Pure Mathematics 理论数学, 2024, 14(2), 719-732
Published Online February 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.142071

反射偏微分方程解的惩罚近似

马治山，杜巩胜

北京邮电大学理学院，北京

收稿日期：2024年1月10日；录用日期：2024年1月29日；发布日期：2024年2月29日

摘 要

本文研究了一类二阶非线性抛物型偏微分方程反射问题，通过构造反射项的近似形式，给出了此反射方程的近似方程，即反射偏微分方程的惩罚方程。为了弱化条件，我们引入与反射问题等价的变分不等式问题，证明了惩罚方程的解收敛于变分不等式问题的解，此外由于反射项近似的特殊性，我们得到了其收敛速度，并且可以通过调整惩罚方程中的参数来控制反射方程解的精度。

关键词

偏微分方程，反射问题，惩罚方法，变分不等式

A Penalty Approximation Method for Reflected Partial Differential Equations

Zhishan Ma, Gongsheng Du

School of Science, Beijing University of Posts and Telecommunications, Beijing

Received: Jan. 10th, 2024; accepted: Jan. 29th, 2024; published: Feb. 29th, 2024

Abstract

In this article, we mainly study a class of second-order nonlinear parabolic partial differential equation with one reflecting wall. By constructing an approximate form of the reflection term, we provide an approximate equation for this reflection equation, which is the penalty equation for the reflection partial differential equation. In order to weaken the condition, we introduce a variational inequality problem equivalent to the reflection problem and prove that the solution of the penalty equation converges to the solution of the variational inequality problem. Furthermore, due to the particularity of the approximate reflection term, the convergence rate of the solution is given. And the accuracy of the reflection equation solution can be controlled by adjusting the parameters in the penalty equation.

文章引用: 马治山, 杜巩胜. 反射偏微分方程解的惩罚近似[J]. 理论数学, 2024, 14(2): 719-732.
DOI: 10.12677/pm.2024.142071

Keywords

Partial Differential Equations, Reflection Problem, Penalty Method, Variational Inequality

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

1. 引言

偏微分方程在物理学、工程学、经济学、化学等领域都有广泛的应用，它为解决现实中的应用问题提供了一个强有力的数学工具。目前有很多求解偏微分方程的方法，例如数值方法、解析方法和模拟方法。由于偏微分方程的复杂性，一般很难有解析解，因此需要开发求解偏微分方程的数值算法。常用的数值方法包括有限差分法、有限元法等。常用的模拟方法有蒙特卡罗方法等。

变分法是解决偏微分方程的一种重要的分析方法，在偏微分方程解的理论研究中有广泛的应用。变分法研究的是一类特殊的变分函数。其解决问题的方法是找到一个函数满足一定的条件，同时另一个函数达到泛函极值点，从而使得在一定条件下可以用变分问题来替代偏微分方程求解问题。变分法的起源最早可以追溯到十七世纪，牛顿等人在研究微积分的过程中发现了变分问题。十八世纪，欧拉与拉格朗日等数学家通过对泛函极值的深入研究，取得了多项成果。十九世纪，狄利克雷和希尔伯特等人的研究使得变分法得到了更深入的发展。到了二十世纪，变分法应用于更多领域。二十世纪三十年代，Signorini 在线性弹性体以及线性刚性体无摩擦接触的相关研究中得到了一个变分不等式，这引起了数学家们的兴趣。到了六十年代，Fichera Lions 和 Stampacchia 等人在论文[1]中的相关工作，给出了变分不等式的严密分析，为变分不等式数学研究做了基础性贡献。之后变分不等式才慢慢成为了专门的数学学科。

偏微分方程反射问题，也称为互补问题或变分不等式问题，在工程学、金融学等多种学科当中应用广泛，详见参考文献[2]-[7]及其参考文献。一般的反射问题可以通过方程，也可以通过不等式表示。如果反射问题有一个反射下界，问题的解将不能小于这个反射下界。在处理这类单边反射问题的解时，一般会引入一个反射项，反射项的作用是保证使得解不小于下界的最小外力。类似的，如果一个反射问题的不等式约束条件有两个，即解既有上界，也有下界，那么这种反射问题被称为双边反射问题，例如文献[8] [9] [10] [11]等。

惩罚函数方法是一种用于求解约束优化问题的方法，在求解约束优化问题时，我们需要在满足给定约束条件的情况下优化目标函数。一般情况下，约束条件可以分为等式约束和不等式约束两种情况。等式约束可以通过拉格朗日乘子法转化为无约束问题，但不等式约束条件比较复杂。惩罚函数法就是一种常用的解决不等式约束优化问题的方法。惩罚函数方法基本思想是把变分不等式问题转换为非线性边值问题(惩罚方程)，即将约束优化问题变为无约束优化问题，之后通过求解非线性方程组来近似求解变分不等式问题。惩罚函数方法在许多变分不等式问题和反射问题中得到了广泛应用。文献[12]中使用惩罚方法解决了一个一般的优化问题，文章[13] [14]使用惩罚方法考虑在光滑区域中具有滑移边界条件的不同 Stokes 方程的有限元方法，在文献[15]中，作者使用惩罚方法来求解一个由一个无限维优化问题的离散化而产生的非线性障碍问题。惩罚方法也用于期权定价问题，文献[16] [17]对服从几何 Lévy 过程的标的股票价格美式期权定价问题使用了惩罚方法。在参考文献[11]中，作者利用惩罚方法来获得抛物型变分不

等式问题的数值解。在文献[5]中作者通过一类惩罚微分方程解的近似，得到了关于一类椭圆变分不等式问题解的存在性定理。也有作者[18]给出了一种求解混合拟线性椭圆互补问题的惩罚近似方法。

本文我们给出了一种关于非线性二阶抛物型微分算子反射问题的惩罚近似方法，我们将利用此惩罚方法来解决下面这个非线性抛物型偏微分方程的反射问题。找到函数$\{u,y\}$，使得以下各式能够成立：

$$h(x,t)=\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}+J\big(u(x,t)\big)-f(x,t)+y(x,t)\ge 0,\ u(x,t)\ge u_*(x,t) \tag{1}$$

$$h(x,t)\big(u(x,t)-u_*(x,t)\big)=0 \tag{2}$$

$$y(x,t)\ge 0 \tag{3}$$

对于$(x,t)\in\Omega\times[0,T]=:Q$在初始条件和边界条件下几乎处处成立。

$$u(x,0)=u_0(x),x\in\Omega\quad \text{a,e.且}\ u(x,t)=0,(x,t)\in\partial\Omega\times(0,T]\quad \text{a.e.} \tag{4}$$

