Pure Mathematics 理论数学, 2024, 14(1), 104-113
Published Online January 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.141012

Hans汉斯

一类 Hörmander 型条件的奇异积分算子交换子的估计

陈佳美

牡丹江师范学院，数学科学学院，黑龙江 牡丹江

收稿日期：2023年12月7日；录用日期：2024年1月10日；发布日期：2024年1月18日

摘 要

本文讨论了一类变形的 **Hörmander** 型条件的奇异积分算子与 **BMO** 函数生成的交换子在 **Herz** 型 **Hardy** 空间的估计。

关键词

一类变 **Hörmander** 型条件，**BMO** 函数，交换子，**Herz** 型 **Hardy** 空间

Estimation of Commutators of Singular Integral Operators Satisfying a Variant of Hörmander's Condition

Jiamei Chen

Department of Mathematics, Mudanjiang Normal University, Mudanjiang Heilongjiang

Received: Dec. 7^{th}, 2023; accepted: Jan. 10^{th}, 2024; published: Jan. 18^{th}, 2024

文章引用: 陈佳美. 一类 Hörmander 型条件的奇异积分算子交换子的估计[J]. 理论数学, 2024, 14(1): 104-113.
DOI: 10.12677/pm.2024.141012

Abstract

In this paper, we discuss the boundedness for commutators generated by the singular integral operators satisfying a variant of Hörmander's condition and BMO functions on Herz-Hardy space.

Keywords

A Variant of Hörmander's Condition, BMO Functions, Commutators, Herz-Hardy Space

1. 引言

1952年, Calderón 与 Zygmund[1]研究椭圆型偏微分方程引入了奇异积分的概念, 并且证明了奇异积分的存在性. 1956年, Calderón 与 Zygmund[2]研究了一类卷积型奇异积分算子, 并且证明了其 $L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1 < p < \infty)$ 有界性.

在经典的 Calderón-Zygmund 理论中, Hörmander 条件[3]定义为

$$\int_{|x|>2|y|} |K(x-y) - K(x)| \mathrm{d}x \leq C, \forall y \neq 0. \tag{1.1}$$

随着研究的不断深入, 核函数不满足条件 (1.1) 的奇异积分算子逐渐引起人们的关注. 1997年, Grubb 和 Moore 引入了一类变形的 Hörmander 条件[4]

$$\int_{|x|>2|y|} |K(x-y) - \sum_{j=1}^{m} \mathcal{B}_j(x)\phi_j(y)| \mathrm{d}x \leq C, \tag{1.2}$$

其中 $\mathcal{B}_j$ 和 ϕ_j 是适当的函数, 并证明了当核函数满足上式时, 算子 T 的 L^p 有界性. 后来, Trujillo-González 将核函数 K 的条件加强, 建立了奇异积分算子 T 的加权 L^p 有界性, 得到如下定理.

定理1.1. [5] 设 $K \in L^2(\mathbb{R}^n)$, 如果存在常数 $C_0 > 0$, 使

$(K1)$ $\|\hat{K}\|_\infty \leq C_0$,

$(K2)$ $|K(x)| \leq \frac{C_0}{|x|^n}$,

$(K3)$ 存在函数 $\mathcal{B}_1 \cdots \mathcal{B}_m$ 和 $\mathbb{R}^n$ 中的一族有界函数 $\Phi = \{\phi_1, \cdots \phi_m\}$ 且 $|det[\phi_j(y_i)]|^2 \in RH_\infty(\mathbb{R}^{nm})$,其中 $y_i \in \mathbb{R}^n$, $i, j = 1, \cdots, m$,

$(K4)$ 对固定的 $\gamma > 0$ 及任意的 $|x| > 2|y| > 0$, 有

$$|K(x-y) - \sum_{j=1}^{m} \mathcal{B}_j(x)\phi_j(y)| \leq C_0 \frac{|y|^\gamma}{|x-y|^{n+\gamma}}. \tag{1.3}$$

对任意的 $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, 定义算子 T:

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x-y)f(y)\mathrm{d}y.$$

则存在常数 $C > 0$, 对任意的 $1 < p < \infty$, $\omega \in A_p$, 有

$$\int_{\mathbb{R}^n} |Tf(x)|^p \omega(x)\mathrm{d}x \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \omega(x)\mathrm{d}x.$$

我们将核函数满足$(K1)-(K4)$的奇异算子称为变 Hörmander 型的奇异积分算子.

