

多重加速寿命试验下多部件系统的参数估计

拉目东主

西北师范大学数学与统计学院, 甘肃 兰州

收稿日期: 2023 年 12 月 15 日; 录用日期: 2023 年 12 月 26 日; 发布日期: 2024 年 1 月 29 日

摘要

多部件系统的可靠性推断是可靠性理论研究中的重要问题。本文首先基于多重恒应力加速寿命试验研究了部件具有 kumaraswamy 寿命分布的 s -out-of- k 系统, 建立了系统可靠性的似然函数, 还给出了模型参数极大似然估计的存在性和唯一性。基于极大似然估计的渐进正态性得到了模型参数的渐进置信区间。同时, 在给定参数共轭伽马先验的假设下, 基于不同的损失函数, 得到了参数和系统可靠性的不同贝叶斯估计。其次, 构造了参数的 Bootstrap 区间作为渐进置信区间和贝叶斯区间的对比。最后, 分析了一组真实数据来说明本文方法的可行性。

关键词

加速寿命试验, s -Out-of- k 系统, 贝叶斯估计, 极大似然估计, Bootstrap 估计

Parameter Estimation of a Multicomponent System under Multiple Accelerated Life Tests

Dongzhu Lamu

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu

Received: Dec. 15th, 2023; accepted: Dec. 26th, 2023; published: Jan. 29th, 2024

Abstract

Reliability inference for multicomponent systems is an important issue in reliability theory research. In this paper, the reliability of s -out-of- k systems with kumaraswamy life distributions of components is firstly investigated based on multiple constant stress accelerated life tests, the likelihood function of system reliability is established, and the existence and uniqueness of the maximum likelihood estimation for model parameters are also given. Asymptotic confidence intervals for the model parameters are obtained based on the asymptotic normality of the maximum likelihood estimates. Meanwhile, different Bayesian estimates of the parameters and system reliability are obtained based on different loss functions under the assumption of a conjugate gamma prior for the given parameters. Next, Bootstrap intervals for the parameters are constructed as a comparison between asymptotic confidence intervals and Bayesian intervals. Finally, a set of real data is analysed to illustrate the feasibility of the methodology of this paper.

Keywords

Accelerated Life Tests, s -out-of- k System, Bayesian Estimation, MLE, Bootstrap Estimation

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

随着科学技术的发展,现代产品的可靠性越来越高,导致寿命试验中失效数据的获取也越来越困难。为了克服这一困难,加速寿命试验 (ALT) 被研究者提出。该试验中,被测试产品放置在高应力水平下,以便能在合理的时间内收集到失效数据,而后再用合适的物理模型或统计模型对加速失效数据进行分析,以估计产品在正常应力下的可靠性指标等。ALT 有两个先决条件,一是元件寿命分布族在试验中保持不变。二是改变试验应力水平并不会改变元件失效机制。关于 ALT 的详细内容可参考著作 [1]。

常见的 ALT 有：恒应力加速寿命试验 (CSALT)；步进应力加速寿命试验 (SSALT)；渐进应力加速寿命试验 (PSALT) 等。其中 CSALT 因其操作简单、用途广泛等特点而广受研究者的青睐。近年来，[2] 基于 CSALT，考虑了二元 Birnbaum-Saunders 分布的相依竞争风险模型，在自适应渐进混合删失方案下得到了未知参数的极大似然估计、近似置信区间和 Bootstrap 置信区间。[3] 研究了潜在失效时间遵循威布尔竞争风险模型时，当尺度和形状参数均受应力影响时，在广义渐进混合删失下构造了模型的唯一极大似然估计，并基于渐近理论给出了未知参数的近似置信区间。

[4] 开发了一种著名的单位有界分布，即 Kumaraswamy 分布，它更适合于大气温度、试验分数、日降雨量和日流量等有界数据，被认为是比 Beta 分布更好的选择。Kumaraswamy 分布是一种非常灵活的分布模型，其密度函数可以是单峰的、单反峰的、随参数的取值递增、递减或恒定。若随机变量 X 服从 Kumaraswamy 分布，则 X 的累计分布函数、密度函数分别为

$$F(x; \alpha, \lambda) = 1 - (1 - x^\lambda)^\alpha, 0 < x < 1$$

和

$$f(x; \alpha, \lambda) = \alpha\lambda(1 - x^\lambda)^{\alpha-1}x^{\lambda-1},$$

其中， α 和 λ 均为形状参数，将分布记为 $ku(\alpha, \lambda)$ 。近期关于对其分布的研究文献参考 [5; 6] 等。

过往 ALT 文献大多数都聚焦于单部件产品。但实际上产品开发商为实现产品的多功能性，提高产品可靠度，产品的设计往往是复杂的且由多个部件组成。在文献中，通常此类产品被定义为多部件系统。最经典的多部件系统是 [7] 介绍的 s -out-of- k : G 系统，此系统由 k 个 *i.i.d.* 的部件组成，系统工作当且仅当有超过 s 的部件在工作。这种系统结构在实际生活中很常见。例如，若五个支撑柱组成的建筑结构是一个 3-out-of-5 : G 系统，当且仅当其建筑重量可以被三个支撑柱支撑。近年来，[8] 对 X 公司 CQ^2 系列气缸以及 Y 系列电磁换向阀实施加速寿命试验并收集数据，通过对具体试验数据的分析以及对模型参数的估计，总结出复杂系统加速寿命试验研究的一般方法。[9] 等分析重型燃料电池系统时，采用逆幂律和指数混合的一般对数线性关系构建了一个电池膜寿命模型。[10] 提出了 I 型删失方案下独立部件服从威布尔分布时，串联系统的最优贝叶斯加速寿命试验方案。[11] 讨论了在 CSALT 中当部件寿命是威布尔随机变量时， s -out-of- k : G 系统可靠性的极大似然估计问题。进一步，[12] 将 [11] 的结果推广到了广义指数分布情形下。