其中

$$J\big(u(x,t)\big)=-\nabla\cdot\big(A(x)\nabla u(x,t)\big)+G\big(u(x,t)\big) \tag{5}$$

Ω是一个有界的、开的连通域，而且具有光滑的边界，记为$\partial\Omega$。$A(x)=(a_{ij})$表示一个$n\times n$的对称矩阵，这里出现的$G(\cdot):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，$f,u_*$和$u_0$都是给定的函数。

本文的目标是将二阶非线性抛物型偏微分方程反射问题改写为单边反射变分不等式问题，通过构造反射项的近似形式，给出了近似变分不等式问题的惩罚方程，证明了惩罚方程的解收敛于变分不等式问题的解，而且我们得到了其收敛速度，并且可以通过调整惩罚方程中的参数来控制反射方程解的精度。本文的研究工作还存在许多值得改进的地方。在单边反射模型的基础上，我们可以加入一个上界约束条件，这样双边反射问题限制条件更为严格，其求解过程也会更加复杂。其次本文没有对此问题进行相关的数值实验，我们可以借助计算机软件例如 Matlab 等对具体的偏微分方程在给定约束条件的情况下进行数值实验，得到数值近似解。通过调整惩罚参数λ和参数k的取值，以验证惩罚方法的收敛速度、效率。本篇论文的主要框架如下。第一节首先主要介绍了偏微分方程、变分法以及求解偏微分方程反射问题的惩罚方法的相关研究背景。第二节为下文相关证明工作做了准备工作，首先介绍了一些数学符号、基础概念和相关假设，然后我们将二阶非线性抛物型偏微分方程反射问题改写为单边反射变分不等式问题，构造了近似变分不等式问题的惩罚方程，给出了主要结果。第三节中，通过相关引理的证明，得到我们的主要收敛结果，证明了惩罚方程的解收敛于变分不等式的解。

2. 预备知识和主要结果

2.1. 预备知识

我们首先对以下记号进行解释：

a.e.：表示几乎处处

∇：表示梯度算子

$A(x)$：表示一个$n\times n$的对称矩阵(a_{ij})

R^n：表示n维欧式空间

Ω：表示空间R^n上一个有界的，开的连通域，具有光滑的边界

$\partial\Omega$：表示Ω的边界且光滑

mes：表示集合的测度

$L^p(\Omega)=\left\{v:\int\Omega\left|v(x)\right|^p \mathrm{d}x<\infty\right\}$：表示区域 Ω 内的所有的 P 次可积函数的空间

$(\cdot,\cdot)$：表示 $P=2$ 时，$L^p(\Omega)$ 空间上的内积

$\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$：表示 $L^p(\Omega)$ 上的范数

$W^{m,p}(\Omega)$：表示 $m=1,2,\cdots$ 时范数为 $\|\cdot\|_{m,p,\Omega}$ 的索伯列夫空间

$H^m(\Omega)$：当 $P=2$ 时，把 $W^{m,2}(\Omega)$ 表示为 $H^m(\Omega)$，这是一个希尔伯特(Hilbert)空间

$\|\cdot\|_{m,\Omega}$：当 $P=2$ 时，把 $\|\cdot\|_{m,2,\Omega}$ 表示为 $\|\cdot\|_{m,\Omega}$

$C^m(\Omega)$：表示 Ω 区域上有 $1,2,3,\cdots,m$ 阶连续导数的集合

$C^m(\bar{\Omega})$：同上，表示区域 $\bar{\Omega}$ 上有 $1,2,3,\cdots,m$ 阶连续导数的集合

我们给出以下记号。

令 $H_0^m(\Omega)=\left\{v\in H^m(\Omega):v(x)=0,x\in\partial\Omega\right\}$，对于任意的一个空间 $H(\Omega)$，$L^P\left([0,T]:H(\Omega)\right)$ 表示由 $L^P\left([0,T]:H(\Omega)\right)=\left\{v:v(\cdot,t)\in H(\Omega)\text{ a.e.}[0,T];\left\|v(\cdot,t)\right\|_H\in L^P[0,T]\right\}$ 上所定义的空间。其中 $1\le p\le\infty$，$\|\cdot\|_H$ 表示为 $H(\Omega)$ 空间上的自然范数。$L^P\left([0,T]:H(\Omega)\right)$ 的范数记为 $\|\cdot\|_{L^P([0,T]:H(\Omega))}$，即：

$v_{L^P([0,T]:H(\Omega))}=\left(\int_0^T\left\|v(\cdot,t)\right\|_H^p\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}$，然后我们用 $H^{-1}(\Omega)$ 来表示空间 $H_0^1(\Omega)$ 的对应的对偶空间。用 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示一个希尔伯特空间和其对偶空间上的对偶对。令 $K\subset L^2\left([0,T]:H_0^1(\Omega)\right)$ 表示被下式定义的可行性函数的集合：

$$K=\left\{u\in L^2\left([0,T]:H_0^1(\Omega)\right):u(x,t)\ge u_*(x,t)\text{ a.e., 在}[0,T]\times\Omega\right\}$$

显然 K 是 $L^2\left([0,T]:H_0^1(\Omega)\right)$ 上的凸闭子集。对 $H_0^1(\Omega)$ 空间上的一个子集 D，由下式定义函数 $\delta_D:H_0^1(\Omega)\to\bar{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$：

$$\delta_D(u)=\begin{cases}0, & \text{若 } u\in D\\ +\infty, & \text{其他}\end{cases}$$

接下来我们对上面给定的有界区域 Ω 进行以下划分，这样的分解有助于我们构造反射问题的变分形式。

我们定义：

$$\Omega_1^t=\left\{x\in\Omega:u_*(x,t)<u(x,t)\right\}$$

$$\Omega_2^t=\left\{x\in\Omega:u(x,t)=u_*(x,t)\right\}$$

显然 $\mathrm{mes}\left(\Omega-\left(\Omega_1^t\cup\Omega_2^t\right)\right)=0$，即我们把有界区域 Ω 分为了 Ω_1^t 和 Ω_2^t。