注 当 $m = 1$, $\mathcal{B}_1(x) = K(x)$, $\phi_1 = 1$ 时, 条件 (1.2) 就是通常的 Hörmander 条件, 并且 (1.3) 是经典的Calderón-Zygmund 核.

交换子是与 Calderón-Zygmund 算子密切相关的一类算子. 1976年, Coifman, Rochberg 和 Wesiss 发表了交换子的著名文献[6], 并建立了奇异积分算子交换子的有界性. 设 b 是 $\mathbb{R}^n$ 上的局部可积函数, 对于适当的函数 f, 由函数 b 及算子 T 生成的交换子定义为

$$[b, T]f(x) = b(x)Tf(x) - T(bf)(x).$$

2001年, 刘宗光和刘佳[7]得到了 Calderón-Zygmund 型奇异积分算子与 BMO 函数生成的交换子在 Herz 型 Hardy 空间有界. 2003年, 周伟军[8]证明了奇异积分算子与 BMO 函数生成的多线性交换子在 Herz-Hardy 空间的有界性. 2004年, 张丽琴[9]给出了 Littlewood-Paley 算子与 BMO 函数生成的交换子在 Herz 型 Hardy 空间的有界性.

2012年, 张璞和张代清[10]证明了核函数满足条件 $(K1)-(K4)$ 时, 变 Hörmander 型奇异积分算子 T 与 BMO 函数生成的交换子加权弱型估计. 2013年, 刘岚喆[11]得到了变 Hörmander 型奇异积分算子与 BMO 函数生成的交换子在加权 Lebesgue 空间、加权 Morrey 空间上有界. 2015年, 谢璋琦[12]证明了核函数满足条件 $(K1)-(K4)$ 时, 与 BMO 函数生成的多线性交换子在 Lebesgue 空

间的有界性.

受上述工作的启发, 本文将研究当核函数满足条件 $(K1) - (K4)$ 时, 变 Hörmander 型奇异积分算子 T 与 BMO 函数生成的交换子 $[b, T]$ 在 Herz 型 Hardy 空间的有界性.

2. 介绍

为叙述本文的结果, 首先回忆一些定义及其引理.

定义2.1. [13] BMO空间定义为

$$\mathrm{BMO} = \{f \in L_{loc}(\mathbb{R}^n) : \|f\|_* < \infty\},$$

其中

$$\|f\|_* := \|f\|_{\mathrm{BMO}} := \sup_Q \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x) - f_Q| \mathrm{d}x.$$

定义2.2. [14] 对 $k \in \mathbb{Z}$, 设 $B_k = B(0, 2^k)$, $E_k = B_k \backslash B_{k-1}$, $\chi_k = \chi_{E_k}$ 表示集合 E_k 的特征函数. 设 $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 < p < \infty$ 和$0 < q \le \infty$, 齐次 Herz 空间 $\dot{K}_q^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n)$ 定义为

$$\dot{K}_q^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n) = \{f \in L_{loc}^q(\mathbb{R}^n \backslash \{0\}) : \|f\|_{\dot{K}_q^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n)} < \infty\},$$

其中 $\|f\|_{\dot{K}_q^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n)} = \Big\{ \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} 2^{k\alpha p} \|f\chi_k\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^p \Big\}^{\frac{1}{p}}$.

非齐次 Herz 空间 $K_q^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n)$ 定义为

$$K_q^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n) = \{f \in L_{loc}^q(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{K_q^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n)} < \infty\},$$

其中 $\|f\|_{K_q^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n)} = \Big\{ \|f\chi_{B_0}\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^p + \sum\limits_{k=1}^{\infty} 2^{k\alpha p} \|f\chi_k\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^p \Big\}^{\frac{1}{p}}$.

