_1, X_2$正交。

3.2. 次对称矩阵的次正定性

本段中用$R^{m\times n}$表示实$m\times n$阶矩阵的集合，用I表示单位矩阵，用A^T表示A的转置矩阵，A^{-1}表示A的逆矩阵。

定义 3.2.1： 设$A\in R^n$，$A = A^{ST}$，若$\forall x\neq 0\in R^n$，有$x^{ST}Ax>0$，则称A为次正定次对称矩阵。

定理 3.2.1： 设次对称矩阵A是次正定矩阵，B为$n\times m$实矩阵，则当B的秩为m时，m阶方阵$B^{ST}AB$是次对称次正定矩阵。

证明：因为$A = A^{ST}$，则$\left(B^{ST}AB\right)^{ST} = B^{ST}A^{ST}B = B^{ST}AB$，即$B^{ST}AB$是次对称矩阵。设$x = \left(x_1, x_2, \cdots, x_m\right)^{ST} \neq 0$，且令$B = \left(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m\right)$，其中$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$是矩阵$B$的列向量组。由于$B$的秩为$m$，从而$Bx = x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + \cdots + x_m\beta_m \neq 0$。由于$A$是次正定矩阵，故$(Bx)^{ST}A(Bx)>0$，即$\left(B^{ST}AB\right)x>0$，因此，$B^{ST}AB$是次对称次正定矩阵。

推论 3.2.1： 实次对称矩阵A是次正定矩阵的充要条件是对任意的实n阶可逆方阵C，使得$C^{ST}AC$是次对称次正定矩阵。

推论 3.2.2： A为$n\times m$实矩阵，$m<n$，则AA^{ST}次对称次正定当且仅当A的秩为m。

推论 3.2.3： A为n阶实矩阵，B为$n\times m$实矩阵，则对满足$B^{ST}x = 0$的任意$x\neq 0\in R^n$都有$x^{ST}Ax>0$的充要条件是存在一个数$\delta^1>0$，使得当$\delta>\delta^1$，$x\neq 0\in R^n$时，$x^{ST}\left(A+\delta BB^{ST}\right)x>0$。

文献[6]给出定理：A为正定次对称矩阵当且仅当JA是正定对称阵。从这一点出发，我们可以方便地把将正定对称阵的某些性质推广到次正定次对称阵上来。

定理 3.2.2： A是次对称次正定矩阵当且仅当存在次对称次正定矩阵P，使得$A = PJP$。

证明：A是次对称次正定矩阵矩阵当且仅当JA是对称正定矩阵，当且仅当存在对称正定矩阵P_1使得$JA = P_1^2$，即$A = (JP_1)J(JP_1)$。令$JP_1 = P$，则P是次对称次正定矩阵，且$A = PJP$。

推论 3.2.4： A是次对称次正定矩阵当且仅当存在可逆上三角S，使得$A = S^{ST}JS$。

推论 3.2.5： A、B都为n阶次对称矩阵，且B为n阶次正定矩阵，则存在可逆矩阵C，使得$C^{ST}BC = J$，$C^{ST}AC$为次对角矩阵。

定理 3.2.3： A、B都为n阶次对称次正定阵，且$AJB = BJA$，则AJB亦为次对称次正定矩阵。

证明：由于$(AJB)^{ST} = B^{ST}JA^{ST} = BJA = AJB$，所以$AJB$是次对称矩阵。$A$为$n$阶次对称次正定阵，由定理 3.3.2 得出存在次对称次正定矩阵P，使得$A = PJP$，所以

$(JP)^{-1}(JAJB)(JP) = (JP)^{-1}(JPJPJB)JP = (JP)(JB)(JP)$，由于$P$是次对称次正定矩阵，所以$JP$是对称正定矩阵，即有$(JP)(JB)(JP) = (JP)^T(JB)(JP)$。

所以$JAJB$与$(JP)^T(JB)(JP)$相似，而$(JP)^T(JB)(JP)$对称正定，所以特征值都大于零，因此$JAJB$的特征值也都大于零，又$JAJB$是对称矩阵，所以$JAJB$亦为正定矩阵，因此就能得到AJB为次对称次正定矩阵。

定理 3.2.4： A为n阶次对称矩阵，α是一个数，β是列向量。则$G = \begin{pmatrix} \beta & A \\ \alpha & \beta^{ST} \end{pmatrix}$是次对称次正定矩阵

的充分必要条件为 A 次对称次正定矩阵且 $\alpha-\beta^{ST}A^{-1}\beta>0$。

证明：因为 $J_{n+1}\begin{pmatrix}\beta & A\\ \alpha & \beta^{ST}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ J_n & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\beta & A\\ \alpha & \beta^{ST}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha & \beta^{ST}\\ J_n\beta & J_nA\end{pmatrix}$，而 $\beta^{ST}=J_1\beta^TJ_n=\beta^TJ_n=\left(J_n\beta\right)^T$，所以，

$J_{n+1}\begin{pmatrix}\beta & A\\ \alpha & \beta^{ST}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha & \left(J_n\beta\right)^T\\ J_n\beta & J_nA\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0 & E_n\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha & \left(J_n\beta\right)^T\\ J_n\beta & J_nA\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ E_n & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}J_n\beta & J_nA\\ \alpha & \left(J_n\beta\right)^T\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ E_n & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}J_nA & J_n\beta\\ \left(J_n\beta\right)^T & \alpha\end{pmatrix}$。

所以 $\begin{pmatrix}J_nA & J_n\beta\\ \left(J_n\beta\right)^T & \alpha\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}\alpha & \left(J_n\beta\right)^T\\ J_n\beta & J_nA\end{pmatrix}$ 合同，而 $\begin{pmatrix}J_nA & J_n\beta\\ \left(J_n\beta\right)^T & \alpha\end{pmatrix}$ 为对称正定矩阵的充分必要条件为 J_nA 对称正定，且 $\alpha-\left(J_n\beta\right)^T\left(J_nA\right)^{-1}\left(J_n\beta\right)>0$，即 A 是次对称次正定矩阵，且 $\alpha-\beta^TJ_nA^{-1}\beta>0$，又 $J_1=1$，$\alpha-\beta^TJ_nA^{-1}\beta>0$ 等价于 $\alpha-J_1\beta^TJ_nA^{-1}\beta>0$。又 $G=\begin{pmatrix}\beta & A\\ \alpha & \beta^{ST}\end{pmatrix}$ 为次对称次正定矩阵的充分必要条件为 $J_{n+1}\begin{pmatrix}\beta & A\\ \alpha & \beta^{ST}\end{pmatrix}$ 是对称正定矩阵，所以 $G=\begin{pmatrix}\beta & A\\ \alpha & \beta^{ST}\end{pmatrix}$ 为次对称次正定矩阵的充分必要条件为是 A 次对称次正定矩阵且 $\alpha-\beta^{ST}A^{-1}\beta>0$。次对称矩阵的具体性质见文[7]。