我们假设函数 $\{u,y\}$ 满足(1)~(5)，且满足 $u\in K$，$y\ge0$，那么函数 y 其实是被唯一确定的：

$$y(x,t)=-\left(\frac{\partial u}{\partial t}+J\left(u(x,t)\right)-f(x,t)\right),\ x\in\Omega_1^t$$

$$y(x,t)=0,\ x\in\Omega_2^t \tag{6}$$

这样通过对有界区域 Ω 的划分，在不同的区域下，由(6)表示的数学关系与(1)至(5)表示的数学关系等价，于是我们便可以说明 u 解决了(1)至(5)的反射问题。(6)作为(1)至(5)对应的反射问题，形式上更为简单，这很大程度上降低了原方程的求解难度。

将把上述问题重写为单边反射变分不等式问题。我们首先给出一些假设条件，这些假设条件会在之

后的证明过程中频繁用到。紧接着我们给出一个变分不等式问题，并证明了给出的变分不等式是反射问题(1)至(5)所对应的变分形式，还根据相关参考文献的结论证明了此变分不等式的解是唯一确定的。

给出以下四个假设，并让这四个假设对于(1)至(3)对应的函数成立：

对任意常数 $k>1$，令 $r=\frac{1}{k}+1$，$s=1+k$，显然有 $\frac{1}{r}+\frac{1}{s}=1$ 成立，即 r 与 s 为共轭指数。

假设 1 对任意的 $i,j=1,\cdots,n$，$a_{ij}\in L^{\infty}(\Omega)\cap H^1(\Omega)$，并且存在一个常数 $b_0>0$，使得对任意的 $\xi\in\mathbb{R}^n$，$\xi^{\top}A(x)\xi\ge b_0|\xi|^2$ 在区域 Ω 上几乎处处成立。

假设 2 $f\in L^s([0,T]:L^s(\Omega))$。

假设 3 $u_*\in L^S([0,T]:W_0^{2,s}(\Omega))$，$u_0\in W_0^{2,r}(\Omega)$，在区域 Ω 上 $u_*(x,0)\le u_0(x)$ 几乎处处成立。并且 $\frac{\partial u_*}{\partial t}\in L^s([0,T]:L^s(\Omega))$。

假设 4 $G(v)\in L^2(\Omega)$ 对任意的 $v\in L^2(\Omega)$，G 是 $L^2(\Omega)$ 上的单调且 Lipschitz 连续的函数，即对任意的 $v_1,v_2\in L^2(\Omega)$ 和一些常数 $\alpha>0$，函数 G 满足

$$(G(v_1)-G(v_2),v_1-v_2)\ge 0$$

和

$$\|G(v_1)-G(v_2)\|_{L^2(\Omega)}\le\alpha\|v_1-v_2\|_{L^2(\Omega)}$$

定义函数 $B(u,v)$ 为：

$$B(u,v)=\int_{\Omega}\nabla v(x,t)^{\top}A(x)\nabla u(x,t)\mathrm{d}x,\ \forall u,v\in L^2([0,T]:H_0^1(\Omega))$$

然后我们引入以下变分不等式问题。

问题 1 找到函数 $u\in K$，使得对所有的函数 $v\in K$，$u(x,0)=u_0(x)$ 在区域 Ω 上几乎处处成立，且

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\partial u(\cdot,t)}{\partial t},v(\cdot,t)-u(\cdot,t)\right)+B(u(\cdot,t),v(\cdot,t)-u(\cdot,t))+(G(u(\cdot,t)),v(\cdot,t)-u(\cdot,t))\\&\ge(f(\cdot,t),v(\cdot,t)-u(\cdot,t))\end{aligned}\tag{7}$$

在 $[0,T]$ 上几乎处处成立。

我们已经给出一个变分不等式问题，类似文献[10]中 Lemma 2.1 可知，上述问题 1 是反射问题(1)至(5)所对应的变分形式。

命题 1 若假设 1 至假设 4 成立，那么问题 1 是反射问题(1)至(5)对应的变分问题，且存在唯一解。

命题 1 的证明可参考文献[19] (pp. 258-259)中的结论。

接下来我们给出了一个惩罚项。然后构造一个非线性抛物型偏微分方程（惩罚方程）来逼近变分不等式，并且证明了惩罚方程的解唯一。然后，我们给出并证明了几个对得到收敛结果有很大帮助的引理。

我们先构造一些函数，这些函数在之后的证明过程中会起到关键作用。

对任意函数 $u\in L^2([0,T]:H_0^1(\Omega))$，函数 $\varphi(u(x,t))$ 由下式定义：

$$\varphi(u(x,t))=(u(x,t)-u_*(x,t))_-$$

其中 $(x,t)\in Q$，对任意的 $a\in\mathbb{R}$，定义 $(a)_-=\min\{a,0\}$，$(a)_+=\max\{a,0\}$。显然 $\varphi(u_*(x,t))=0$。对任意的 $a\in\mathbb{R}$，再定义下面这个函数：

$$\chi(a)=\begin{cases}1, & 若 a\ge 0\\ -1, & 其他\end{cases}$$

由函数$\varphi(u(x,t))$和函数$\chi(a)$的定义，可以得到对于一个确定的参数ε（ε是大于等于 0 且远小于 1 的，即$1\gg\varepsilon\geq 0$），我们可以再定义一个函数$\sigma_\varepsilon(u)$：

$$\sigma_\varepsilon(u)=\left(\left|\varphi(u)\right|+\varepsilon\right)^{\frac{1}{k}}\chi(\varphi(u))-\varepsilon^{\frac{1}{k}},\forall u\in L^2\left([0,T]:H_0^1(\Omega)\right) \tag{8}$$

紧接着，利用上面所构造的函数，我们不难得到，函数$\sigma_\varepsilon(u)$是单调函数，并且有

$$\sigma_\varepsilon(u)=0\Leftrightarrow u\in K$$

经过上述的准备工作，我们考虑惩罚方程：

$$\frac{\partial u_\lambda}{\partial t}+J(u_\lambda(x,t))+\lambda\sigma_\varepsilon(u_\lambda(x,t))=f(x,t) \tag{9}$$