对 $k \in \mathbb{Z}$, 设 $m_k(\lambda, f) = |\{x \in E_k : |f(x)| > \lambda\}|$, $\widetilde{m}_k(\lambda, f) = m_k(\lambda, f)$, 对于 $k \in \mathbb{N}$ 并且有 $\widetilde{m}_0(\lambda, f) = |\{x \in B_0 : |f(x)| > \lambda\}|$.

定义2.3. [15] 设 $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 < p \le \infty$ 和 $0 < q \le \infty$, 称 $\mathbb{R}^n$ 上的可测函数 $f(x)$ 属于齐次弱 Herz 空间 $W\dot{K}_q^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n)$, 如果

$$\|f\|_{W\dot{K}_q^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{\lambda > 0} \lambda \Bigg\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{k\alpha p} m_k(\lambda, f)^{\frac{p}{q}} \Bigg\}^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

称 $\mathbb{R}^n$ 上的可测函数 $f(x)$ 属于非齐次弱 Herz 空间 $WK_q^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n)$, 如果

$$\|f\|_{WK_q^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{\lambda > 0} \lambda \Bigg\{ \sum_{k=0}^{\infty} 2^{k\alpha p} \widetilde{m}_k(\lambda, f)^{\frac{p}{q}} \Bigg\}^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

定义2.4. [16] 设 $\alpha \in \mathbb{R}$, $s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $1 < q < \infty$ 及 $b \in L_{loc}(\mathbb{R}^n)$. 称一个函数 $a(x)$ 是中心 $(\alpha, q, s; b)$ 原子, 如果

(1) 存在 $r > 0$, 使得 $\mathrm{supp} a \subset B(0, r)$;

(2) $\|a\|_{L^q} \leq |B(0,r)|^{-\frac{\alpha}{n}} = Cr^{-\alpha}$;

(3) $\int_{\mathbb{R}^n} x^\beta a(x) \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} x^\beta a(x) b(x) \mathrm{d}x = 0$, 其中$|\beta| \leq s$.

定义2.5. [16] 称缓增广义函数 f 属于齐次 Herz 型 Hardy 空间 $H\dot{K}_{q,b}^{\alpha,p,s}(\mathbb{R}^n)$(或者$HK_{q,b}^{\alpha,p,s}(\mathbb{R}^n)$), 如果在分布意义下可以写成 $f = \sum\limits_{j=-\infty}^{\infty} \lambda_j a_j$(或者$f = \sum\limits_{j=0}^{\infty} \lambda_j a_j$), 其中 $0 < p < \infty$, a_j 是支集在 B_j 上的中心 $(\alpha, q, s; b)$ 原子, $\lambda_j \in \mathbb{C}$ 且 $\sum\limits_{j=-\infty}^{\infty} |\lambda_j|^p < \infty$(或者$\sum\limits_{j=0}^{\infty} |\lambda_j|^p < \infty$). 我们定义

$$\|f\|_{H\dot{K}_{q,b}^{\alpha,p,s}(\mathbb{R}^n)} = \inf \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} |\lambda_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\|f\|_{HK_{q,b}^{\alpha,p,s}(\mathbb{R}^n)} = \inf \left(\sum_{j=0}^{\infty} |\lambda_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right),$$

其中下确界是对 f 的一切分解所取得的.

类似于文[16]中的 Herz 型 Hardy 空间的定义, 现给出与 Φ 有关的 Herz 型 Hardy 空间的定义.

定义2.6. 设 $\alpha \in \mathbb{R}$, $s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $1 < q < \infty$, $\Phi = \{\phi_1, \cdots, \phi_m\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一族有界函数及 $b \in L_{loc}(\mathbb{R}^n)$. 称一个函数 $a(x)$ 是中心 $(\alpha, q, s, \Phi; b)$ 原子, 如果

(1) 存在 $r > 0$, 使得 $\mathrm{supp} a \subset B(0, r)$;

(2) $\|a\|_{L^q} \leq |B(0,r)|^{-\frac{\alpha}{n}} = Cr^{-\alpha}$;

(3) $\int_{\mathbb{R}^n} x^\beta a(x) \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} x^\beta a(x) b(x) \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} x^\beta a(x) b(x) \phi_j(x) \mathrm{d}x = 0$, 其中$|\beta| \leq s, j = 1, 2 \cdots m$.