综上所述，以 s -out-of- k : G 系统为代表的多部件系统，因其高度的复杂性和应用性，使得系统可靠性理论研究是非常具有价值的。因此，本文重点关注构造 s -out-of- k 系统的 CSALT 模型与系统可靠性以及模型参数的统计推断方法，同时，又作为对过往文献的补充，还将讨论贝叶斯可靠性估计方法。

2. 模型描述与基本假设

2.1. 模型描述

考虑 N 个独立的 s -out-of- k : G 系统分配至有 m 重应力的加速寿命试验，应力水平分别为 $s_0 < s_1 < s_2 < \dots < s_m$ ，其中 s_0 称之为额定应力水平或者正常应力水平。在应力水平 s_i 下，

有 n_i 个系统参与试验, 满足 $\sum_{i=1}^m n_i = N$. 当系统的所有部件都失效时停止试验.

基于上述试验过程, 则系统的隐失效时间可以表示为:

应力水平	样本大小	多部件系统的失效时间
s_1	n_1	$\begin{pmatrix} X_{1:1:1} & X_{1:1:2} & \cdots & X_{1:1:k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{1:n_0:1} & X_{1:n_1:2} & \cdots & X_{1:n_1:k} \end{pmatrix}$
\vdots	\vdots	\vdots
s_m	n_m	$\begin{pmatrix} X_{m:1:1} & X_{m:1:2} & \cdots & X_{m:1:k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{m:n_m:1} & X_{m:n_m:2} & \cdots & X_{m:n_m:k} \end{pmatrix}$

为方便表示, 令 $\{X_{i:j:1}, X_{i:j:2}, \dots, X_{i:j:k}\}, i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n_i$ 表示应力 s_i 下第 j 个系统的所有部件的有序失效样本, 显然给定 i 和 j , 有 $X_{i:j:1} < X_{i:j:2} < \dots < X_{i:j:k}$.

2.2. 基本假设

在 ALT 过程中考虑以下的假设

1. 在应力水平 s_i 下, 系统部件服从分布 $ku(\alpha_i, \lambda_i)$.
2. 假设参数 α_i 和 λ_i 都受应力影响, 且寿命-应力关系都为对数线性, 具体表示为

$$\log(\alpha_i) = a_1 + a_2\varphi_1(s_i), i = 0, 1, 2, \dots, m, \quad (1)$$

和

$$\log(\lambda_i) = b_1 + b_2\varphi_2(s_i), i = 0, 1, 2, \dots, m. \quad (2)$$

其中 $a_i, b_i, i = 1, 2$ 是未知的系数参数, $\varphi_j(s_i), j = 1, 2$ 是与应力相关的函数。

值得注意的是若导致部件失效的机制不同, $\varphi_j(s_i)$ 通常也不同。一般来说, 当温度作为应力时, $\varphi_j(s_i) = 1/s_i$, 此模型也称之为 Arrhenius 模型; 逆幂律模型 $\varphi_j(s_i) = \log(s_i)$ 反映电压对部件寿命的影响; 指数模型 $\varphi_j(s_i) = s_i$ 通常用来处理金属疲劳数据。

另外, 为计算方便, 本文还将应力水平标准化为

$$h_j(s_i) = \frac{\varphi_j(s_i) - \varphi_j(s_0)}{\varphi_j(s_m) - \varphi_j(s_0)}, i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2.$$

回到 s -out-of- k : G 系统的寿命。正如在前文讨论的, s -out-of- k : G 系统失效当且仅当系统的第 $(k - s + 1)$ 个部件失效。因此在正常应力水平下 s -out-of- k 系统的可靠性函数可以写成

$$R_{s,k}(x) = \sum_{d=0}^{k-s} \frac{(-1)^d k!}{d!(s-1)!(k-s-d)!} \frac{(1-x^{\lambda_0})^{(d+s)\alpha_0}}{d+s}. \quad (3)$$

3. 极大似然估计与可靠性估计

3.1. 极大似然估计

基于上述假设与失效数据 \underline{x} , 记模型的参数向量为 $\Theta = (\alpha_1, \lambda_1, \alpha_2, \lambda_2, \dots, \alpha_m, \lambda_m)$, 于是就可以给出参数似然函数为

$$\begin{aligned} L(\Theta|\underline{x}) &\propto \prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^{n_i} \prod_{u=1}^k f_i(x_{i:j:u}; \alpha_i, \lambda_i) \\ &= \prod_{i=1}^m \alpha_i^{kn_i} \cdot \lambda_i^{kn_i} \cdot \prod_{j=1}^{n_i} \prod_{u=1}^k x_{i:j:u}^{\lambda_i-1} \cdot (1-x_{i:j:u}^{\lambda_i})^{\alpha_i-1}. \end{aligned} \quad (4)$$