对于$(x,t)\in Q$及初始边界条件$u_\lambda(x,t)=0,(x,t)\in\partial\Omega\times(0,T]$和$u_\lambda(x,0)=u_0(x),x\in\Omega$，其中$\lambda>1,\varepsilon\in(0,1]$和$k>1$都是相关参数，$Q=\Omega\times(0,T]$。(9)所对应的变分形式如下。

问题 2 找到这样一个$u_\lambda\in L^2\left([0,T]:H_0^1(\Omega)\right)$，使得对于所有的$v\in L^2\left([0,T]:H_0^1(\Omega)\right)$，都有：

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\partial u_\lambda(\cdot,t)}{\partial t},v(\cdot,t)\right)+\lambda\left(\left(\left|\varphi(u_\lambda(\cdot,t))\right|+\varepsilon\right)^{\frac{1}{k}}\chi(\varphi(u_\lambda(\cdot,t))),v(\cdot,t)\right)\\&=-B(u_\lambda(\cdot,t),v(\cdot,t))-(G(u_\lambda(\cdot,t)),v(\cdot,t))+\left(f(\cdot,t)+\lambda\varepsilon^{\frac{1}{k}},v(\cdot,t)\right)\end{aligned} \tag{10}$$

在$[0,T]$上几乎处处成立。其中在Ω上$u(x,0)=u_0(x)$。

接下来参考文献[13]中 Theorem 3.1 可以得到以下命题，我们可以确定上述问题 2 的解是唯一确定的。

命题 2 在假设 1 至假设 4 全部成立的条件下，那么对于任意的参数$\varepsilon\in(0,1]$和$\lambda>1$，问题 2 存在唯一解。

2.2. 主要结果

定理 1 在假设 1 至假设 4 全部成立的条件下，设u是问题 1 的解，u_λ是问题 2 的解。若

$$\frac{\partial u(\cdot,t)}{\partial t}\in L^{k+1}(\Omega) \tag{11}$$

在$[0,T]$上几乎处处成立，则存在一个独立于u_λ，λ以及ε的正常数 C，使得下式成立：

$$\left\|u-u_\lambda\right\|_{L^2\left([0,T]:H_0^1(\Omega)\right)}+\left\|u-u_\lambda\right\|_{L^\infty\left([0,T]:L^2(\Omega)\right)}\leq C\left(\frac{1}{\lambda^k}+\lambda\varepsilon\right)^{\frac{1}{2}} \tag{12}$$

3. 主要结果的证明

接下来我们将通过相关引理的证明，得到我们的主要收敛结果。

引理 1 设u_λ是问题 2 的解，设$r=\frac{1}{k}+1$，若$u_\lambda(\cdot,t)\in L^r(\Omega)$在$[0,T]$上几乎处处成立，那么肯定存在一个独立于$u_\lambda$，$\lambda$以及$\varepsilon$的正常数 C，使得：

$$\left\|\varphi(u_\lambda(\cdot,t))\right\|_{L^r(Q)}\leq C\left(\frac{1}{\lambda^k}+\varepsilon\right) \tag{13}$$

在$[0,T]$上几乎处处成立。

证明： 设 C 是一个独立于u_λ和λ的正常数。因为u_λ是问题 2 的解，所以u_λ满足(10)。令(10)中的函

数 $v=\varphi(u_\lambda)$，则可以得到：

$$\left(\frac{\partial u_\lambda(\cdot,t)}{\partial t},\varphi(u_\lambda(\cdot,t))\right)+\lambda\left(\left(\left|\varphi(u_\lambda(\cdot,t))\right|+\varepsilon\right)^{\frac{1}{k}}\chi(\varphi(u_\lambda(\cdot,t))),\varphi(u_\lambda(\cdot,t))\right)+B(u_\lambda(\cdot,t),\varphi(u_\lambda(\cdot,t)))$$
$$=-(G(u_\lambda(\cdot,t)),\varphi(u_\lambda(\cdot,t)))+\left(f(\cdot,t)+\lambda\varepsilon^{\frac{1}{k}},\varphi(u_\lambda(\cdot,t))\right) \tag{14}$$

在 $[0,T]$ 上几乎处处成立。紧接着定义：

$$\begin{aligned}\Omega_I^t&=\{x\in\Omega:u_*(x,t)\le u_\lambda(x,t)\}\\ \Omega_{II}^t&=\{x\in\Omega:u_\lambda(x,t)<u_*(x,t)\}\end{aligned} \tag{15}$$

由上式，我们把区域 Ω 划分为 Ω_I^t 与 Ω_{II}^t，并且有 $\mathrm{mes}(\Omega\setminus(\Omega_I^t\cup\Omega_{II}^t))=0$，则对于满足任意的 $i,j=I,II$，都能得到 $\Omega_i^t\cap\Omega_j^t$ 等于空集。此外，当 $x\in\Omega_I^t$ 的时候，都有函数 $\varphi(u_\lambda(x,t))=0$。在此分解方式的基础之上，利用假设 3，就可以得到：

$$\begin{aligned}&\int_\Omega\left(\frac{\partial u_\lambda(x,t)}{\partial t}-\frac{\partial\varphi(u_\lambda(x,t))}{\partial t}\right)\varphi(u_\lambda(x,t))\mathrm{d}x\\ &=0+\int_{\Omega_{II}^t}\left(\frac{\partial u_\lambda(x,t)}{\partial t}-\frac{\partial(u_\lambda(x,t)-u_*(x,t))}{\partial t}\right)\varphi(u_\lambda(x,t))\mathrm{d}x\\ &\le\left\|\frac{\partial u_*(\cdot,t)}{\partial t}\right\|_{L^s(\Omega)}\left\|\varphi(u_\lambda(\cdot,t))\right\|_{L^r(\Omega)}\\ &\le C\left\|\varphi(u_\lambda(\cdot,t))\right\|_{L^r(\Omega)}\end{aligned} \tag{16}$$