定义2.7. 称缓增广义函数 f 属于齐次 Herz 型 Hardy 空间 $H\dot{K}_{q,\Phi,b}^{\alpha,p,s}(\mathbb{R}^n)$(或者$HK_{q,\Phi,b}^{\alpha,p,s}(\mathbb{R}^n)$), 如果在分布意义下可以写成 $f = \sum\limits_{j=-\infty}^{\infty} \lambda_j a_j$(或者$f = \sum\limits_{j=0}^{\infty} \lambda_j a_j$), 其中 $0 < p < \infty$, a_j 是支集在 B_j 上的中心 $(\alpha, q, s, \Phi; b)$ 原子, $\lambda_j \in \mathbb{C}$ 且 $\sum\limits_{j=-\infty}^{\infty} |\lambda_j|^p < \infty$(或者$\sum\limits_{j=0}^{\infty} |\lambda_j|^p < \infty$). 我们定义

$$\|f\|_{H\dot{K}_{q,\Phi,b}^{\alpha,p,s}(\mathbb{R}^n)} = \inf \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} |\lambda_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\|f\|_{HK_{q,\Phi,b}^{\alpha,p,s}(\mathbb{R}^n)} = \inf \left(\sum_{j=0}^{\infty} |\lambda_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right),$$

其中下确界是对 f 的一切分解所取得的.

引理2.1. [17] 设 T 是变 Hörmander 型奇异积分算子, $1 < p < \infty$, 若 $\mu \in A_1$, $b \in \mathrm{BMO}_\mu$, 则交换子 $[b, T]$ 从 $L^p(\mu)$ 到 $L^p(\mu^{1-p})$ 有界的.

当 $\mu \equiv 1$ 时,交换子 $[b, T]$ 从 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 到 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 有界的.

3. 定理及其证明

定理3.1. 设 T 是变 Hörmander 型奇异积分算子, $0 < p \le 1 < q < \infty$, $\alpha = n(1-\frac{1}{q}) + \gamma$ 和 $b \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$, 则对于任意的 $f \in HK_{q,\Phi,b}^{\alpha,p,0}(\mathbb{R}^n)$ 及任意的 $\lambda > 0$, 存在常数 $C > 0$ 使得

$$\left\{\sum_{k=0}^{\infty} 2^{k\alpha p} \widetilde{m}_k\big(\lambda, [b,T]f\big)^{\frac{p}{q}}\right\}^{\frac{1}{p}} \le \frac{C\|f\|_{HK_{q,\Phi,b}^{\alpha,p,0}(\mathbb{R}^n)}}{\lambda}\left(1 + \log^+ \frac{C\|f\|_{HK_{q,\Phi,b}^{\alpha,p,0}(\mathbb{R}^n)}}{\lambda}\right)$$

Proof. 设 $f(x) \in HK_{q,\Phi,b}^{\alpha,p,0}(\mathbb{R}^n)$, 我们记 $f = \sum\limits_{j=0}^{\infty} \lambda_j a_j$, 其中 a_j 是$(\alpha, q, 0, \Phi; b)$ 原子并且 $\mathrm{supp} a_j \subset B_j$. 此外, $\|f\|_{HK_{q,\Phi,b}^{\alpha,p,0}(\mathbb{R}^n)} = \inf\left(\sum\limits_{j=0}^{\infty} |\lambda_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}$. 有

$$\left\{\sum_{k=0}^{\infty} 2^{k\alpha p} \widetilde{m}_k\big(\lambda, [b,T]f\big)^{\frac{p}{q}}\right\}^{\frac{1}{p}} \le C\left\{\sum_{k=0}^{3} 2^{k\alpha p} \widetilde{m}_k\big(\lambda, [b,T]f\big)^{\frac{p}{q}}\right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{\sum_{k=4}^{\infty} 2^{k\alpha p} m_k\big(\lambda, [b,T]f\big)^{\frac{p}{q}}\right\}^{\frac{1}{p}}$$