3.3. 实反次矩阵的有关结论

引理 3.3.1：实反对称矩阵 A 的次特征值为零或者共轭纯虚数。(见参考文献[8])

定理 3.3.1：设 A 为 n 阶实反对称矩阵，则必有正交矩阵 Q，使 $Q^{-1}AQ=\Lambda$，其中 Λ 是以 A 的特征值的虚部为次对角元素的次对角矩阵。

由定义 3.1.1 的定义，能够得到下面的定理：

定理 3.3.2：实反次对称矩阵 A 的次特征值必为共轭纯虚数或零。

证明：设 $A\in R^{n\times n}$，且 $A^{ST}=-A$，即 A 为 n 阶实反次对称矩阵，则

$$\left(J_nA\right)^T=A^TJ_n^T=\left(J_nA^{ST}J_n\right)J_n=J_n\left(-A\right)=-\left(J_nA\right)$$

故 J_nA 为实反对称矩阵，以 J_n 左乘式：$AX=\lambda J_nX$ 的两边得：

$$J_nAX=\lambda J_nJ_nX\Rightarrow J_nAX=\lambda X$$

从而 A 的次特征值 λ 就是 J_nA 的特征值，由引理 3.3.2，定理得证。

定理 3.3.3：设 λ_1,λ_2 为 n 阶实反次对称矩阵 A 的两个相异次特征值，X_1,X_2 为对应的次特征向量，那么：

1) 若 $\lambda_1+\lambda_2=0$，即 $\lambda_2=\overline{\lambda_1}$，则 $\overline{X_1}$ 也为 A 的与 λ_2 对应的次特征向量；

2) 若 $\lambda_1+\lambda_2\neq 0$，则 X_1 与 X_2 正交。

证明：

1) 由已知得：$AX_1=\lambda_1JX_1$，于是有

$$\overline{AX_1}=\overline{\lambda_1JX_1}\Rightarrow \overline{A}\,\overline{X_1}=\overline{\lambda_1}\,\overline{J}\,\overline{X_1}\Rightarrow A\overline{X_1}=\overline{\lambda_1}J\overline{X}$$

由于 $\lambda_2=\overline{\lambda_1}$，故 $\overline{X_1}$ 也为 A 的与 λ_2 对应的次特征向量。

2) 用 $\overline{X_2}^{ST}$ 左乘 $AX_1=\lambda_1JX_1$ 的两边：

$$\overline{X_2}^{ST}AX_1=\overline{X_2}^{ST}\lambda_1JX_1$$

而

$$\overline{X_2}^{ST}AX_1=\overline{\left(A^{ST}X_2\right)}^{ST}X_1=\overline{\left(-AX_2\right)}^{ST}X_1=\overline{\left(-\lambda_2JX_2\right)}^{ST}X_1=-\overline{\lambda_2}\,\overline{X_2}^{ST}JX_1$$

又

$$\overline{X_2}^{ST}JX_1=\overline{X_2}^{ST}J_nX_1=J_1^{-1}\left(J_1\overline{X_2}^{ST}J_n\right)X_1=J_1^{-1}\overline{X_2}^TX_1=\overline{X_2}^TX_1$$

所以

$$-\overline{\lambda_2X_2}^{ST}JX_1=\lambda_1\overline{X_2}^TX_1$$

即

$$\left(\lambda_1+\overline{\lambda_2}\right)\overline{X_2}^TX_1=0$$

因为$\lambda_1+\lambda_2\neq0$且λ_1,λ_2相异，所以$\overline{X_2}^TX_1=0$。

故X_1与X_2正交。

定理 3.3.4：设 A 为 n 阶实反次对称矩阵，则必存在正交矩阵 P，使

$$P^{ST}AP=\Lambda$$

其中Λ为以 A 的次特征值的虚部为对角线上元素的对角矩阵。

证明：根据定理 3.3.2 的证明可知J_nA为实反对称矩阵，则由定理 3.2 得：存在正交矩阵 Q，使得

$$Q^{-1}\left(J_nA\right)Q=\Lambda$$

即

$$Q^T\left(J_nA\right)Q=\Lambda$$

用J_n左乘上式两边整理得$\left(J_nQ^TJ_n\right)AQ=J_n\Lambda$，从而

$$Q^{ST}AQ=J_n\Lambda$$

记$Q=P$，$J_n\Lambda=\Lambda$，定理得证。

例：设$A=\begin{pmatrix}-1&-1&0\\-1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$，求一个正交矩阵 P，使得$P^{ST}AP$为对角矩阵。

解：由$\left|JA-\lambda E\right|=-\lambda\left(\lambda^2+3\right)=0$，得$\lambda_1=0,\lambda_{2,3}=\pm\sqrt{3}i$为 A 的次特征值。

对$\lambda_1=0$，由$\left(A-0J\right)X=0$的次特征向量$\xi_1^T=\left(1,-1,1\right)$；

对$\lambda_2=\sqrt{3}i$，由$\left(A-\sqrt{3}iJ\right)X=0$得到$X_2^T=\left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2},\frac{1-\sqrt{3}i}{2},1\right)$，于是对于$\lambda_3=-\sqrt{3}i$得$X_3=\overline{X_2}$，令

$$\xi_2=\frac{X_2+X_3}{2}=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right)^T,\quad \xi_3=\frac{X_2-X_3}{2i}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)^T$$

有$A\xi_2=-\sqrt{3}J\xi_3$，$A\xi_3=\sqrt{3}J\xi_2$。

由于ξ_1,ξ_2,ξ_3正交，则$\left(\frac{\xi_2}{|\xi_2|},\frac{\xi_1}{|\xi_1|},\frac{\xi_3}{|\xi_3|}\right)$为所求的 P，即

$$P=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{6}}{6}&\frac{\sqrt{3}}{3}&-\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{6}}{6}&-\frac{\sqrt{3}}{3}&-\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{6}}{3}&\frac{\sqrt{3}}{3}&0\end{pmatrix}$$