在 $[0,T]$ 上几乎处处成立。其中 $r=\frac{1}{k}+1$，$s=1+k$，显然 $\frac{1}{r}+\frac{1}{s}=1$。由上文内容，我们可以得到在 $\partial\Omega$ 以及 Ω_I^t 上 $\varphi(u_\lambda)=0$。再根据假设 3，函数 $B(u,v)$ 的定义以及分部积分法，可得：

$$\begin{aligned}&B(u_\lambda(\cdot,t)-\varphi(u_\lambda(\cdot,t)),\varphi(u_\lambda(\cdot,t)))\\ &=\int_\Omega\nabla\varphi(u_\lambda(x,t))^\top A(x)\nabla(u_\lambda(x,t)-\varphi(u_\lambda(x,t)))\mathrm{d}x\\ &=-\int_\Omega\nabla\cdot(A(x)\nabla(u_\lambda(x,t)-\varphi(u_\lambda(x,t))))\varphi(u_\lambda(x,t))\mathrm{d}x\\ &\quad+\int_{\partial\Omega}(A(x)\nabla(u_\lambda(x,t)-\varphi(u_\lambda(x,t)))\cdot v)\varphi(u_\lambda(x,t))\mathrm{d}s\\ &=-\int_{\Omega_I^t}\nabla\cdot(A(x)\nabla(u_\lambda(x,t)-\varphi(u_\lambda(x,t))))\varphi(u_\lambda(x,t))\mathrm{d}x\\ &\quad-\int_{\Omega_{II}^t}\nabla\cdot\left(A(x)\nabla\left(\int_{\Omega_{II}^t}\nabla\cdot(A(x)\nabla u_*(x,t))\varphi(u_\lambda(x,t))\mathrm{d}x\right)\right)\varphi(u_\lambda(x,t))\mathrm{d}x\\ &=0-\int_{\Omega_{II}^t}\nabla\cdot(A(x)\nabla u_*(x,t))\varphi(u_\lambda(x,t))\mathrm{d}x\\ &\le C\left\|\varphi(u_\lambda(\cdot,t))\right\|_{L^r(\Omega)}\end{aligned}$$

在 $[0,T]$ 上几乎处处成立。其中 v 是边界 $\partial\Omega$ 上外法线的单位向量。再根据假设 4 我们知道 G 是一个单调函数。那么显然函数 φ 也是单调函数并且 $\varphi(u_*)=0$，则可以得到下式：

$$(G(u_\lambda)-G(u_*),\varphi(u_\lambda))=(G(u_\lambda)-G(u_*),\varphi(u_\lambda)-\varphi(u_*))\ge 0$$

根据假设 2 可以得出：

$$\left(f(\cdot,t)+\lambda\varepsilon^{\frac{1}{k}},\varphi\left(u_\lambda(\cdot,t)\right)\right)\le C\left(1+\lambda\varepsilon^{\frac{1}{k}}\right)\left\|\varphi\left(u_\lambda(\cdot,t)\right)\right\|_{L^r(\Omega)}$$

在$[0,T]$上几乎处处成立。再根据假设 1，我们得到：

$$B\left(\varphi\left(u_\lambda(\cdot,t)\right),\varphi\left(u_\lambda(\cdot,t)\right)\right)\ge b_0\int_\Omega\left|\nabla\varphi\left(u_\lambda(x,t)\right)\right|^2\mathrm{d}x\ge C\left\|\varphi\left(u_\lambda(\cdot,t)\right)\right\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \tag{17}$$

在$[0,T]$上几乎处处成立。将上述(16)，(17)代入到(14)当中，就可以得到：

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\varphi\left(u_\lambda(\cdot,t)\right)}{\partial t},\varphi\left(u_\lambda(\cdot,t)\right)\right)+\lambda\left(\left(\left|\varphi\left(u_\lambda(\cdot,t)\right)\right|+\varepsilon\right)^{\frac{1}{k}}\chi\left(\varphi\left(u_\lambda(\cdot,t)\right)\right),\varphi\left(u_\lambda(\cdot,t)\right)\right)+C\left\|\varphi\left(u_\lambda(\cdot,t)\right)\right\|_{H_0^1(\Omega)}^2\\&\le C\left\|\varphi\left(u_\lambda(\cdot,t)\right)\right\|_{L^r(\Omega)}-\left(G(u_*),\varphi\left(u_\lambda(\cdot,t)\right)\right)+\left(f(\cdot,t)+\lambda\varepsilon^{\frac{1}{k}},\varphi\left(u_\lambda(\cdot,t)\right)\right)\\&\le C\left(1+\lambda\varepsilon^{\frac{1}{k}}\right)\left\|\varphi\left(u_\lambda(\cdot,t)\right)\right\|_{L^r(\Omega)}\end{aligned} \tag{18}$$

在$[0,T]$上几乎处处成立。再根据假设 3，$u_*(x,0)\le u_0(x)$在Ω上几乎处处成立，那么

$$\left(u_0(x)-u_*(x,0)\right)_-=0 \tag{19}$$

因此对任意满足$v(x,0)=u_0(x)$的函数 v，根据函数$\varphi\left(u(x,t)\right)$的定义以及(19)，有$\varphi\left(v(x,0)\right)=0$。所以

$$\int_0^t\frac{\partial\varphi\left(v(x,\tau)\right)}{\partial\tau}\varphi\left(v(x,\tau)\right)\mathrm{d}\tau=\frac{1}{2}\left[\varphi^2\left(v(x,t)\right)-\varphi^2\left(v(x,0)\right)\right]=\frac{1}{2}\varphi^2\left(v(x,t)\right) \tag{20}$$

从 0 到 t 分别对(18)的两边积分，根据赫尔德不等和(20)，就可以得到：

$$\begin{aligned}&\lambda\int_0^t\left(\left(\left|\varphi\left(u_\lambda(x,\tau)\right)\right|+\varepsilon\right)^{\frac{1}{k}}\chi\left(\varphi\left(u_\lambda(x,\tau)\right)\right),\varphi\left(u_\lambda(x,\tau)\right)\right)\mathrm{d}\tau\\&+\frac{1}{2}\left(\varphi\left(u_\lambda(\cdot,t)\right),\varphi\left(u_\lambda(\cdot,t)\right)\right)+C\int_0^t\left\|\varphi\left(u_\lambda(\cdot,\tau)\right)\right\|_{H_0^1(\Omega)}^2\mathrm{d}\tau\\&\le C\left(1+\lambda\varepsilon^{\frac{1}{k}}\right)\left(\int_0^t\left\|\varphi\left(u_\lambda(\cdot,\tau)\right)\right\|_{L^r(\Omega)}^r\mathrm{d}\tau\right)^{\frac{1}{r}}\end{aligned} \tag{21}$$