由于 $[b,T]$ 是 $(L^q(\mathbb{R}^n), L^q(\mathbb{R}^n))$ 有界的, 且 $0 < p \le 1$, 有

$$\begin{aligned}
\left\{\sum_{k=0}^{3} 2^{k\alpha p} \widetilde{m}_k\big(\lambda, [b,T]f\big)^{\frac{p}{q}}\right\}^{\frac{1}{p}} &\le \frac{C}{\lambda}\left\{\sum_{k=0}^{3} 2^{k\alpha p} \|f\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^p\right\}^{\frac{1}{p}} \\
&\le \frac{C}{\lambda}\|f\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \le \frac{C}{\lambda}\sum_{j=0}^{\infty} |\lambda_j| \|a_j\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \\
&\le \frac{C}{\lambda}\sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j\alpha}|\lambda_j| \le \frac{C}{\lambda}\sum_{j=0}^{\infty} |\lambda_j| \\
&\le \frac{C}{\lambda}\left(\sum_{j=0}^{\infty} |\lambda_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

并且

$$\begin{aligned}
&\left\{\sum_{k=4}^{\infty} 2^{k\alpha p} m_k\big(\lambda, [b,T]f\big)^{\frac{p}{q}}\right\}^{\frac{1}{p}} \\
&\le C\left\{\sum_{k=4}^{\infty} 2^{k\alpha p} m_k\Big(\frac{\lambda}{2}, \sum_{j=0}^{k-4} |\lambda_j| \big|[b,T]a_j\big|\Big)^{\frac{p}{q}}\right\}^{\frac{1}{p}} + C\left\{\sum_{k=4}^{\infty} 2^{k\alpha p} m_k\Big(\frac{\lambda}{2}, \sum_{j=k-3}^{\infty} |\lambda_j| \big|[b,T]a_j\big|\Big)^{\frac{p}{q}}\right\}^{\frac{1}{p}} \\
&:= E_1 + E_2.
\end{aligned}$$

利用 $[b,T]$ 的 $(L^q(\mathbb{R}^n), L^q(\mathbb{R}^n))$ 有界性, 得到

$$E_2 \le \frac{C}{\lambda}\left\{\sum_{k=4}^{\infty} 2^{k\alpha p} \Big\|\sum_{j=k-3}^{\infty} \lambda_j a_j\Big\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^p\right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \frac{C}{\lambda}\left\{\sum_{k=4}^{\infty}2^{k\alpha p}\left(\sum_{j=k-3}^{\infty}|\lambda_j|^p 2^{-j\alpha p}\right)\right\}^{\frac{1}{p}}$$
$$\leq \frac{C}{\lambda}\left\{\sum_{j=0}^{\infty}|\lambda_j|^p\left(\sum_{k=0}^{j+3}2^{(k-j)\alpha p}\right)\right\}^{\frac{1}{p}}$$
$$\leq \frac{C}{\lambda}\left(\sum_{j=0}^{\infty}|\lambda_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

对于 E_1, 首先我们先来估计 $[b,T]a_j(x)$, 其中 $x \in C_k, 0 \leq j \leq k-4$ 并且 $y \in B_j$, 我们有 $|x| > 2|y|$. 由 a_j 的消失性及 $\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ 的性质, 即 $|b_k - b_j| \leq (k-j)\|b\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)}$, 对于任意的整数 k, j 并且当 $k \geq j$,$r \geq 1$ 有$\left(\frac{1}{|B_j|}\int_{B_j}|b(y)-b_j|^r \mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{r}} \leq C\|b\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)}$, 从而我们得到