于是 $P^{ST}AP=\begin{pmatrix}-\sqrt{3} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \sqrt{3}\end{pmatrix}$。

4. 几种特殊的矩阵

4.1. 次对角矩阵

定义 4.1.1 除了次对角线以外，其它元素全为 0 的 n 阶方阵

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & \cdots & 0 & a_1\\ 0 & 0 & \cdots & a_2 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ a_n & 0 & \cdots & 0 & 0\end{pmatrix}$$

称为次对角矩阵。

性质：

1) 数 k 与次对角矩阵的乘积仍是次对角矩阵。
2) 次对角矩阵 A 与它的次转置矩阵 A^{ST} 相等，即 $A^{ST}=A$。
3) 两个同阶的次对角矩阵 A 与 B 的乘积是对角矩阵，且 $AB=(BA)^{ST}$。
4) 当次对角上各个元素 $a_i\neq 0\,(i=1,2,\cdots,n)$ 时，则次对角矩阵

$$A=\begin{pmatrix}0 & 0 & \cdots & 0 & a_1\\ 0 & 0 & \cdots & a_2 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & a_{n-1} & \cdots & 0 & 0\\ a_n & 0 & \cdots & 0 & 0\end{pmatrix}\text{可逆，且 }A^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 0 & \cdots & 0 & a_n^{-1}\\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1}^{-1} & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & a_2^{-1} & \cdots & 0 & 0\\ a_1^{-1} & 0 & \cdots & 0 & 0\end{pmatrix}$$

证：1)~4)可直接利用矩阵有关运算的定义验证(略)。次对角矩阵相关证明可见文[9]。

5) 设 $A=\begin{pmatrix}0 & 0 & \cdots & 0 & a_1\\ 0 & 0 & \cdots & a_2 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & a_{n-1} & \cdots & 0 & 0\\ a_n & 0 & \cdots & 0 & 0\end{pmatrix}(a_1\neq 0, i=1,2,\cdots,n)$

$\because |A|=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$，且 $a_1a_2\cdots a_n\neq 0$，$\therefore A$ 可逆。

$$\text{又}\because (A\,|\,E)=\begin{pmatrix}0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & \cdots & a_2 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & a_{n-1} & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0\\ a_n & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\to\cdots\to\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n^{-1}\\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1}^{-1} & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & a_2^{-1} & \cdots & 1 & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & a_1^{-1} & 0 & \cdots & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\therefore A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n^{-1} \\ 0 & 1 & \cdots & a_{n-1}^{-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_2^{-1} & \cdots & 1 & 0 \\ a_1^{-1} & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4.2. 次数量矩阵

定义 4.2.1 形如 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & k \\ 0 & 0 & \cdots & k & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & k & \cdots & 0 & 0 \\ k & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 的 n 阶方阵为次数量矩阵(k 是常数)，简记为 kJ_n (其中 J_n 表示次对角线上元素全为 1 而其余元素全为 0 的方阵)。

设 $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & k \\ 0 & 0 & \cdots & k & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & k & \cdots & 0 & 0 \\ k & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$，则 $A=kJ_n$。对 $B_{m\times n}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1,n-1} & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2,n-1} & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b_{m-1,1} & b_{m-1,2} & \cdots & b_{m-1,n-1} & b_{m-1,n} \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{m,n-1} & b_{mn} \end{pmatrix}$ 有

$$B_{m\times n}\left(kJ_n\right)=k\left(B_{m\times n}J_n\right)=k\begin{pmatrix} b_{1n} & b_{1,n-1} & \cdots & b_{11} \\ b_{2n} & b_{2,n-1} & \cdots & b_{21} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m-1,n} & b_{m-1,n-1} & \cdots & b_{m-1,1} \\ b_{mn} & b_{m,n-1} & \cdots & b_{m1} \end{pmatrix}$$

$$\left(kJ_mB_{m\times n}\right)=k\left(J_mB_{m\times n}\right)=k\begin{pmatrix} b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{m,n-1} & b_{mn} \\ b_{m-1,1} & b_{m-1,2} & \cdots & b_{m-1,n-1} & b_{m-1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2,n-1} & b_{2n} \\ b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1,n-1} & b_{1n} \end{pmatrix}$$

4.3. 次三角形矩阵

定义 4.3.1 形如 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 或 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix}$ 的 n 阶方阵称为次上三角形矩阵或次下三角形矩阵，它的次对角线以下或以上的元素全等于 0，次上、下三角形矩阵统称为次三角形矩阵。

性质：

1) 同阶的次上(下)三角形矩阵 A、B 的和或差仍为次上(下)三角形矩阵。

2) 数 k 与次上(下)三角形矩阵 A 的乘积仍为次上(下)三角形矩阵。

3) 次上(下)三角形矩阵 A 与下(上)三角形矩阵 B 的乘积是次上(下)三角形矩阵。

4) 次上(下)三角形矩阵 A 的次转置 A^{ST} 是次下(上)三角形矩阵。

5) 当次对角线上各元素 a_{ij} 均不等于 0 时，次三角形矩阵可逆，且逆矩阵仍为次三角形矩阵。如果次三角形矩阵 A 是次上(下)三角形矩阵，则其逆矩阵 A^{-1} 是次下(上)三角形矩阵。

证：1)~3)的证明可直接由矩阵的运算法则证得(略)。

4) 根据次转置定义容易证明。

5) 设 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\because A$ 的次对角线上元素均不等于 0，

$\therefore |A| = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1} \neq 0$ 。

从而矩阵 A 可逆，由矩阵的初等行变换不难求得，A 的逆矩阵是一个次下三角形矩阵。

同理可证，当 A 是次下三角形矩阵时，结论成立。

4.4. 次正交矩阵

由定义 1.2.4 可知，如果数域 P 上的 n 阶方阵满足 $A^{ST}A = E$ (或 $AA^{ST} = E$)，则称 A 是次正交矩阵。易知 n 阶单位矩阵 E 是次正交矩阵。

例如，矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -\frac{1}{2} \\ -4 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