在$[0,T]$上几乎处处成立。而且要注意$\left|\varphi\left(u_\lambda(x,\tau)\right)\right|\le\left|\varphi\left(u_\lambda(x,\tau)\right)\right|+\varepsilon$以及其中的$r=1+\dfrac{1}{k}$。紧接着由(21)可以得到：

$$\begin{aligned}&\lambda\int_0^t\left\|\varphi\left(u_\lambda(\cdot,\tau)\right)\right\|_{L^r(\Omega)}^r\mathrm{d}\tau\\&\le\lambda\int_0^t\int_\Omega\left(\left|\varphi\left(u_\lambda(x,\tau)\right)\right|+\varepsilon\right)^{\frac{1}{k}}\varphi\left(u_\lambda(x,\tau)\right)\chi\left(\varphi\left(u_\lambda(x,\tau)\right)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau\\&\le C\left(1+\lambda\varepsilon^{\frac{1}{k}}\right)\left(\int_0^t\left\|\varphi\left(u_\lambda(\cdot,\tau)\right)\right\|_{L^r(\Omega)}^r\mathrm{d}\tau\right)^{\frac{1}{r}}\end{aligned} \tag{22}$$

在$[0,T]$上几乎处处成立。因此

$$\left(\int_0^t\left\|\varphi\left(u_\lambda(\cdot,\tau)\right)\right\|_{L^r(\Omega)}^r\mathrm{d}\tau\right)^{\frac{1}{r}}\le C\left(\frac{1}{\lambda}+\varepsilon^{\frac{1}{k}}\right)^k\le C\left(\frac{1}{\lambda^k}+\varepsilon\right) \tag{23}$$

在$\left[0,T\right]$上几乎处处成立。

根据上面的证明，(13)成立。□

引理 2 在引理 1 相同的假设下，那么下式

$$\max\left\{\left\|\varphi\left(u_\lambda\right)\right\|_{L^\infty\left(\left[0,T\right]:L^2(\Omega)\right)},\left\|\varphi\left(u_\lambda\right)\right\|_{L^2\left(\left[0,T\right]:H_0^1(\Omega)\right)}\right\}\le C\left(\frac{1}{\lambda^k}+\lambda\varepsilon\right)^{\frac{1}{2}} \tag{24}$$

成立。

证明：由引理 1 可知C是一个独立于u_λ和λ的正常数。因为u_λ是问题 2 的解，所以u_λ一定满足(10)。因此我们再联立(21)和(23)，就可以得到：

$$\frac{1}{2}\left(\varphi\left(u_\lambda\left(\cdot,t\right)\right),\varphi\left(u_\lambda\left(\cdot,t\right)\right)\right)\le C\left(1+\lambda\varepsilon^{\frac{1}{\dot{\lambda}}}\right)\left(\frac{1}{\lambda^{\dot{\kappa}}}+\varepsilon\right)\le C\frac{\left(1+\lambda\varepsilon^{\frac{1}{\dot{\kappa}}}\right)^{\dot{\kappa}+1}}{\lambda^{\dot{\kappa}}} \tag{25}$$

在$\left[0,T\right]$上几乎处处成立。再由(25)得到：

$$\left(\varphi\left(u_\lambda\left(\cdot,t\right)\right),\varphi\left(u_\lambda\left(\cdot,t\right)\right)\right)\le C\left(\frac{1}{\lambda^k}+\lambda\varepsilon^r\right)$$

在$\left[0,T\right]$上几乎处处成立，其中$r=1+\dfrac{1}{k}$。类似的，我们同样可以根据(21)和(23)得到：

$$\int_0^t\left\|\varphi\left(u_\lambda\left(x,\tau\right)\right)\right\|_{H_0^1(\Omega)}^2\mathrm{d}\tau\le C\left(\frac{1}{\lambda^k}+\lambda\varepsilon^r\right)$$

在$\left[0,T\right]$上几乎处处成立，其中参数$\varepsilon\in\left(0,1\right]$且$\varepsilon^r\le\varepsilon$。综上所述，我们可以得到(24)。

在给出下个引理之前，我们先做以下准备工作：

(15)定义了Ω_I^t和Ω_{II}^t，接下来再定义函数ρ_λ以及$\psi\left(u_\lambda\right)$：

$$\rho_\lambda=\begin{cases}u-u_\lambda, & 若\ x\in\Omega_I^t\\ u-u_*-\left(u_\lambda-u_*\right)_+, & 若\ x\in\Omega_{II}^t\end{cases} \tag{26}$$

和

$$\psi\left(u_\lambda\right)=\begin{cases}0, & 若\ x\in\Omega_I^t\\ \left(u_\lambda-u_*\right)_-, & 若\ x\in\Omega_{II}^t\end{cases} \tag{27}$$

根据前文我们提到的$\left(a\right)_+$和$\left(a\right)_-$的定义，显然$a=\left(a\right)_++\left(a\right)_-$成立。所以根据(26)和(27)可以得到：

$$u-u_\lambda=\rho_\lambda-\psi\left(u_\lambda\right) \tag{28}$$

这样我们就给出了函数ρ_λ以及$\psi\left(u_\lambda\right)$的定义，有了这些准备工作，我们便可以引入下面的引理。

引理 3 在假设 1 至假设 4 全部成立的条件下，设u和u_λ分别为问题 1 和问题 2 的解。当$r=\dfrac{1}{k}+1$时，$u_\lambda\in L^r\left(\Omega\right)$，我们可以得到：

$$\left(\left(\left|\varphi\left(u_\lambda\left(\cdot,t\right)\right)\right|+\varepsilon\right)^{\frac{1}{k}}\chi\left(\varphi\left(u_\lambda\left(\cdot,t\right)\right)\right)-\varepsilon^{\frac{1}{k}},\rho_\lambda\left(\cdot,t\right)\right)\le 0 \tag{29}$$