$$\begin{aligned}
\big|[b,T]a_j(x)\big| &= \left|\int_{B_j}(b(x)-b(y))\big(K(x-y)-\sum_{i=1}^{m}\mathcal{B}_i(x)\phi_i(y)\big)a_j(y)\mathrm{d}y\right| \\
&\leq \int_{B_j}\big|b(x)-b_j\big|\left|K(x-y)-\sum_{i=1}^{m}\mathcal{B}_i(x)\phi_i(y)\right||a_j(y)|\mathrm{d}y \\
&\quad + \int_{B_j}\big|b(y)-b_j\big|\left|K(x-y)-\sum_{i=1}^{m}\mathcal{B}_i(x)\phi_i(y)\right||a_j(y)|\mathrm{d}y \\
&\leq C\big|b(x)-b_j\big|\int_{B_j}\frac{|y|^\gamma}{|x-y|^{n+\gamma}}|a_j(y)|\mathrm{d}y + \int_{B_j}\big|b(y)-b_j\big|\frac{|y|^\gamma}{|x-y|^{n+\gamma}}|a_j(y)|\mathrm{d}y \\
&\leq C\big|b(x)-b_j\big|\int_{B_j}\frac{|y|^\gamma}{|x|^{n+\gamma}}|a_j(y)|\mathrm{d}y + \int_{B_j}\big|b(y)-b_j\big|\frac{|y|^\gamma}{|x|^{n+\gamma}}|a_j(y)|\mathrm{d}y \\
&\leq C2^{-k(n+\gamma)}\left\{|b(x)-b_j|2^{j(\gamma+n(1-\frac{1}{q}))} + 2^{j\gamma}\Big(\int_{B_j}|b(y)-b_j|^{q'}\mathrm{d}y\Big)^{\frac{1}{q'}}\right\}\|a_j\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq C2^{-k(n+\gamma)}\big(|b(x)-b_j| + \|b\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)}\big) \\
&\leq C2^{-k(n+\gamma)}\big(|b(x)-b_k| + (k-j)\|b\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)}\big) \\
&\leq C2^{-k(n+\gamma)}\big(|b(x)-b_k| + k\|b\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)}\big).
\end{aligned}$$

因此,我们能得到下面的估计

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{k-4}|\lambda_j|\big|[b,T]a_j(x)\big| &\leq C2^{-k(n+\gamma)}|b(x)-b_k|\sum_{j=0}^{k-4}|\lambda_j| + Ck2^{-k(n+\gamma)}\|b\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)}\sum_{j=0}^{k-4}|\lambda_j| \\
&\leq C2^{-k(n+\gamma)}|b(x)-b_k|\sum_{j=0}^{\infty}|\lambda_j| + Ck2^{-k(n+\gamma)}\|b\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)}\sum_{j=0}^{\infty}|\lambda_j|
\end{aligned}$$

所以我们有

$$E_1 \leq C\left\{\sum_{k=4}^{\infty}2^{k\alpha p}m_k\left(\frac{\lambda}{4}, C2^{-k(n+\gamma)}|b-b_k|\sum_{j=0}^{\infty}|\lambda_j|\right)^{\frac{p}{q}}\right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$+ C\Big\{\sum_{k=4}^{\infty}2^{k\alpha p}m_k\Big(\frac{\lambda}{4}, Ck2^{-k(n+\gamma)}\|b\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)}\sum_{j=0}^{\infty}|\lambda_j|\Big)^{\frac{p}{q}}\Big\}^{\frac{1}{p}}$$

$$:= F_1 + F_2$$

因此, 由 John-Nirenberg's 不等式得到

$$\begin{aligned}
F_1 &\leq C\Big\{\sum_{k=4}^{\infty}2^{k\alpha p}\Big(\exp\Big(-\frac{C\lambda 2^{k(n+\gamma)}}{\|b\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)}\sum\limits_{j=0}^{\infty}|\lambda_j|}\Big)2^{kn}\Big)^{\frac{p}{q}}\Big\}^{\frac{1}{p}}\\
&\leq C\Big\{\sum_{k=-\infty}^{\infty}2^{k(n+\gamma)p}\exp\Big(-\frac{C\lambda 2^{k(n+\gamma)}}{\|b\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)}\sum\limits_{j=0}^{\infty}|\lambda_j|}\Big)\Big\}^{\frac{1}{p}}\\
&\leq C\Big\{\int_0^{\infty}u^{p-1}\exp\Big(-\frac{C\lambda u}{\|b\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)}\sum\limits_{j=0}^{\infty}|\lambda_j|}\Big)\mathrm{d}u\Big\}^{\frac{1}{p}}\\
&= \frac{C}{\lambda}\|b\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)}\sum_{j=0}^{\infty}|\lambda_j|\Big(\int_0^{\infty}v^{p-1}e^{-v}\mathrm{d}v\Big)^{\frac{1}{p}}\\
&\leq \frac{C}{\lambda}\|b\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)}\Big(\sum_{j=0}^{\infty}|\lambda_j|^p\Big)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