相应的对数似然函数为

$$\begin{aligned} l(\Theta|\underline{x}) &\propto \sum_{i=1}^m kn_i \log \alpha_i + \sum_{i=1}^m kn_i \log \lambda_i + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{u=1}^k (\lambda_i - 1) \log(x_{i:j:u}) \\ &\quad + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{u=1}^k (\alpha_i - 1) \log(1 - x_{i:j:u}^{\lambda_i}). \end{aligned} \quad (5)$$

容易看出

$$l(\Theta|\underline{x}) \propto \sum_{i=1}^m l(\Theta_i|\underline{x}),$$

其中 $\Theta_i = (\alpha_i, \lambda_i)$, 并且

$$\begin{aligned} l(\Theta_i|\underline{x}) &= kn_i \log \alpha_i + kn_i \log \lambda_i + \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{u=1}^k (\lambda_i - 1) \log(x_{i:j:u}) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{u=1}^k (\alpha_i - 1) \log(1 - x_{i:j:u}^{\lambda_i}). \end{aligned} \quad (6)$$

定理 3.1. 设 $n_i \geq 1$, 给定 λ_i 的值, α_i 的极大似然估计可以唯一地表示为

$$\hat{\alpha}_i = -\frac{kn_i}{\sum_{j=1}^{n_i} \sum_{u=1}^k \log(1 - x_{i:j:u}^{\lambda_i})}. \quad (7)$$

证明 记 $H(\alpha_i) \sim$ 是关于 (6) 对 α_i 的一阶偏导函数, 则

$$H(\alpha_i) = \frac{kn_i}{\alpha_i} + \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{u=1}^k \log(1 - x_{i:j:u}^{\lambda_i}),$$

注意到 $x_{i:j:u} \in (0, 1)$, 由 $\log(1 - x_{i:j:u}^{\lambda_i}) \leq -x_{i:j:u}^{\lambda_i}$, 容易得到

$$\lim_{\alpha_i \rightarrow +\infty} H(\alpha_i) < 0, \quad \lim_{\alpha_i \rightarrow 0^+} H(\alpha_i) > 0.$$

进而考虑到

$$\frac{\partial H(\alpha_i)}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial^2 l(\alpha_i, \lambda_i | \underline{x})}{\partial \alpha_i^2} = \frac{-kn_i}{\alpha_i^2} < 0,$$

这样就证明了给定 λ_i 的值时, $l(\alpha_i, \lambda_i | \underline{x})$ 只会在 $\hat{\alpha}_i$ 处达到最大值。□

将 (7) 代替 (6) 中 α_i , 并对 (6) 关于 λ_i 求导, 就有

$$\frac{\partial l(\lambda_i | \underline{x})}{\partial \lambda_i} = \frac{kn_i}{\lambda_i} + kn_i \frac{\sum_{j=1}^{n_i} \sum_{u=1}^k \frac{x_{i:j:u}^{\lambda_i} \log x_{i:j:u}}{1 - x_{i:j:u}^{\lambda_i}}}{\sum_{j=1}^{n_i} \sum_{u=1}^k \log(1 - x_{i:j:u}^{\lambda_i})} + \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{u=1}^k \frac{\log x_{i:j:u}}{1 - x_{i:j:u}^{\lambda_i}}. \quad (8)$$

由 (8) 很难得到显示解。一个自然的想法是用迭代方法渐进得到方程根。根据巴拿赫不动点定理, 不动点迭代法对所有的迭代初值都收敛。因此本文建议使用不动点迭代法得到 (8) 的迭代解, 设计迭代方案为 $\lambda_i^{(d+1)} = H(\lambda_i^{(d)})$, 其中 $\lambda_i^{(d)}$ 是 $\hat{\lambda}_i$ 的第 d 次迭代值,

$$H(\lambda_i) = - \left[\frac{\sum_{j=1}^{n_i} \sum_{u=1}^k \frac{x_{i:j:u}^{\lambda_i} \log x_{i:j:u}}{1 - x_{i:j:u}^{\lambda_i}}}{\sum_{j=1}^{n_i} \sum_{u=1}^k \log(1 - x_{i:j:u}^{\lambda_i})} + \frac{1}{kn_i} \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{u=1}^k \frac{\log x_{i:j:u}}{1 - x_{i:j:u}^{\lambda_i}} \right]^{-1},$$

当 $|\lambda_i^{(d)} - \lambda_i^{(d+1)}|$ 足够小时, 停止迭代并得到迭代解。将迭代解代入 (7) 就可以获得 MLE $\hat{\alpha}_i$.

3.2. 可靠性估计

由高斯马尔可夫定理, 系数参数的最小二乘估计可表示为

$$\hat{\alpha}_1 = \frac{1}{m} \left[\sum_{i=1}^m \log \hat{\alpha}_i - \hat{\alpha}_2 \sum_{i=1}^m h_1(s_i) \right], \quad (9)$$

$$\hat{\alpha}_2 = \frac{m [\sum_{i=1}^m h_1(s_i) \log(\hat{\alpha}_i)] - [\sum_{i=1}^m h_1(s_i)] [\sum_{i=1}^m \log(\hat{\alpha}_i)]}{m [\sum_{i=1}^m h_1^2(s_i)] - [\sum_{i=1}^m h_1(s_i)]^2}, \quad (10)$$