在$\left[0,T\right]$上几乎处处成立。

证明： 根据定义 $\varphi(u_\lambda(x,t))=(u_\lambda(x,t)-u_*(x,t))_-$，所以当 $x\in\Omega_I^t$ 时，$\varphi(u_\lambda(x,t))=0$ 以及 $\chi(\varphi(u_\lambda(x,t)))=1$。而当 $x\in\Omega_{II}^t$ 时，$\varphi(u_\lambda(x,t))=u_\lambda(x,t)-u_*(x,t)\geq 0$，$\rho_\lambda=u(x,t)-u_*(x,t))\geq 0$，以及 $\chi(\varphi(u_\lambda(x,t)))=-1$。则可以得到：

$$\int_{\Omega_I^t}\left(\left(\left|\varphi(u_\lambda(x,t))\right|+\varepsilon\right)^{\frac{1}{k}}\chi(\varphi(u_\lambda(x,t)))-\varepsilon^{\frac{1}{k}}\right)\rho_\lambda(x,t)\mathrm{d}x=0 \tag{30}$$

和

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega_{II}^t}\left(\left(\left|\varphi(u_\lambda(x,t))\right|+\varepsilon\right)^{\frac{1}{k}}\chi(\varphi(u_\lambda(x,t)))-\varepsilon^{\frac{1}{k}}\right)\rho_\lambda(x,t)\mathrm{d}x\\&=-\int_{\Omega_{II}^t}\left(\left(u_*(x,t)-u_\lambda(x,t)+\varepsilon\right)^{\frac{1}{k}}+\varepsilon^{\frac{1}{k}}\right)\left(u(x,t)-u_*(x,t)\right)\mathrm{d}x\leq 0\end{aligned} \tag{31}$$

在 $[0,T]$ 上几乎处处成立。则根据(30)和(31)，(29)成立。□

引理 4 在引理 2 相同的假设条件下，有

$$\int_\Omega\left|\psi(u_\lambda(x,t))\right|^\beta\mathrm{d}x=\int_\Omega\left|\varphi(u_\lambda(x,t))\right|^\beta\mathrm{d}x \tag{32}$$

当 $\beta=r=2$ 时，有

$$\int_\Omega\left|\nabla\psi(u_\lambda(x,t))\right|^2\mathrm{d}x=\int_\Omega\left|\nabla\varphi(u_\lambda(x,t))\right|^2\mathrm{d}x \tag{33}$$

证明： 我们首先来证明(32)成立。根据(27)中定义的函数 ψ 以及(15)中对 Ω 的分解，得到：

$$\int_\Omega\left|\psi(u_\lambda(x,t))\right|^\beta\mathrm{d}x=0+\int_{\Omega_{II}^t}\left|u_\lambda(x,t)-u_*(x,t)\right|^\beta\mathrm{d}x$$

再根据函数 φ 的定义，可以得到：

$$\int_\Omega\left|\varphi(u_\lambda(x,t))\right|^\beta\mathrm{d}x=0+\int_{\Omega_{II}^t}\left|u_\lambda(x,t)-u_*(x,t)\right|^\beta\mathrm{d}x$$

因此，(32)成立。类似的，同样可以证明(33)成立。

最后我们给出收敛结果。

定理 2.1 的证明：

根据 Ω_I^t 和 Ω_{II}^t 在(15)中的定义可得，当 $x\in\Omega_I^t$ 时 $\rho_\lambda=u-u_\lambda$，若 $x\in\Omega_{II}^t$，则 $\rho_\lambda=u-u_*$。因为 u,u_λ 分别是问题 1 以及问题 2 的解，所以得到：

$$\left(\frac{\partial u(\cdot,t)}{\partial t},-\rho_\lambda(\cdot,t)\right)+B(u(\cdot,t),-\rho_\lambda(\cdot,t))+(G(u(\cdot,t)),-\rho_\lambda(\cdot,t))\geq(f(\cdot,t),-\rho_\lambda(\cdot,t)) \tag{34}$$

以及

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\partial u_\lambda(\cdot,t)}{\partial t},\rho_\lambda(\cdot,t)\right)+\lambda\left(\left(\left|\varphi(u_\lambda(\cdot,t))\right|+\varepsilon\right)^{\frac{1}{k}}\chi(\varphi(u_\lambda(\cdot,t))),\rho_\lambda(\cdot,t)\right)\\&=-B(u_\lambda(\cdot,t),\rho_\lambda(\cdot,t))-(G(u_\lambda(\cdot,t)),\rho_\lambda(\cdot,t))+\left(f(\cdot,t)+\lambda\varepsilon^{\frac{1}{k}},\rho_\lambda(\cdot,t)\right)\end{aligned} \tag{35}$$

在 $[0,T]$ 上几乎处处成立。将上述不等(34)和等(35)相加，得到：

$$\left(\frac{\partial\left(u_\lambda(\cdot,t)-u(\cdot,t)\right)}{\partial t},\rho_\lambda(\cdot,t)\right)+\lambda\left(\left(\left|\varphi\left(u_\lambda(\cdot,t)\right)\right|+\varepsilon\right)^{\frac{1}{k}}\chi\left(\varphi\left(u_\lambda(\cdot,t)\right)\right),\rho_\lambda(\cdot,t)\right)$$
$$\geq -B\left(u_\lambda(\cdot,t)-u(\cdot,t),\rho_\lambda(\cdot,t)\right)-\left(G\left(u_\lambda(\cdot,t)\right)-G\left(u(\cdot,t)\right),\rho_\lambda(\cdot,t)\right)+\left(\lambda\varepsilon^{\frac{1}{k}},\rho_\lambda(\cdot,t)\right)$$

