

# 指向数学学科核心素养在“二面角的概念”中的应用

费依婷

新疆师范大学数学科学学院, 新疆 乌鲁木齐

收稿日期: 2023年12月13日; 录用日期: 2023年12月21日; 发布日期: 2024年1月26日

## 摘要

本文以“二面角的概念”教学设计为例, 通过选择实例 - 动手操作 - 说明原理 - 总结结论等教学环节, 体现了“做中学, 学中做”、“学生主体, 教师主导”的教学理念, 真正地将数学抽象、直观想象、逻辑推理等数学核心素养的培养落实到课堂教学中。

## 关键词

二面角, 数学核心素养

# Pointing to the Application of Core Competencies in Mathematics in “The Concept of Dihedral Angles”

Yiting Fei

School of Mathematical Sciences, Xinjiang Normal University, Urumqi Xinjiang

Received: Dec. 13<sup>th</sup>, 2023; accepted: Dec. 21<sup>st</sup>, 2023; published: Jan. 26<sup>th</sup>, 2024

## Abstract

This article takes “The Concept of Dihedral Angle” mathematics teaching design as an example, and implements the cultivation of core mathematical qualities such as mathematical abstraction, intuitive imagination, and logical reasoning through the selection of examples- hands-on operations - explanation of principles - summarizing conclusions and other teaching links.

## Keywords

### Dihedral Angle, Core Mathematical Literacy

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

“二面角的概念”是 2019 人教 A 版高中数学必修 2 第 8 章第 6 节的内容，主要内容有二面角的定义、二面角的平面角等知识点，是空间立体几何最重要的内容之一。此外，它也是空间中线线、线面、面面垂直关系的一个汇集点，是本章的重点内容。学好二面角的概念，有利于更好地掌握直线与平面的知识，但二面角的平面角概念的形成过程是一个难点。本文对此进行探究。

## 2. “二面角的概念”的教学设计

### 2.1. “二面角的概念”目标

- 1) 理解二面角及其平面角的概念。
- 2) 通过“翻书”、“开门”动画发现二面角，进而通过类比角的相关知识得到二面角的定义和二面角的平面角，感悟类比、化归等数学思想方法在探究立体几何中的作用。
- 3) 通过课堂活动参与，获得成功的体验，感受数学与实际生活的紧密联系。

### 2.2. “二面角的概念”重难点

- 1) 重点：二面角及其平面角的概念。
- 2) 难点：二面角的平面角的概念形成过程以及对概念的理解。

### 2.3. 教学过程

- 1) 创设情境，引入二面角概念

**引导语：**之前我们已经学习了直线与平面的位置关系，本节课自然而然就要进入平面与平面的位置关系的学习。生活中处处有数学，勾股定理，是毕达哥拉斯通过观察地板图形发现的。本节课，请同学们观看翻书和开门的动画，看看能有什么发现。

**问题 1：**在翻书和开门的过程中(如图 1)，纸和门的张口大小发生了变化。我们把纸和门的张口所形成的“角”称之为二面角。大家能类比角的概念，试着给出二面角的概念吗？

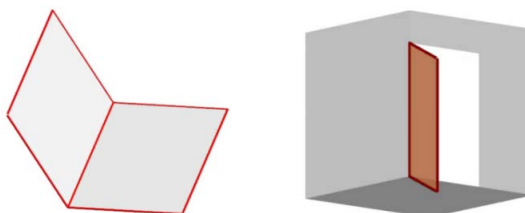


Figure 1. Question (1)

图 1. 问题(1)

**教师总结：**类比角的概念：有公共端点的两条射线所构成的图形，得到二面角的定义：

**定义 1** 从一条直线出发的两个半平面所组成的图形叫做二面角(如图 2)，这条直线叫做二面角的棱，这两个半平面叫做二面角的面，棱为  $AB$ ，面分别为  $\alpha$ ， $\beta$  的二面角记作二面角  $\alpha-AB-\beta$ 。有时为了方便，也可在  $\alpha$ ， $\beta$  内(棱以外的半平面部分)分别取点  $P$ ， $Q$ ，将这个二面角记作二面角  $P-AB-Q$ 。如果棱记作  $l$ ，那么这个二面角记作二面角  $\alpha-l-\beta$  或二面角  $P-l-Q$ 。