是实数域 P 上的一个三阶次正交矩阵。

性质 4.4.1 若 A 是 n 阶次正交矩阵，则 A^{ST} 也是次正交矩阵。

证：因为 A 是次正交矩阵，所以 $AA^{ST} = E$ 。将 $AA^{ST} = E$ 等式两边取次转置，得

$$\left(A^{ST}\right)^{ST} A^{ST} = AA^{ST} = E$$

所以 A^{ST} 也是次正交矩阵。证毕。

性质 4.4.2 若 A 是 n 阶次正交矩阵，则 $|A| = 1$ 或 $|A| = -1$ 。

证：因为 A 是次正交矩阵，所以 $AA^{ST} = E$ 。将等式 $AA^{ST} = E$ 两边取行列式，得

$$\left|AA^{ST}\right| = |A| \cdot \left|A^{ST}\right| = |A|^2 = 1$$

所以 $|A| = 1$ 或 $|A| = -1$ 。证毕。

性质 4.4.3 若 A 是次正交矩阵，则 A 可逆，且 A^{-1} 也是次正交矩阵。

证：因为 A 是次正交矩阵，所以 $AA^{ST} = E$ 。由性质 4.4.2 知 $|A| \neq 0$ ，所以 A 可逆，则 A^{ST} 也可逆，且 $\left(A^{ST}\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{ST}$ ；

又因为

$$\left(A^{-1}\right)^{ST}\left(A^{-1}\right) = \left(A^{ST}\right)^{-1} A^{-1} = \left(AA^{ST}\right)^{-1} = E^{-1} = E$$

所以 A^{-1} 也是次正交矩阵。证毕。

性质 4.4.4 若 A、B 均是 n 阶次正交矩阵，则 AB 也是次正交矩阵。

证：因为 $AA^{ST}=E$， $BB^{ST}=E$，

所以有

$$(AB)(AB)^{ST}=(AB)\left(B^{ST}A^{ST}\right)=A\left(BB^{ST}\right)A^{ST}=AEA^{ST}=AA^{ST}=E$$

从而 AB 也是次正交矩阵。证毕。

命题 4.4.1 设 A、B 是两个 n 阶次正交矩阵，且 $|AB|=-1$，则

1) $\left|A^{ST}B\right|=\left|AB^{ST}\right|=\left|A^{ST}B^{ST}\right|=-1$；

2) $|A+B|=0$。

证：$\because A,B$ 均是次正交矩阵，

$\therefore$ 由次转置矩阵定义知 $A^{ST}A=E=B^{ST}B$

1) 由方阵的行列式的性质与次转置矩阵的性质可知，

$$\left|A^{ST}B\right|=\left|A^{ST}\right|\cdot|B|=|A|\cdot|B|=|AB|=-1;$$

同理可证 $\left|AB^{ST}\right|=\left|A^{ST}B^{ST}\right|=-1$。

2) $\because\left|A^{ST}B\right|=-1$， $\therefore\left|(-1)E-A^{ST}B\right|=0$，

由方阵的行列式的性质得 $|A+B|=\left|(-A)\left(-E-A^{ST}B\right)\right|=|-A|\cdot\left|-E-A^{ST}B\right|=|A|\cdot 0=0$。证毕。

命题 4.4.2 对 n 级方阵 A，若下列三个条件中任意两个成立，则另一个也成立。

1) $A^{ST}=A$

2) $A^{ST}A=E$

3) $A^2=E$

证：1) 当 $A^{ST}=A$， $A^{ST}A=E$ 时， $A^2=AA=A^{ST}A=E$。

2) 当 $A^{ST}=A$， $A^2=E$ 时， $A^{ST}A=AA=A^2=E$。

3) 当 $A^{ST}A=E$， $A^2=E$ 时， $A^{ST}=A^{ST}E=A^{ST}A^2=\left(A^{ST}A\right)A=EA=A$。

命题 4.4.3 若 A 是 n 阶次对称阵，Q 是 n 阶次正交矩阵，则 $Q^{-1}AQ$ 是次对称矩阵。

证：因为 A 是次对称矩阵，Q 是次正交矩阵，所以

$$A^{ST}=A, QQ^{ST}=E, Q^{-1}=Q^{ST}$$

由此可知

$$\left(Q^{-1}AQ\right)^{ST}=\left(Q^{ST}AQ\right)^{ST}=Q^{ST}A^{ST}\left(Q^{ST}\right)^{ST}=Q^{ST}AQ=Q^{-1}AQ$$

所以 $Q^{-1}AQ$ 是次对称矩阵。证毕。

命题 4.4.4 若 λ 是次正交矩阵 A 的特征值，则 $\frac{1}{\lambda}$ （$\lambda\neq 0$）也是 A^{ST} 的特征值。

证：设 $\alpha(\alpha\neq 0)$ 是 A 的属于 λ 的特征向量，所以 $A\alpha=\lambda\alpha$。

由性质 4.4.3 知 A 可逆，且 A^{-1} 也是次正交矩阵，将等式 $A\alpha=\lambda\alpha$ 两边同时左乘 A^{-1} 得

$$\alpha=A^{-1}(\lambda\alpha)=\lambda\left(A^{-1}\alpha\right)$$

即 $A^{-1}\alpha=\frac{1}{\lambda}\alpha$ （$\lambda\neq 0$）

所以 A^{-1} 的特征值为 $\frac{1}{\lambda}$ （$\lambda\neq 0$）。

命题 4.4.5 如果 A 是 n 阶方阵，且满足 n 是奇数，$AA^{ST}=E$，$|A|=1$，则

$$|E-A|=0\,.$$

证：因为

$$\begin{aligned}|E-A|&=\left|AA^{ST}-AE\right|=\left|A\left(A^{ST}-E\right)\right|\\&=|A|\cdot\left|A^{ST}-E\right|=1\cdot\left|(A-E)^{ST}\right|\\&=|A-E|=|-(E-A)|\\&=(-1)^n|E-A|\\&=-|E-A|\end{aligned}$$