和

$$\hat{b}_1 = \frac{1}{m} \left[\sum_{i=1}^m \log \hat{\lambda}_i - \hat{b}_2 \sum_{i=1}^m h_2(s_i) \right], \quad (11)$$

$$\hat{b}_2 = \frac{m [\sum_{i=1}^m h_2(s_i) \log(\hat{\lambda}_i)] - [\sum_{i=1}^m h_2(s_i)] [\sum_{i=1}^m \log(\hat{\lambda}_i)]}{m [\sum_{i=1}^m h_2^2(s_i)] - [\sum_{i=1}^m h_2(s_i)]^2}, \quad (12)$$

因此, 在正常应力水平 s_0 下, 模型参数 α_0 和 λ_0 的 MLE 可以分别通过 $\log \hat{\alpha}_0 = \hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2 h_1(s_0)$ 和 $\log \hat{\lambda}_0 = \hat{b}_1 + \hat{b}_2 h_2(s_0)$ 求得。进一步, s -out-of- k 系统在 t_0 时刻的可靠性估计 $\hat{R}_{s,k}(t_0)$ 表示为

$$\hat{R}_{s,k}(t_0) = \sum_{d=0}^{k-s} \frac{(-1)^d k!}{d!(s-1)!(k-s-d)!} \frac{(1-t_0^{\hat{\lambda}_0})^{(d+s)\hat{\alpha}_0}}{d+s}.$$

4. 渐进置信区间

参数的区间估计比点估计更具备价值。令 $F(\Theta) = -\partial^2 l / \partial \Theta \partial \Theta'$ 表示观测信息矩阵, 则其元素为 (5) 对参数 $\alpha_i, \lambda_i, i = 1, 2, \dots, m$ 的负二阶偏导, 这里 $\alpha_i, \lambda_i, i = 1, 2, \dots, m$ 均被其相对应的 MLE $\hat{\alpha}_i, \hat{\lambda}_i$ 代替。

但我们观察 (6), 可知 $F(\Theta)$ 是一个块对角矩阵, 则观测信息矩阵可以写成

$$F(\Theta) = \text{diag}(F(\Theta_1), F(\Theta_2), \dots, F(\Theta_m)), \quad (13)$$

其中

$$F(\Theta_i) = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 l(\Theta_i)}{\partial \alpha_i^2} & -\frac{\partial^2 l(\Theta_i)}{\partial \alpha_i \partial \lambda_i} \\ -\frac{\partial^2 l(\Theta_i)}{\partial \lambda_i \partial \alpha_i} & -\frac{\partial^2 l(\Theta_i)}{\partial \lambda_i^2} \end{bmatrix},$$

容易得到

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2 l(\Theta_i)}{\partial \alpha_i^2} &= \frac{kn_i}{\alpha_i^2}, \\ -\frac{\partial^2 l(\Theta_i)}{\partial \alpha_i \partial \lambda_i} &= -\frac{\partial^2 l(\Theta_i)}{\partial \lambda_i \partial \alpha_i} = \sum_{i=1}^{n_i} \sum_{j=1}^k \frac{x_{i:j:u}^{\lambda_i} \log x_{i:j:u}}{1 - x_{i:j:u}^{\lambda_i}}, \\ -\frac{\partial^2 l(\Theta_i)}{\partial \lambda_i^2} &= \frac{kn_i}{\lambda_i} + (\alpha_i - 1) \sum_{i=1}^{n_i} \sum_{j=1}^k \frac{x_{i:j:u}^{\lambda_i} (\log x_{i:j:u})^2}{(1 - x_{i:j:u}^{\lambda_i})^2}. \end{aligned}$$

现在, 我们来构造模型参数的置信区间。令 $V(\hat{\Theta})$ 为参数 Θ 的 MLE 的渐进协方差矩

阵, 则 $V(\hat{\Theta}) = F^{-1}(\hat{\Theta}) = \text{diag}(F^{-1}(\hat{\Theta}_1), F^{-1}(\hat{\Theta}_2), \dots, F^{-1}(\hat{\Theta}_m))$. 由 MLE 的渐进正态性质: $\hat{\Theta} \sim N(\Theta, V(\hat{\Theta}))$, 因此给定置信水平 $\gamma \in (0, 1)$, 模型参数们的 $100(1 - \gamma)\%$ 双侧置信区间 (ACI) 是

$$\left(\hat{\alpha}_i - N_{\frac{\gamma}{2}}\sqrt{V_{ii}}, \hat{\alpha}_i + N_{\frac{\gamma}{2}}\sqrt{V_{ii}}\right), i = 1, 3, \dots, 2m - 1$$

$$\left(\hat{\lambda}_i - N_{\frac{\gamma}{2}}\sqrt{V_{ii}}, \hat{\lambda}_i + N_{\frac{\gamma}{2}}\sqrt{V_{ii}}\right), i = 2, 4, \dots, 2m$$

这里 $N_{\frac{\gamma}{2}}$ 是 $N(0, 1)$ 的上 $\frac{\gamma}{2}$ 分位数, V_{ii} 表示 $V(\hat{\Theta})$ 中第 i 个对角线元素。

5. Bootstrap 估计

Bootstrap 方法是一种重采样方法, 当样本少量的时候可以构造有效的区间估计。本文由接下来的算法构造了模型参数的百分位 Bootstrap 区间 (PBCI)。