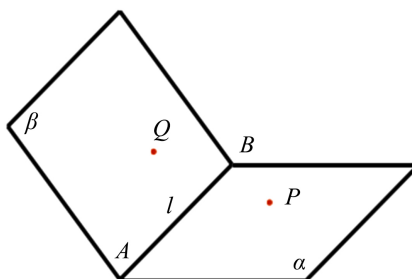


Figure 2. Definition (1)

图 2. 定义(1)

**【设计意图】** 引用数学史并通过具体的生活情境引起学生的注意，激发学生的学习兴趣。在翻书和开门的过程中，最直观的就是纸和门的张口大小发生变化，于是对纸和门的张口大小变化这一生活经验进行提炼，将纸和门的“张口”这一非数学语言转化为数学语言。在这个过程中，使学生逐步深入学习。然后比较本节课的“角”与之前学习过的平面角，促进知识的迁移，从而通过类比得到二面角的定义。这一过程帮助学生更好地理解二面角的概念，渗透了类比和数形结合的数学思想方法。

## 2) 二面角的平面角概念的生成

生活中其实有很多的二面角，如墙与地面构成的图形，墙与门构成的图形等等。既然生活中有这么多二面角的例子，二面角是一个角，那二面角的大小如何刻画呢？

**问题 2：**墙与地面所成二面角的大小是多少度？当书本闭合时所成二面角的大小是多少度？当书本打开至水平时所成二面角的大小是多少度？

**追问 1：**现在老师将书打开至任意一个位置，不再是之前那两种特殊情况，比如说打开至这个位置，同学们能说出这个二面角(如图 3)的大小有多大吗？如何刻画这个二面角的大小？

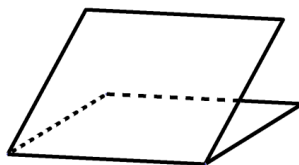


Figure 3. Probe (1)

图 3. 追问(1)

**追问 2：**之前所展示的二面角都是比较规整的图形，现将纸随意一折(如图 4)，那这个二面角的大小有多大呢？如何刻画这个二面角的大小？

在此基础上通过思考，概括出二面角的平面角的定义：

**定义 2** 在二面角(如图 5)的棱上任取一点  $O$ ，以  $O$  为垂足分别在两个半平面  $\alpha$  和  $\beta$  内作垂直于棱的射线  $OA$  和  $OB$ ，则射线  $OA$  和  $OB$  构成的  $\angle AOB$  就叫做二面角的平面角。

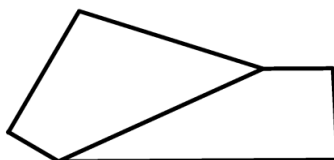


Figure 4. Probe (2)  
图 4. 追问(2)

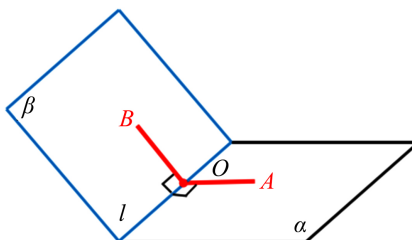


Figure 5. Definition (2)  
图 5. 定义(2)

**问题 3:**  $\angle AOB$  的大小与点  $O$  在棱上的位置有关吗?

**【设计意图】** 认识往往是逐步明朗与不断深入的过程, 从特殊到一般让学生说出二面角的大小, 进而抽象出二面角的平面角的定义。在教学时, 若对概念性知识采取告诉式教学, 过一段时间学生就会对这一知识点出现记忆模糊现象。出现这一现象的原因本质上是因为学生没有亲自参与这一知识的学习, 而只是被动地接受。因此尽管是概念性知识的学习, 但在教学时也应让学生积极地思考、主动地探究。

3) 对二面角的平面角定义的深入思考

**问题 4:** 为什么一定要用垂直于棱的两条射线的夹角定义二面角的平面角呢? 也就是说, 用不垂直于棱的两条射线的夹角能否定义二面角的平面角?

**教师引导:** 首先直观地看一下如果用两条不垂直于棱的射线的夹角定义二面角的平面角会产生怎样的结果。以此二面角为例(如图 6), 在二面角的棱上任取一点  $O$ , 在两个半平面内分别作不垂直于棱的射线  $OA$  和  $OB$ , 不妨让  $OA$  和  $OB$  与棱所成夹角均为  $30^\circ$ 。当二面角闭合和打开至水平时, 新定义的“二面角的平面角”分别是多少度?