所以 $2|E-A|=0$，从而 $|E-A|=0$。证毕。

命题 4.4.6 如果 A 是 n 阶方阵，且满足 $AA^{ST}=E$，$|A|=-1$，则 $|E+A|=0$。证明与命题 4.4.5 同理(略)。

命题 4.4.7 设 A,B 是两个 n 阶次正交矩阵，且 $|AB|=-1$，则

$$\left|A^{ST}B\right|=\left|AB^{ST}\right|=\left|A^{ST}B^{ST}\right|=-1$$

证：由方阵的行列式的性质得

$$\left|A^{ST}B\right|=\left|A^{ST}\right|\cdot|B|=|A|\cdot|B|=|AB|=1$$

同理有 $\left|AB^{ST}\right|=\left|A^{ST}B^{ST}\right|=-1$。证毕。

命题 4.4.8 设 A 是 n 阶实次对称矩阵，B 为 n 阶实反次对称矩阵，且 $AB=BA$，$A-B$ 可逆，则 $(A+B)(A-B)^{-1}$ 是次正交矩阵。

证：因为 $A^{ST}=A$，$B^{ST}=-B$，$AB=BA$，所以 $(A-B)(A+B)=(A+B)(A-B)$，

由此可得

$$\begin{aligned}&\left[(A+B)(A-B)^{-1}\right]^{ST}(A+B)(A-B)^{-1}\\&=\left[(A-B)^{-1}\right]^{ST}(A+B)^{ST}(A+B)(A-B)^{-1}\\&=\left[(A-B)^{ST}\right]^{-1}(A-B)(A+B)(A-B)^{-1}\\&=(A+B)^{-1}(A+B)(A-B)(A-B)^{-1}\\&=E\end{aligned}$$

所以 $(A+B)(A-B)^{-1}$ 是次正交矩阵。证毕。次正交矩阵的性质见文[10]。

4.5. 次可逆矩阵

由定义 1.2.5 可知，设 A 是 n 阶方阵，如果存在 n 阶方阵 B，使得 $AB=BA=J$ 称 A 为次可逆矩阵，矩阵 B 称为 A 的次逆矩阵，记为 $A^{(-1)}$。

可以看出次可逆矩阵一定是可逆矩阵，这是因为 $|AB|=|BA|=|J|\neq0$，有 $|A|\neq0$。

特别地：

1) 若 $B=J$，则 A 为单位矩阵；
2) 若 $B=E$，则 A 为次单位矩阵；
3) 若 $B=A^TJ=JA^T$，则 A 为正交矩阵；

4) 若 $B=A^{ST}J=JA^{ST}$，则 A 为次正交矩阵。

引理 4.5.1 设 A 是 n 阶次可逆矩阵，则

1) kA 也是次可逆矩阵，且 $(kA)^{-1}=\frac{1}{k}A^{-1}$ (其中 $k\neq 0$)；

2) A 的次转置矩阵 A^{ST} 也是次可逆矩阵，且 $\left(A^{ST}\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^{ST}$；

3) A 的转置矩阵 A^{T} 也是次可逆矩阵，且 $\left(A^{T}\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^{T}$；

4) A 的逆矩阵 A^{-1} 也是次可逆矩阵，且 $\left(A^{-1}\right)^{(-1)}=\left(A^{(-1)}\right)^{-1}$。

引理 4.5.2 若 A 和 B 都 n 阶次可逆矩阵，则

1) $JAJ=A$，即 $AJ=JA$；

2) AB 也是次可逆矩阵，并且 $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}J=JB^{-1}A^{-1}$。

命题 4.5.1 设 A 是 n 阶次对称矩阵，B 为 n 阶反次对称矩阵，且 $AB=BA$，则

1) 若 $A+B$ 是次可逆矩阵，则 $(A-B)(A+B)^{-1}$ 和 $(A+B)^{-1}(A-B)$ 都是次正交矩阵。

2) 若 $A-B$ 是次可逆矩阵，则 $(A+B)(A-B)^{-1}$ 和 $(A-B)^{-1}(A+B)$ 都是次正交矩阵。

证：1) 由于 $\left(A^{ST}\pm B^{ST}\right)=A\mp B$，$(A+B)(A-B)=(A-B)(A+B)$，所以

$$
\begin{aligned}
&(A-B)(A+B)^{-1}\left((A-B)(A+B)^{-1}\left(A^{ST}-B^{ST}\right)\right)\\
&=(A-B)(A+B)^{-1}\left(A^{ST}+B^{ST}\right)^{-1}\left(A^{ST}-B^{ST}\right)\\
&=(A-B)(A+B)^{-1}\left(A^{ST}+B^{ST}\right)^{-1}(A+B)\\
&=(A-B)J\left(\left(A^{ST}+B^{ST}\right)(A+B)\right)^{-1}(A+B)\\
&=(A-B)J\left((A-B)(A+B)\right)^{-1}(A+B)\\
&=(A-B)J\left((A+B)(A-B)\right)^{-1}(A+B)\\
&=(A-B)J\left((A+B)\left(A^{ST}+B^{ST}\right)\right)^{-1}(A+B)\\
&=(A-B)JJ\left(\left(A^{ST}+B^{ST}\right)\right)^{-1}(A+B)^{-1}(A+B)\\
&=(A-B)\left(\left(A^{ST}+B^{ST}\right)\right)^{-1}J\\
&=\left(A^{ST}+B^{ST}\right)\left(\left(A^{ST}+B^{ST}\right)\right)^{-1}J\\
&=\left((A+B)^{-1}(A+B)\right)^{ST}J\\
&=J^{ST}J=E
\end{aligned}
$$

同理可证

$$
\begin{aligned}
&(A+B)^{-1}(A-B)\left((A+B)^{-1}(A-B)\right)^{ST}\\
&=\left((A+B)^{-1}(A-B)\right)^{ST}(A+B)^{-1}(A-B)\\
&=E
\end{aligned}
$$

因此 1)成立。易得 2)可类比 1)的证明成立，证略。

命题 4.5.2 若 $J+A$ 是次可逆矩阵，那么

$$(J-A)(J+A)^{-1}=(J+A)^{-1}(J-A).$$

证：因为 $J+A$ 是次可逆矩阵，所以 $(J+A)J=J(J+A)$，于是 $AJ=JA$，
所以 $(J+A)(J-A)=(J-A)(J+A)$，等式的左右两边同时乘以 $(J+A)^{-1}$ 可得

$$\begin{aligned} J(J-A)(J+A)^{-1} &= (J+A)^{-1}(J-A)J \\ &= (J+A)^{-1}(JJ-AJ) \\ &= (J+A)^{-1}(JJ-JA) \\ &= (J+A)^{-1}J(J-A) \end{aligned}$$