1. 对于 $i = 1, 2, \dots, m$, 收集失效数据 \underline{x} , 计算 MLE $\hat{\alpha}_i$ 和 $\hat{\lambda}_i$.
2. 用 $\hat{\alpha}_i$ 和 $\hat{\lambda}_i$, 生成 Bootstrap 样本, 记为 \underline{x}^* .
3. 用极大似然估计法构建 Bootstrap 估计 α_i^* 和 λ_i^* .
4. 重复步骤 2-3 B 次, 得到 $\{\alpha_i^{*(j)}, \lambda_i^{*(j)}, i = 1, 2, \dots, m\}, j = 1, 2, \dots, N$.
5. 将 $\{\alpha_i^{*(j)}, \lambda_i^{*(j)}, j = 1, 2, \dots, N$ 按升序排列, 得到

$$\{\alpha_i^{*[1]}, \alpha_i^{*[2]}, \dots, \alpha_i^{*[B]}\}, \{\lambda_i^{*[1]}, \lambda_i^{*[2]}, \dots, \lambda_i^{*[B]}\}.$$

6. 模型参数的双侧 $100(1 - \gamma)\%$ PBCI 分别为

$$\left(\alpha_i^{*[\frac{B\gamma}{2}]}, \alpha_i^{*[\frac{B(1-\gamma)}{2}]}\right),$$

和

$$\left(\lambda_i^{*[\frac{B\gamma}{2}]}, \lambda_i^{*[\frac{B(1-\gamma)}{2}]}\right).$$

6. 贝叶斯估计

贝叶斯估计因整合了参数先验信息与样本信息, 故其在统计推断领域受到许多学者的关注。考虑给模型参数独立的伽马共轭先验, 即 $\pi(\alpha_i | c_{i1}, d_{i1})$ 和 $\pi(\lambda_i | c_{i2}, d_{i2})$, 其中 $c_{ij}, d_{ij}, i =$

$1, 2, \dots, m, j = 1, 2$ 为超参数。不难写出 $\pi(\alpha_i | c_{i1}, d_{i1})$ 和 $\pi(\alpha_i | c_{i2}, d_{i2})$ 的密度函数为

$$\pi(\alpha_i | c_{i1}, d_{i1}) = \frac{d_{i1}^{c_{i1}}}{\Gamma(c_{i1})} \alpha_i^{c_{i1}-1} e^{-d_{i1}\alpha_i}, \alpha_i > 0,$$

和

$$\pi(\lambda_i | c_{i2}, d_{i2}) = \frac{d_{i2}^{c_{i2}}}{\Gamma(c_{i2})} \lambda_i^{c_{i2}-1} e^{-d_{i2}\lambda_i}, \lambda_i > 0.$$

合并 (4) 和先验分布，从而有参数的后验密度函数

$$\begin{aligned} \pi(\alpha_i, \lambda_i) &\propto \alpha_i^{kn_i+c_{i1}-1} \cdot \lambda_i^{kn_i+c_{i2}-1} \cdot e^{-d_{i1}\alpha_i} e^{-d_{i2}\lambda_i} \prod_{j=1}^{n_i} \prod_{u=1}^k x_{i:j;u}^{\lambda_i-1} \cdot (1-x_{i:j;u}^{\lambda_i})^{\alpha_i-1} \\ &= \alpha_i^{kn_i+c_{i1}-1} \cdot \lambda_i^{kn_i+c_{i2}-1} \cdot \exp\{\alpha_i A(\lambda_i)\} \cdot \exp\{\lambda_i B(\alpha_i, \lambda_i)\}, \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} A(\lambda_i) &= \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{u=1}^k \log(1-x_{i:j;u}^{\lambda_i}) - d_{i1} \\ B(\alpha_i, \lambda_i) &= \lambda_i \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{u=1}^k \log(x_{i:j;u}) + \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{u=1}^k \log(1-x_{i:j;u}^{\lambda_i}) - d_{i2}\lambda_i, \end{aligned}$$

忽略常数后模型参数 α_i 和 λ_i 的条件后验密度函数分别可以化成形如

$$\pi(\alpha_i | \lambda_i, \underline{x}) \propto \alpha_i^{kn_i+c_{i1}-1} \cdot \exp\{\alpha_i A(\lambda_i)\}, \quad (14)$$

和

$$\pi(\lambda_i | \alpha_i, \underline{x}) \propto \lambda_i^{kn_i+c_{i2}-1} \cdot \exp\{\lambda_i B(\alpha_i, \lambda_i)\}. \quad (15)$$

损失函数是贝叶斯框架中重要的元素。这里我们考虑两种不同类型的损失函数：对称的均方误差损失函数 (SEL)，非对称的 LINEX 损失函数 (LL)。假定 $\psi(\alpha_i, \lambda_i)$ 表示参数 α_i 和 λ_i 的任意函数，则在两种损失函数下函数 $\psi(\alpha_i, \lambda_i)$ 的贝叶斯估计可以表示为

$$\tilde{\psi}_{SEL}(\alpha_i, \lambda_i) = E[\psi(\alpha_i, \lambda_i)] = \frac{\int_0^\infty \int_0^\infty \psi(\alpha_i, \lambda_i) \pi(\alpha_i, \lambda_i) d\alpha_i d\lambda_i}{\int_0^\infty \int_0^\infty \pi(\alpha_i, \lambda_i) d\alpha_i d\lambda_i}, \quad (16)$$

和

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_{LL}(\alpha_i, \lambda_i) &= -\frac{1}{g} \log \{E[\exp(-g\psi(\alpha_i, \lambda_i))]\} \\ &= -\frac{1}{g} \log \left\{ \frac{\int_0^\infty \int_0^\infty \exp[-g\psi(\alpha_i, \lambda_i)] \pi(\alpha_i, \lambda_i) d\alpha_i d\lambda_i}{\int_0^\infty \int_0^\infty \pi(\alpha_i, \lambda_i) d\alpha_i d\lambda_i} \right\} \cdot g \neq 0 \end{aligned} \quad (17)$$