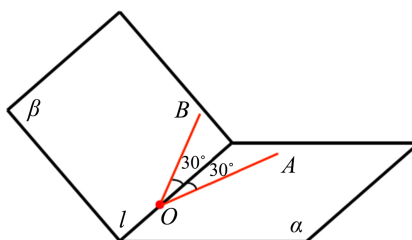


Figure 6. Question (4)  
图 6. 问题(4)

**【设计意图】** 在教学时, 对“二面角的概念”这一知识点, 一般在给出概念之后就结束了, 但本节课的教学在使学生理解并掌握其概念之后并没有结束, 而是引导学生继续探究其本质, 从而弄清楚二面角的平面角这样定义的原因。

### 3. 教学反思

#### 3.1. 应遵循学生的认知规律

奥苏贝尔说过,影响学习的唯一重要因素是学生已经知道了什么,然后从学生已有的知识出发设计教学[1]。即学习新知识之前,学生头脑中一定要具备与之有关的准备知识或经验,它们是支撑新知识形成的基础。唯有如此,学生才能建立新知识和旧知识或经验的内在联系,从而使理解学习得以发生。那么,学生学习“二面角的概念”之前,学生已经具备了哪些旧知识或经验呢?学生在此之前已经掌握了角的概念、见过很多生活中的“二面角”、具备一定的空间想象力、初步了解空间三维向平面二维转化的思想的应用。基于上述分析,本节课从学生已有经验出发,首先通过翻书和开门的动画加强学生的直观感知,进而类比角的相关知识,概括出二面角的概念,然后通过具体的生活情境,从特殊到一般提出问题引导学生不断深入,由此达到对二面角的透彻理解。在这个过程中提升学生直观想象、数学抽象、逻辑推理等数学核心素养。

#### 3.2. 应关注问题所承载的思想方法

本节课承载了数形结合思想、类比思想、特殊与一般思想、转化与化归思想。数形结合思想体现在教学过程的各个阶段,以形助数,以数解形,通过图形帮助学生更好地理解二面角以及二面角的平面角的概念,提升学生的直观感知能力。数形结合思想将抽象的数学关系与直观的几何图形相结合,将抽象的问题形象化、复杂的问题简单化,是一种重要的数学思想方法;类比思想主要体现在通过类比角的概念,使学生尝试探究二面角的概念,从而使学生能够更好地理解二面角的概念。类比思想是一种极具创造性的思想,有利于学生探究新事物,获得新发现;特殊与一般思想主要体现在通过具体的例子引出二面角及二面角的平面角的概念。特殊与一般的思想有利于我们得到新的结论,转化为一般性结论之后又用它解决特殊的问题;转化与化归思想体现在刻画二面角的大小的过程之中,用“平面化”的思想定义两个半平面所成的角,即用“平面角”度量“二面角”;转化与化归思想有利于解决复杂且困难的问题。数学思想方法是我们一生中运用最为广泛的知识。课堂上学习过的知识在一段时间之后可能会忘记,但知识中蕴含的数学思想方法在后续学习乃至社会生活中不可或缺[2]。学生领悟了数学思想方法,就可以用数学的眼光去学习、去生活。此外还可以将未知知识变为已知知识、将杂乱的内容变得有规律可循。

数学抽象是普通高中数学课程标准(2017年版2020年修订)提出的数学核心素养之一[3]。史宁中教授将数学抽象作为数学思想的本质之一[4],这种抽取本质属性而舍弃非本质属性的抽象思维,是一种重要的数学思维能力,有利于学生更好地解决问题。此外对学生而言由于数学抽象是一个存在困难的思维过程。怎样才能提取出本质属性?这需要教师在教学中逐步引导学生深化探究、总结归纳。

### 参考文献

- [1] Ausubel, D.P. (1978) Educational Psychology: A Cognitive View. Holt, Rinehart and Winston.
- [2] [日]米山国藏. 数学的精神、思想和方法[M]. 毛正中, 吴素华, 译. 成都: 四川教育出版社, 1984.
- [3] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017年版2020年修订) [M]. 北京: 人民教育出版社, 2020.
- [4] 刘祖希. 访史宁中教授: 谈数学基本思想、数学核心素养等问题[J]. 数学通报, 2017, 56(5): 1-5.