又因为次可逆矩阵的次逆矩阵是次可逆的，故有

$$(J+A)^{-1}J=J(J+A)^{-1}$$

从而

$$(J+A)^{-1}J(J-A)=J(J+A)^{-1}(J-A)$$

所以

$$(J-A)(J+A)^{-1}=(J+A)^{-1}(J-A)。$$

命题 4.5.3 设 A 是 n 阶反次对称矩阵，若 $E+A$ 为 n 阶次可逆矩阵，则

$$(E-A)(E+A)^{-1}=(E+A)^{-1}(E-A)$$

是次正交矩阵。

证：由于 $E+A$ 为 n 阶次可逆矩阵，所以 $(E+A)^{-1}$ 存在，且有

$$(E+A)J=J(E+A),(E+A)^{-1}J=J(E+A)^{-1}$$

显然 $AE=EA$，于是

$$(E+A)(E-A)=(E-A)(E+A)$$

在此等式两边同时左乘以 $(E+A)^{-1}$，可得

$$J(E-A)=(E+A)^{-1}(E-A)(E+A),$$

从而有

$$(E-A)=J(E+A)^{-1}(E-A)(E+A)$$

再在此等式两边同时右乘以 $(E+A)^{-1}$，可得

$$\begin{aligned} (E-A)(E+A)^{-1} &= J(E+A)^{-1}(E-A)(E+A)(E+A)^{-1} \\ &= J(E+A)^{-1}(E-A)J \\ &= J(E+A)^{-1}(EJ-AJ) \\ &= J(E+A)^{-1}(JE-JA) \\ &= J(E+A)^{-1}J(E-A) \\ &= (E+A)^{-1}(E-A) \end{aligned}$$

从而

$$(E-A)(E+A)^{-1}=(E+A)^{-1}(E-A)$$

显然单位矩阵 E 为次对称矩阵，且 $EA=AE$，由定理 4.5.1 可知 $(E-A)(E+A)^{-1}$ 为次正交矩阵。故 $(E-A)(E+A)^{-1}=(E+A)^{-1}(E-A)$ 是次正交矩阵。

性质 4.5.1 若 A 是次可逆矩阵，则

(i) 若 λ 是 A^{-1} 的次特征值，则 λ 是 A^{-1} 的特征值；

(ii) 若 λ 是 A^{-1} 的特征值，则 λ 是 A^{-1} 的次特征值。

证：由于 λ 是 A^{-1} 的次特征值，可知存在次特征向量 α 使得 $A^{-1}\alpha=\lambda J\alpha$，

所以

$$JA^{-1}\alpha=J\lambda J\alpha=\lambda\alpha$$

又因为 $A^{-1}=JA^{-1}$，所以 $A^{-1}\alpha=\lambda\alpha$，由此(i)成立。

同理可证(ii)成立。

性质 4.5.2 若 A 是次可逆矩阵，则

(i) 若 $\lambda\neq 0$ 是 A 的次特征值，则 $\frac{1}{\lambda}$ 是 A^{-1} 的特征值；

(ii) 若 $\lambda\neq 0$ 是 A 的特征值，则 $\frac{1}{\lambda}$ 是 A^{-1} 的次特征值。

证：1) 若 λ 是 A 的次特征值，则存在次特征向量 α 使得 $A\alpha=\lambda J\alpha$，两边同时左乘 A^{-1} 得：

$$A^{-1}A\alpha=A^{-1}\lambda J\alpha$$

化简可知

$$J\alpha=\lambda A^{-1}J\alpha=\lambda JA^{-1}\alpha,$$

又 $\lambda\neq 0$，即 $A^{-1}\alpha=\frac{1}{\lambda}\alpha$，所以 $\frac{1}{\lambda}$ 是 A^{-1} 的特征值，所以(i)成立。

2) 若 λ 是 A 的特征值，则存在次特征向量 β 使得 $A\beta=\lambda\beta$，两边同时左乘 A^{-1} 得：

$$A^{-1}A\beta=A^{-1}\lambda\beta$$

化简可知

$$J\beta=\lambda A^{-1}\beta,$$

又 $\lambda\neq 0$，即 $A^{-1}\beta=\frac{1}{\lambda}J\beta$，所以 $\frac{1}{\lambda}$ 是 A^{-1} 的次特征值，所以(ii)成立。

关于次可逆矩阵的其他性质、定理、证明可参考文献[11]。

5. 矩阵次对角线角度的一些推广

5.1. 次对称变换

定义 5.1.1 若 $\ell_E(e_i)=e_{n-i+1}(i=1,2,\cdots,n)$，则称 ℓ_E 为 V 的关于标准正交基 E 的次单位变换。

定义 5.1.2 设 $\sigma\in L(V)$，$\forall\alpha,\beta\in V$，有

$$\langle\sigma(\alpha),\ell_E(\beta)\rangle=\langle\ell_E(\alpha),\sigma(\beta)\rangle, \tag{*}$$

则称 σ 为 V 的关于标准正交基 E 的次对称变换，简称为次对称变换。

容易验证次单位变换 ℓ_E 一定是正交变换、对称变换和次对称变换且 $\ell_E^2=Id$，Id 为单位变换。并且只要 σ 为一个变换，$\forall\alpha,\beta\in V$，(*)成立，则 $\sigma\in L(V)$，进而 σ 是次对称变换。

定理 5.1.1 ℓ_E 在标准阵正交基 E 下的矩阵为 J。

证明：$\ell_E(e_1,e_2,\cdots,e_n)=(e_n,e_{n-1},\cdots,e_1)=(e_1,e_2,\cdots,e_n)J$。

定义 5.1.2 σ 为次对称变换 $\Leftrightarrow$ $\ell_E\sigma$ 为对称变换($\sigma\ell_E$ 也对对称变换)。

证明：$\forall\alpha,\beta\in V$，由 ℓ_E 为对称变换得

$$\langle\sigma(\alpha),\ell_E(\beta)\rangle=\langle\ell_E(\alpha),\beta\rangle$$

和

$$\langle\ell_E(\alpha),\sigma(\beta)\rangle=\langle\alpha,\ell_E\sigma(\beta)\rangle$$

故 σ 为次对称变换

$$\Leftrightarrow\langle\sigma(\alpha),\ell_E(\beta)\rangle=\langle\ell_E(\alpha),\sigma(\beta)\rangle$$

$$\Leftrightarrow\langle\ell_E\sigma(\alpha),\beta\rangle=\langle\alpha,\ell_E\sigma(\beta)\rangle\Leftrightarrow\ell_E\sigma$$