显然直接计算 (16) 和 (17) 中的双重积分困难，所以本文采用蒙特卡洛方法构造模型参数的贝叶斯估计。观察 (14) 和 (15)，发现前者是伽马分布，但后者不是一个熟知的分布。对此情形，采

用 Gibbs 采样混合 M-H 算法近似求解 (16) 和 (17) 是一个非常好的选择, 具体算法如下:

1. 对于 $i = 1, 2, \dots, m$, 令 MLE 为迭代初始值, 即 $\alpha_i^{(0)} = \hat{\alpha}_i, \lambda_i^{(0)} = \hat{\lambda}_i$.
2. 在第 j 次迭代, 从 $\text{Gamma}(kn_i + c_{i1}, -A(\lambda_i^{(j-1)}))$ 生成 $\alpha_i^{(j)}$.
3. 从提议分布 $N(\hat{\lambda}_i, \text{Var}(\hat{\lambda}_i))$ 生成 λ_i^* .
4. 从 $U(0, 1)$ 生成一个随机的数字 ξ .
5. 令 $\lambda_i^{(j)} = \begin{cases} \lambda_i^*, & \xi \leq \omega \\ \lambda_i^{(j-1)}, & \xi > \omega \end{cases}$, 这里 $\omega = \min\left(1, \frac{\pi(\lambda_i^* | \alpha_i^{(j)}, \underline{x})}{\pi(\lambda_i^{(j-1)} | \alpha_i^{(j)}, \underline{x})}\right)$.
6. 将迭代值代入 (9)-(12) 获取 $a_u^{(j)}, b_u^{(j)}, u = 1, 2$.
7. 从 (1) 和 (2) 获得 $\alpha_0^{(j)}$ 和 $\lambda_0^{(j)}$, 因此可靠性函数迭代值 $R_{s,k}^{(j)}(t_0)$ 为

$$R_{s,k}^{(j)}(t_0) = \sum_{d=0}^{k-s} \frac{(-1)^d k!}{d!(s-1)!(k-s-d)!} \frac{(1-t_0^{\lambda_0^{(j)}})^{(d+s)\alpha_0^{(j)}}}{d+s}$$

8. 重复步骤 2-7 B 次, 收集到 $\{\alpha_i^{(j)}, \lambda_i^{(j)}, R_{s,k}^{(j)}(t_0)\}, j = 1, 2, \dots, B$.
9. 去除掉前 M 个不稳定的迭代点后, 模型参数以及系统可靠性在两种损失函数下的贝叶斯估计分别为

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_{i(SEL)} &= \frac{1}{B-M} \sum_{j=M+1}^B \alpha_i^{(j)}, & \tilde{\alpha}_{i(LL)} &= -\frac{1}{g} \log \left[\frac{1}{B-M} \sum_{j=M+1}^B \exp(-g\alpha_i^{(j)}) \right], \\ \tilde{\lambda}_{i(SEL)} &= \frac{1}{B-M} \sum_{j=M+1}^B \lambda_i^{(j)}, & \tilde{\lambda}_{i(LL)} &= -\frac{1}{g} \log \left[\frac{1}{B-M} \sum_{j=M+1}^B \exp(-g\lambda_i^{(j)}) \right], \\ \tilde{R}_{s,k(SEL)}(t_0) &= \frac{1}{B-M} \sum_{j=M+1}^B R_{s,k}^{(j)}(t_0). \\ \tilde{R}_{s,k(LL)}(t_0) &= -\frac{1}{g} \log \left[\frac{1}{B-M} \sum_{j=M+1}^B \exp(-gR_{s,k}^{(j)}(t_0)) \right]. \end{aligned}$$

10. 按升序排列 $\{\alpha_i^{(j)}, \lambda_i^{(j)}\}, j = 1, 2, \dots, B$, 有

$$\begin{aligned} (\alpha_i^{[M+1]} &< \alpha_i^{[M+2]} < \dots < \alpha_i^{[B]}), \\ (\lambda_i^{[M+1]} &< \lambda_i^{[M+2]} < \dots < \lambda_i^{[B]}), \end{aligned}$$

则模型参数的双侧 $100(1-\gamma)\%$ 贝叶斯区间 (BCI) 为

$$\begin{aligned} &\left(\alpha_i^{([\frac{(B-M)\gamma}{2}])}, \alpha_i^{([\frac{(B-M)(1-\gamma)}{2}])} \right), \\ &\left(\lambda_i^{([\frac{(B-M)\gamma}{2}])}, \lambda_i^{([\frac{(B-M)(1-\gamma)}{2}])} \right). \end{aligned}$$

7. 数据分析

本节用 [13] 年提供的 ALT 真实数据来说明本文中提到的统计模型和估算方法。对于此数据集，加速应力是电压，且试验有两个不同的应力水平 $s_1 = 10$ 和 $s_2 = 20$ ，在每一层水平下都放置了 15 个串联系统，即 2-out-of-2:G 系统。另外系统的正常工作电压水平是 $s_0 = 5$ 。为拟合 $ku(\alpha, \lambda)$ 有界寿命模型特性，不妨对所有的数据值都除以 10。数据详情见表 1。进一步，使用 KS 检验法来验证数据是否与模型相匹配。在应力水平 s_1 和 s_2 下相对应 p 值分别是 0.7752 和 0.8037，这表明模型与数据拟合优异。根据 [1] 的建议，对电压应力 ALT 数据采用逆幂律模型建模，即 ALT 模型