对于 F_2 , 我们使用不等式：当 $x \geq 4$ 时, $\log_2 x \leq \frac{x}{2}$. 从而我们能得到下面的不等式：如果有 $u \geq 1$, 并且满足对于某些 $x \geq 4$ 时, $\frac{2^x}{x} \leq u$, 然后我们有 $2^x \leq Cu\log_2 u$. 现在我们应用上述式子来估计 F_2 ,注意到当 $k \geq 4$ 时, $k(n+\gamma) \geq 4$. 如果

$$\Big|\Big\{x \in C_k : Ck2^{-k(n+\gamma)}\|b\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)}\sum_{j=0}^{\infty}|\lambda_j| > \frac{\lambda}{4}\Big\}\Big| \neq 0,$$

我们有

$$1 < \frac{2^{k(n+\gamma)}}{k(n+\gamma)} < \frac{C}{\lambda}\|b\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)}\sum_{j=0}^{\infty}|\lambda_j|.$$

从而我们推断出

$$2^{k(n+\gamma)} \leq \Big(\frac{C}{\lambda}\sum_{j=0}^{\infty}|\lambda_j|\Big)\log^{+}\Big(\frac{C}{\lambda}\sum_{j=0}^{\infty}|\lambda_j|\Big).$$

假设 K_λ 是满足上式的最大整数 k, 我们有

$$\begin{aligned}
F_2 \leq C\Big\{&\sum_{k=4}^{K_\lambda}2^{k\alpha p}m_k\Big(\frac{\lambda}{4}, Ck2^{-k(n+\gamma)}\|b\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)}\sum_{j=0}^{\infty}|\lambda_j|\Big)^{\frac{p}{q}}\\
&+\sum_{K_\lambda}^{\infty}2^{k\alpha p}m_k\Big(\frac{\lambda}{4}, Ck2^{-k(n+\gamma)}\|b\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)}\sum_{j=0}^{\infty}|\lambda_j|\Big)^{\frac{p}{q}}\Big\}^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

DOI: 10.12677/pm.2024.141012

$$
\begin{aligned}
&= C\left\{\sum_{k=4}^{K_\lambda} 2^{k\alpha p} m_k\left(\frac{\lambda}{4}, Ck2^{-k(n+\gamma)}\|b\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)}\sum_{j=0}^{\infty}|\lambda_j|\right)^{\frac{p}{q}}\right\}^{\frac{1}{p}} \\
&\leq C\left\{\sum_{k=4}^{K_\lambda} 2^{k(\alpha+\frac{n}{q})p}\right\}^{\frac{1}{p}} \leq C2^{K_\lambda(n+\gamma)} \\
&\leq \left(\frac{C}{\lambda}\sum_{j=0}^{\infty}|\lambda_j|\right)\log^+\left(\frac{C}{\lambda}\sum_{j=0}^{\infty}|\lambda_j|\right) \\
&\leq \left(\frac{C}{\lambda}\sum_{j=0}^{\infty}|\lambda_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}\log^+\left(\frac{C}{\lambda}\left(\sum_{j=0}^{\infty}|\lambda_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right).
\end{aligned}
$$

因此, 我们得到下面的不等式

$$
\left\{\sum_{k=0}^{\infty} 2^{k\alpha p}\widetilde{m}_k\big(\lambda,[b,T]f\big)^{\frac{p}{q}}\right\}^{\frac{1}{p}} \leq \frac{C}{\lambda}\left(\sum_{j=0}^{\infty}|\lambda_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(1+\log^+\left(\frac{C}{\lambda}\Big(\sum_{j=0}^{\infty}|\lambda_j|^p\Big)^{\frac{1}{p}}\right)\right).
$$

从而得到

$$
\left\{\sum_{k=0}^{\infty} 2^{k\alpha p}\widetilde{m}_k\big(\lambda,[b,T]f\big)^{\frac{p}{q}}\right\}^{\frac{1}{p}} \leq \frac{C\|f\|_{HK^{\alpha,p,0}_{q,\Phi,b}}}{\lambda}\left(1+\log^+\frac{C\|f\|_{HK^{\alpha,p,0}_{q,\Phi,b}}}{\lambda}\right).
$$

于是完成了定理 3.1 的证明.