为对称变换。

定理 5.1.3 σ 为次对称变换 $\Leftrightarrow$ σ 在任一(某一)标准正交基下的矩阵为实次对称矩阵。

证明：设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为 V 的标准正交基且

$$\sigma(a_j)=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}a_i\ (j=1,2,\cdots,n),$$

则 σ 标准正交基 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 下的矩阵为 $A=(a_{ij})$。

而 $a_{n-j+1,n-i-1}=\langle\sigma(a_{n-i+1}),a_{n-j+1}\rangle=\langle\sigma(a_{n-i+1}),\ell_E(a_j)\rangle$，

$$a_{ij}=\langle a_i,\sigma(a_j)\rangle=\langle\ell_E(a_{n-i+1}),\sigma(a_j)\rangle。$$

“$\Rightarrow$”：σ 为次对称变换 $\Rightarrow$

$$\langle\sigma(a_{n-i+1}),\ell_E(a_j)\rangle=\langle\ell_E(a_{n-i+1}),\sigma(a_j)\rangle\Rightarrow a_{n-j+1,n-i+1}=a_{ij}$$

$\Rightarrow A$ 为次对称矩阵。

“$\Leftarrow$”：对 $\forall\alpha=\sum_{i=1}^{n}x_ia_i,\beta=\sum_{i=1}^{n}y_ia_i\in V$，有

$$\sigma(\alpha)=(a_1,a_2,\cdots,a_n)AX,\quad\sigma(\beta)=(a_1,a_2,\cdots,a_n)AY,$$

$$\ell_E(\alpha)=(a_1,a_2,\cdots,a_n)JX,\quad\ell_E(\beta)=(a_1,a_2,\cdots,a_n)JY.$$

其中

$$X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T,Y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T\in R^{n\times1}.$$

于是

$$\langle\sigma(\alpha),\ell_E(\beta)\rangle=(AX)^TJY=X^TA^TJY=X^TJAY$$

其中

$$A=A^{ST}=JA^TJ,A^TJ=JA,$$

则

$$\langle\ell_E(\alpha),\sigma(\beta)\rangle=(JX)^TAY=X^TJAY.$$

因而 $\langle\sigma(\alpha),\ell_E(\beta)\rangle=\langle\ell_E(\alpha),\sigma(\beta)\rangle$，即 σ 为次对称变换。次对称变换的推广见文[12]。

5.2. 关于矩阵的次合同

定义 5.2.1 设 A,B 是数域 P 上的两个 n 阶方阵，如果存在数域 P 上的 n 阶可逆方阵 C 使得

$$C^{ST}AC=B$$

则称方阵 A 与 B 在数域 P 上次合同。

性质 5.2.1 设 A 是可逆的次对称阵，则 A^{-1} 与 A 次合同。

证明：$\because AA^{-1}A=A$，而 $A^{ST}=A$；

$\therefore A^{ST}A^{-1}A=A$，又 A 可逆；

故 A^{-1} 与 A 次合同。

性质 5.2.2 矩阵的次合同是一种等价关系即

1°自反性：$A=E^{ST}AE$；

2°对称性：$B=C^{ST}AC\left(C\text{ 可逆}\right)\Rightarrow A=\left(C^{-1}\right)^{ST}BC^{-1}$；

3°传递性：$B=C_1^{ST}AC_1,C=C_2^{ST}BC_2\left(C_1,C_2\text{ 可逆}\right)\Rightarrow C=\left(C_1C_2\right)^{ST}A\left(C_1C_2\right)$。

证略。

定理 5.2.1 设 A 是数域 P 上的 n 阶次对称阵，则 A 必合同于次对角阵，即存在数域 P 上 n 阶可逆方阵 C 使得

$$C^{ST}AC=\begin{pmatrix}0&\cdots&0&\lambda_1\\0&\cdots&\lambda_2&0\\0&\iddots&0&0\\\lambda_n&\cdots&0&0\end{pmatrix}$$

证明：$\because A$ 是次对称阵，$\therefore JA$ 是对称阵，于是 JA 合同于对角阵。即存在 n 阶可逆方阵 C 使得

$$C^T\left(JA\right)C=diag\left(C_1,C_2,\cdots,C_m\right)$$

从而

$$\left(JC^TJ\right)AC=J\left[C^T\left(JA\right)C\right]=Jdiag\left(C_1,C_2,\cdots,C_n\right)$$

因此可得

$$C^{ST}AC=\begin{pmatrix}0&0&\cdots&0&C_n\\0&0&\cdots&C_{n-1}&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\C_1&0&\cdots&0&0\end{pmatrix}$$

证毕。

由次对称矩阵的次正定性，我们有

性质 5.2.3 如果次对称矩阵 A 与 B 次合同，并且 A 是次正定的，则 B 也是次正定的。

证明：设 $B=C^{ST}AC$ (C 是实可逆阵)，因为 A 次对称，有 $A^{ST}=A$，所以

$$B^{ST}=\left(C^{ST}AC\right)^{ST}=C^{ST}A^{ST}\left(C^{ST}\right)^{ST}=C^{ST}AC=B$$

从而 B 仍然是实次对称的。

对 $\forall Y\in R^n,Y\neq0$，令 $X=CY$，则 $X\in R^n,X\neq0$，由 A 次正定知 $X^{ST}AX>0$，

于是

$$Y^{ST}BY = Y^{ST}\left(C^{ST}AC\right)Y = \left(Y^{ST}C^{ST}\right)A\left(CY\right) = \left(CY\right)^{ST}A\left(CY\right) = X^{ST}AX > 0,$$

故方阵 B 也是次正定的。

推论：n 阶实次对称阵 A 次正定的充要条件是存在 n 阶实可逆阵 C 使得

$$C^{ST}AC = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \lambda_1 \\ 0 & \cdots & \lambda_2 & 0 \\ 0 & .\cdot^{\cdot} & 0 & 0 \\ \lambda_n & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

其中 $\lambda_i > 0, i = 1,2,\cdots,n$ 。

证明：$\because A$ 为实次对称阵，$\therefore$ 由定理知存在实可逆矩阵 C 使得

$$C^{ST}AC = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \lambda_1 \\ 0 & \cdots & \lambda_2 & 0 \\ 0 & .\cdot^{\cdot} & 0 & 0 \\ \lambda_n & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