Table 1. Failure data for series system under CSALT

表 1. 恒应力 ALT 下串联系统的失效数据

应力水平 $s_1 = 10$		应力水平 $s_2 = 15$	
部件寿命	系统寿命	部件寿命	系统寿命
(0.610, 0.940)	0.610	(0.036, 0.038)	0.036
(0.602, 0.017)	0.017	(0.130, 0.006)	0.006
(0.105, 0.570)	0.105	(0.190, 0.070)	0.070
(0.223, 0.347)	0.223	(0.093, 0.030)	0.030
(0.397, 0.397)	0.397	(0.002, 0.172)	0.002
(0.047, 0.104)	0.047	(0.170, 0.170)	0.170
(0.004, 0.004)	0.004	(0.034, 0.370)	0.034
(0.016, 0.016)	0.016	(0.060, 0.030)	0.030
(0.046, 0.046)	0.046	(0.130, 0.130)	0.130
(0.047, 0.065)	0.047	(0.180, 0.080)	0.080
(0.509, 0.150)	0.150	(0.080, 0.080)	0.080
(0.180, 0.180)	0.180	(0.278, 0.250)	0.250
(0.400, 0.042)	0.042	(0.218, 0.092)	0.092
(0.983, 0.250)	0.250	(0.027, 0.027)	0.027
(0.010, 0.210)	0.010	(0.296, 0.106)	0.106

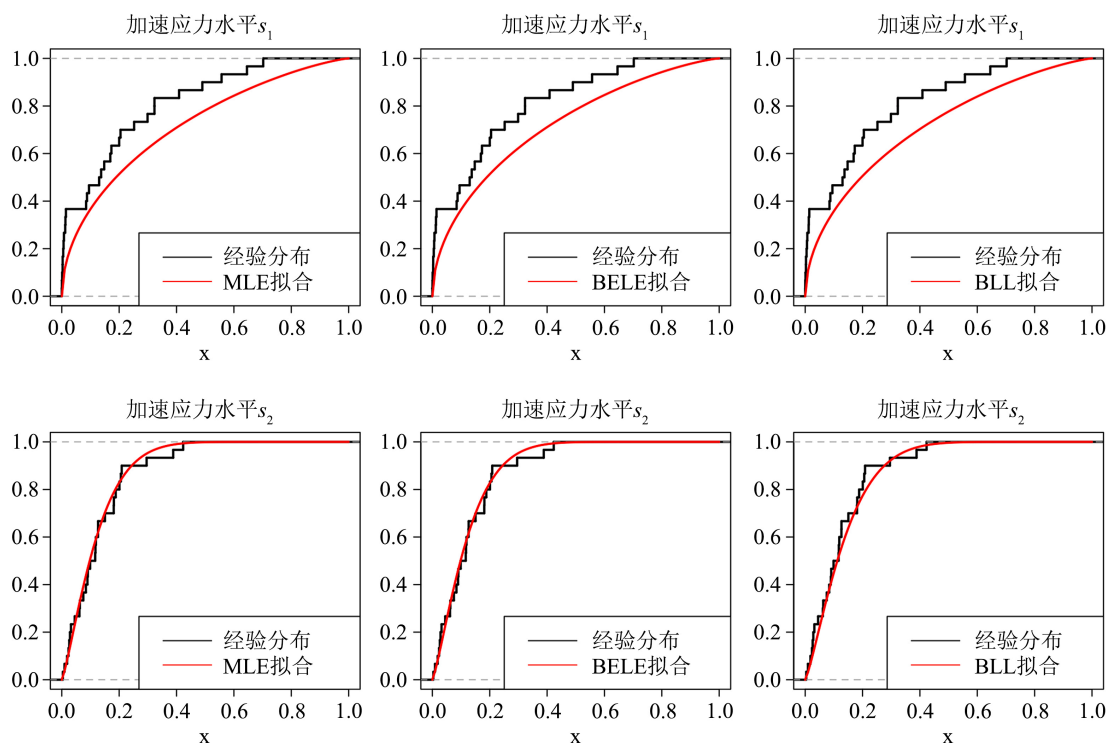
Table 2. MLE and Bayesian estimates for model parameters based on Table 1 data

表 2. 基于表 1 数据的模型参数的 MLE 和贝叶斯估计值

	α_1	α_2	λ_1	λ_2
MLE	1.275489	12.047624	0.521834	1.238080
BSEL	1.296311	14.199356	0.533854	1.331801
BLL	1.268948	11.555215	0.533767	1.331408
ACI	(0.668331, 1.884626)	(2.491749, 21.603500)	(0.298616, 0.745052)	(0.848953, 1.627206)
	1.216295	19.111751	0.446436	0.778253
PBCI	(1.006240, 2.362209)	(8.532254, 42.086386)	(0.423547, 0.850800)	(1.068860, 1.819730)
	1.355969	33.554132	0.427253	0.750870
BCI	(1.028256, 1.794089)	(11.232339, 20.187548)	(0.519569, 0.563102)	(1.295184, 1.376519)
	0.765833	8.955209	0.043533	0.081335