基金项目

牡丹江师范学院科研项目(编号：GP2019006); 研究生思政项目(编号：KCSZKC-2022026, KCSZAL-2022013); 牡丹江师范学院科研团队建设项目(编号：D211220637).

参考文献

[1] Calderón, A.P. and Zygmund, A. (1952) On the Existence of Certain Singular Integrals. *Acta Mathematica*, **88**, 85-139. https://doi.org/10.1007/BF02392130

[2] Calderón, A.P. and Zygmund, A. (1956) On Singular Integrals. *American Journal of Mathematics*, **78**, 289-309. https://doi.org/10.2307/2372517

[3] Lu, S.Z., Ding, Y. and Yan, D.Y. (2007) Singular Integrals and Related Topics. World Scientific Publishing, Singapore, 40-92.

[4] Grubb, D.J. and Moore, C.N. (1997) A Variant of Hörmander's Condition for Singular Integrals. *Colloquium Mathematicae*, **73**, 165-172. https://doi.org/10.4064/cm-73-2-165-172

[5] Trujillo-González, R. (2003) Weighted Norm Inequalities for Singular Integral Operators Satisfying a Variant of Hörmander's Condition. *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, **44**, 137-152.

[6] Coifman, R.R., Rochberg, R. and Weiss, G. (1976) Factorization Theorems for Hardy Spaces in Several Variables. *Annals of Mathematics*, **103**, 611-635. https://doi.org/10.2307/1970954

[7] 刘宗光, 刘佳. Calderón-Zygmund型算子及其交换子的有界性[J]. 数学学报, 2010, 53(3): 541-550.

[8] 周伟军. 奇异积分和分数次积分与光滑函数生成的多线性交换子[D]: [硕士学位论文]. 长沙: 湖南大学, 2004.

[9] 张丽琴. Littlewood-Paley算子交换子在Herz-Hardy空间上的有界性[J]. 淮北煤炭师范学院学报(自然科学版), 2004, 25(2): 10-14.

[10] Zhang, P. and Zhang, D.Q. (2014) Commutators of Singular Integral Operators Satisfying a Variant of a Lipschitz Condition. *The Scientific World Journal*, **2014**, Article ID: 641705. https://doi.org/10.1155/2014/641705

[11] Liu, L.Z. (2013) M^2-Type Sharp Estimates and Weighted Boundedness for Commutators Related to Singular Integral Operators Satisfying a Variant of Hörmander's Condition. *Boletim da Sociedade Paranaense de Matematica*, **31**, 129-137. https://doi.org/10.5269/bspm.v31i2.16612

[12] 谢璋琦. 具有变Hörmander核的奇异积分算子的多线性交换子的研究[D]: [硕士学位论文]. 长沙: 湖南大学, 2017.

[13] Grafakos, L. (2009) Modern Fourier Analysis. Springer, New York, 153-165. https://doi.org/10.1007/978-0-387-09434-2

[14] Baernstein II, A. and Sawyer, E.T. (1985) Embedding and Multiplier Theorems for $H^p(\mathbb{R}^n)$. *Memoirs of the American Mathematical Society*, **53**, 1-82. https://doi.org/10.1090/memo/0318

[15] Hu, G.E., Lu, S.Z. and Yang, D.C. (1997) The Weak Herz Spaces. Journal of Beijing Normal University (Natural Science), **33**, 17-34.

[16] Lu, S.Z. and Yang, D.C. (1997) The Continuity of Commutators on Herz-Type Spaces. *Michigan Mathematical Journal*, **44**, 255-281. https://doi.org/10.1307/mmj/1029005703

[17] Wu, C.H. and Zhang, M. (2014) Weighted Sharp Maximal Function Inequalities and Boundedness of Multilinear Singular Integral Operator Satisfying a Variant of Hörmander's Condition. *Journal of Inequalities and Applications*, **2014**, Article No. 57. https://doi.org/10.1186/1029-242X-2014-57