于是由命题 5.2.3 得

$$A\text{ 次正定} \Leftrightarrow C^{ST}AC\text{ 次正定} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \lambda_1 \\ 0 & \cdots & \lambda_2 & 0 \\ 0 & .\cdot^{\cdot} & 0 & 0 \\ \lambda_n & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}\text{次正定} \Leftrightarrow \forall X = \left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right) \in R^n, X \neq 0,$$

$$X^{ST}\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \lambda_1 \\ 0 & \cdots & \lambda_2 & 0 \\ 0 & .\cdot^{\cdot} & 0 & 0 \\ \lambda_n & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}X = \lambda_n x_1^2 + \cdots + \lambda_2 x_{n-1}^2 + \lambda_1 x_n^2 \Leftrightarrow \lambda_i > 0, i = 1,2,\cdots,n\text{ 。}$$

关于矩阵的次合同的其他结论可见文[13]。

5.3. 次对称循环矩阵

定义 5.3.1 n 阶对称矩阵

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_0 \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_0 & a_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-3} & a_{n-2} \end{pmatrix}$$

由它的第一行的 n 个元素 $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}$ 完全确定，叫由 n 个元素 $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}$ 所生成的对称循环矩阵，记为 $SC\left(a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}\right)$ 。次对称循环矩阵的提出可见文[14]。

定义 5.3.2 n 阶次对称矩阵

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-3} & a_{n-2} \\ a_{n-2} & a_{n-1} & a_0 & \cdots & a_{n-4} & a_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix}$$

由它的第一行的 n 个元素 $a_0,a_1,\cdots,a_{n-1}$ 完全确定，叫由 n 个元素 $a_0,a_1,\cdots,a_{n-1}$ 所生成的次对称循环矩阵，记为 $C\left(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1}\right)$。特别地，当 $a_i=1$，其余的 $n-1$ 个数都等于 0 时记为 C_i，即

$$C_i=C\left(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0\right)$$

并称

$$C_1=C\left(0,1,0,\cdots,0\right)=\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0&0\\0&0&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&0&1\\1&0&0&\cdots&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&I_{n-1}\\1&0\end{pmatrix}$$

为基础循环矩阵。

命题 5.3.1 $C\left(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1}\right)=\sum_{i=0}^{n-1}a_ic_i=\sum_{i=0}^{n-1}a_ic_i^i$，可知 $C\left(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1}\right)$ 是多项式

$$f\left(x\right)=a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}$$

在 $x=c_i$ 的值。我们称这个多项式叫 $c\left(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1}\right)$ 的表示多项式。

命题 5.3.2 次对称循环矩阵的乘法是可交换的。

证明：

$$\begin{aligned}&\because c\left(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1}\right)c\left(b_0,b_1,\cdots,b_{n-1}\right)\\&=\left(\sum_{i=0}^{n-1}a_ic_1^i\right)\left(\sum_{j=0}^{n-1}b_jc_1^j\right)=\left(\sum_{j=0}^{n-1}b_jc_1^j\right)\left(\sum_{i=0}^{n-1}a_ic_1^i\right)\\&=c\left(b_0,b_1,\cdots,b_{n-1}\right)c\left(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1}\right)\end{aligned}$$

命题 5.3.3 次对称循环矩阵的和仍是次对称循环矩阵。

证明：

$$\begin{aligned}&c\left(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1}\right)+c\left(b_0,b_1,\cdots,b_{n-1}\right)\\&=\sum_{i=0}^{n-1}a_ic_i^i+\sum_{i=0}^{n-1}b_jc_i^i\\&=\sum_{i=0}^{n-1}\left(a_i+b_i\right)c_i^i\\&=c\left(a_0+b_0,a_1+b_1,\cdots,a_{n-1}+b_{n-1}\right)\end{aligned}$$

命题 5.3.4 对于任意数 k，有

$$kc\left(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1}\right)=c\left(ka_0,ka_1,\cdots,ka_{n-1}\right)$$

由命题 5.3.3、命题 5.3.4 可知

命题 5.3.5 数域 F 上所有 n 阶次对称循环矩阵的集合对于矩阵的加法和数与矩阵的乘法做成 F 上一个向量空间。并且由 $c_0,c_1,\cdots,c_{n-1}$ 的线性无关性，知这个向量空间的维数是 n。

参考文献

[1] 卢业广. 矩阵负共轭概念[J]. 皖南大学学报, 1962(1).

[2] 卢业广. 次对称矩阵和次正交矩阵[J]. 工科数学, 1989(1): 13-16.

[3] 刘玉波. 次对称矩阵的对角化方法及次正定矩阵[J]. 理工教学, 1992(2).

[4] 王文惠. 次转置矩阵的有关命题[J]. 重庆交通学院学报, 1998(3): 133-136.

[5] 夏银红, 赵文菊. 次转置矩阵的可对角化条件[J]. 新乡学院学报(自然科学版), 2010, 27(2): 1+4.

[6] 秦兆华. 矩阵的次转置及实次对称矩阵的次正定性[J]. 渝州大学学报(自然科学版), 1994, 11(1): 14-18.

[7] 陈湘贇. 次对称矩阵的一些性质[J]. 盐城工学院学报(自然科学版), 2007(4): 17-18+27.

[8] 陶鲜花. 实反次对称矩阵的对角化[J]. 广东工业大学学报, 2005(3): 116-120.

[9] 王文惠, 黄沄. 几种特殊的次矩阵[J]. 重庆教育学院学报, 2001(3): 31-33.

[10] 王文惠. 关于次正交矩阵[J]. 渝州大学学报(自然科学版), 1998(2): 13-17.

[11] 刘玉, 陈创鑫. 次可逆矩阵及其性质[J]. 大学数学, 2010, 26(3): 177-180.

[12] 陈特清, 徐金平, 谢溪庄. 实次对称矩阵的推广与次对称变换[J]. 内江师范学院学报, 2012, 27(10): 1-3.

[13] 钟润华. 关于矩阵的次合同[J]. 渝州大学学报(自然科学版), 1997(2): 38-39+77.

[14] 秦兆华. 对称循环矩阵与次对称循环矩阵[J]. 渝州大学学报(自然科学版), 1997(2): 15-19.