Table 3. Estimates of acceleration factors and reliability estimates for the system at different time points under normal stress levels**表 3.** 加速系数的估计值和系统在正常应力水平下不同时刻的可靠度估计

	a_1	a_2	b_1	b_2	$R_{2,2}(0.5)$	$R_{2,2}(0.8)$
MLE	-3.595443	9.593514	-2.177368	2.614751	0.870091	0.818848
BSEL	-3.846994	6.483778	-2.190857	2.477304	0.879926	0.834611
BLL	-4.021744	6.232366	-2.193891	2.473149	0.877608	0.830556

**Figure 1.** Comparisons of empirical CDFs and the fitted CDFs.**图 1.** 经验分布与拟合分布的对比

$$\log(\alpha_i) = a_1 + a_2 \log(s_i), i = 0, 1, 2$$

和

$$\log(\lambda_i) = b_1 + b_2 \log(s_i), i = 0, 1, 2.$$

迭代 (8) 式时随机设置初值, 同时, Bootstrap 方法和贝叶斯方法中迭代次数均设置为 $B = 10000$, 而贝叶斯迭代值里去除掉 $M = 1000$ 个不稳定点, 同时为了计算方便 $g = 1$ 。因为对此数据没有额外的先验信息, 不妨将所有的超参数均设置成 0.0001。模型参数和系统可靠性的估计值分别在表 2 和表 3 中已呈现出。从数值结果来看所有方法的表现都让人满意, 估计值都很接近。区间估计中 BCI 的宽度最窄, PBCI 区间最宽。此外, 图 1 中还将经验分布和不同方法得到的拟合分布进行了对比。

参考文献

- [1] Nelson, W. (2008) Accelerated Testing: Statistical Models, Test Plans, and Data Analysis. John Wiley Sons, Inc., Hoboken.
- [2] Zhang, C., Shi, Y., Bai, X. and Fu, Q. (2017) Inference for Constant-Stress Accelerated Life Tests with Dependent Competing Risks from Bivariate Birnbaum-Saunders Distribution Based on Adaptive Progressively Hybrid Censoring. *IEEE Transactions on Reliability*, **66**, 1-12. <https://doi.org/10.1109/TR.2016.2639583>
- [3] Wang, L., Tripathi, Y.M., Lodhi, C. and Zuo, X. (2022) Inference for Constant-Stress Weibull Competing Risks Model under Generalized Progressive Hybrid Censoring. *Mathematics and Computers in Simulation*, **192**, 70-83. <https://doi.org/10.1016/j.matcom.2021.08.017>
- [4] Kumaraswamy, P. (1980) A Generalized Probability Density Function for Double-Bounded Random Processes. *Journal of Hydrology*, **46**, 79-88. [https://doi.org/10.1016/0022-1694\(80\)90036-0](https://doi.org/10.1016/0022-1694(80)90036-0)
- [5] Kohansal, A. (2019) On Estimation of Reliability in a Multicomponent Stress-Strength Model for a Kumaraswamy Distribution Based on Progressively Censored Sample. *Statistical Papers*, **60**, 2185-2224. <https://doi.org/10.1007/s00362-017-0916-6>
- [6] Rastogi, M.K., Saad, J., Farghal, A.A. and Elmougod, G.A. (2022) Partially Constant-Stress Accelerated Life Tests Model for Parameters Estimation of Kumaraswamy Distribution under Adaptive Type-II Progressive Censoring. *Alexandria Engineering Journal*, **61**, 5133-5143. <https://doi.org/10.1016/j.aej.2021.10.035>
- [7] Bhattacharyya, G.K. and Johnson, R. (1974) Estimation of Reliability in Multicomponent Stress-Strength Model. *Journal of the American Statistical Association*, **348**, 966-970. <https://doi.org/10.1080/01621459.1974.10480238>
- [8] 付永领, 韩国惠, 陈娟, 马俊功. 基于气动系统的复杂系统加速寿命试验方法的研究 [J]. 机械强度, 2009, 31(4): 578-583.
- [9] Macauley, N., Watson, M., Lauritzen, M., Knights, S., Wang, G.G. and Kjeang, E. (2016) Empirical Membrane Lifetime Model for Heavy Duty Fuel Cell Systems. *Journal of Power Sources*, **336**, 240-250. <https://doi.org/10.1016/j.jpowsour.2016.10.068>
- [10] Roy, S. (2018) Bayesian Accelerated Life Test Plans for Series Systems with Weibull Component Lifetimes. *Applied Mathematical Modelling*, **62**, 383-403. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2018.06.007>
- [11] Wang, L., Zhang, C., Tripathi, Y.M., Dey, S. and Wu, S. (2021) Reliability Analysis of Weibull Multicomponent System with Stress-Dependent Parameters from Accelerated Life Data. *Quality and Reliability Engineering International*, **37**, 2603-2621. <https://doi.org/10.1002/qre.2878>

-
- [12] Wang, L., Wu, S.J., Zhang, C., Dey, S. and Tripathi, Y.M. (2022) Analysis for Constant-Stress Model on Multicomponent System from Generalized Inverted Exponential Distribution with Stress Dependent Parameters. *Mathematics and Computers in Simulation*, **193**, 301-316. <https://doi.org/10.1016/j.matcom.2021.10.017>
- [13] Nader, E. (1987) Analysis of Bivariate Accelerated Life Test Data for the Bivariate Exponential Distribution. *American Journal of Mathematical Management Sciences*, **7**, 175-190. <https://doi.org/10.1080/01966324.1987.10737213>