在$[0,T]$上几乎处处成立。再根据假设 4，得到：

$$\begin{aligned}&\left(G\left(u_\lambda(\cdot,t)\right)-G\left(u(\cdot,t)\right),\rho_\lambda(\cdot,t)\right)\\&=\left(G\left(u_\lambda(\cdot,t)\right)-G\left(u(\cdot,t)\right),u(\cdot,t)-u_\lambda(\cdot,t)\right)+\left(G\left(u_\lambda(\cdot,t)\right)-G\left(u(\cdot,t)\right),\psi\left(u_\lambda(\cdot,t)\right)\right)\\&\leq C\left\|u_\lambda(\cdot,t)-u(\cdot,t)\right\|_{L^2(\Omega)}\left\|\psi\left(u_\lambda(\cdot,t)\right)\right\|_{L^2(\Omega)}\\&=C\left\|\rho_\lambda(\cdot,t)-\psi\left(u_\lambda(\cdot,t)\right)\right\|_{L^2(\Omega)}\left\|\psi\left(u_\lambda(\cdot,t)\right)\right\|_{L^2(\Omega)}\\&\leq C\left(\left\|\rho_\lambda(\cdot,t)\right\|_{H_0^1(\Omega)}\left\|\varphi\left(u_\lambda(\cdot,t)\right)\right\|_{H_0^1(\Omega)}+\left\|\varphi\left(u_\lambda(\cdot,t)\right)\right\|_{H_0^1(\Omega)}^2\right)\end{aligned}$$

在$[0,T]$上几乎处处成立。因此

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\partial\left(u(\cdot,t)-u_\lambda(\cdot,t)\right)}{\partial t},\rho_\lambda(\cdot,t)\right)+B\left(u(\cdot,t)-u_\lambda(\cdot,t),\rho_\lambda(\cdot,t)\right)\\&\leq C\left(\left\|\rho_\lambda(\cdot,t)\right\|_{H_0^1(\Omega)}\left\|\varphi\left(u_\lambda(\cdot,t)\right)\right\|_{H_0^1(\Omega)}+\left\|\varphi\left(u_\lambda(\cdot,t)\right)\right\|_{H_0^1(\Omega)}^2\right)\end{aligned}$$

在$[0,T]$上几乎处处成立。对上面这个不等式两边从$\tau=0$到$\tau=t$进行积分，联立(20)和(28)，可得：

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\left(\rho_\lambda(\cdot,t),\rho_\lambda(\cdot,t)\right)+\int_0^t B\left(\rho_\lambda(\cdot,\tau),\rho_\lambda(\cdot,\tau)\right)\mathrm{d}\tau\\&\leq\int_0^t\left(\frac{\partial\left(\psi\left(u_\lambda(\cdot,\tau)\right)\right)}{\partial\tau},\rho_\lambda(\cdot,\tau)\right)\mathrm{d}\tau+\int_0^t B\left(\psi\left(u_\lambda(\cdot,\tau)\right),\rho_\lambda(\cdot,\tau)\right)\mathrm{d}\tau\\&\quad+\left\|\rho_\lambda\right\|_{L^2\left([0,T]:H_0^1(\Omega)\right)}\left\|\varphi\left(u_\lambda\right)\right\|_{L^2\left([0,T]:H_0^1(\Omega)\right)}+\left\|\varphi\left(u_\lambda\right)\right\|_{L^2\left([0,T]:H_0^1(\Omega)\right)}^2\end{aligned}\tag{36}$$

在$[0,T]$上几乎处处成立。再根据(15)定义的Ω_I^t与$\Omega_{II}^t N$，(26)定义的ρ以及(27)定义的ψ，可以推出：

$$\left(\psi\left(u_\lambda(\cdot,t)\right),\frac{\partial\rho_\lambda(\cdot,t)}{\partial t}\right)=\int_{\Omega_I^t}\psi\left(u_\lambda(x,t)\right)\frac{\partial\left(u(x,t)-u_*(x,t)\right)}{\partial t}\mathrm{d}x=\left(\psi\left(u_\lambda(\cdot,t)\right),\frac{\partial\left(u(\cdot,t)-u_*(\cdot,t)\right)}{\partial t}\right)$$

在$[0,T]$上几乎处处成立。由此可得：

$$\begin{aligned}&\int_0^t\left(\frac{\partial\psi\left(u_\lambda(x,\tau)\right)}{\partial t},\rho_\lambda(x,\tau)\right)\mathrm{d}\tau\\&=\left(\psi\left(u_\lambda(\cdot,t)\right),\rho_\lambda(\cdot,t)\right)-\int_0^t\left(\psi\left(u_\lambda(x,\tau)\right),\frac{\partial\rho_\lambda(x,\tau)}{\partial t}\right)\mathrm{d}\tau\\&=\left(\psi\left(u_\lambda(\cdot,t)\right),\rho_\lambda(\cdot,t)\right)-\int_0^t\left(\psi\left(u_\lambda(x,\tau)\right),\frac{\partial\left(u(x,\tau)-u_*(x,\tau)\right)}{\partial t}\right)\mathrm{d}\tau\\&\leq\left\|\psi\left(u_\lambda\right)\right\|_{L^\infty\left([0,T]:L^2(\Omega)\right)}\left\|\rho_\lambda\right\|_{L^\infty\left([0,T]:L^2(\Omega)\right)}+C\left\|\psi\left(u_\lambda(\cdot,t)\right)\right\|_{L^r(Q)}\left(\left\|\frac{\partial u(\cdot,t)}{\partial t}\right\|_{L^s(Q)}+\left\|\frac{\partial u_*(\cdot,t)}{\partial t}\right\|_{L^s(Q)}\right)\end{aligned}$$

在$[0,T]$上几乎处处成立，其中$r=\frac{1}{k}+1$，$s=k+1$。再根据假设3，通过上述不等式，利用(32)和引理3以及(11)，推出：

$$\begin{aligned}&\int_0^t\left(\frac{\partial\psi\left(u_\lambda\left(x,\tau\right)\right)}{\partial t},\rho_\lambda\left(x,\tau\right)\right)\mathrm{d}\tau\\&\le C\left\|\varphi\left(u_\lambda\right)\right\|_{L^\infty\left([0,T];L^2(\Omega)\right)}\left\|\rho_\lambda\right\|_{L^\infty\left([0,T];L^2(\Omega)\right)}+\left\|\varphi\left(u_\lambda\right)\right\|_{L^r(Q)}\end{aligned}\tag{37}$$

在$[0,T]$上几乎处处成立。根据引理4中的(33)，得到：

$$\begin{aligned}\int_0^t B\left(\psi\left(u_\lambda\left(x,\tau\right)\right),\rho_\lambda\left(x,\tau\right)\right)\mathrm{d}\tau&\le C\left\|\psi\left(u_\lambda\right)\right\|_{L^2\left([0,T];H_0^1(\Omega)\right)}\left\|\rho_\lambda\right\|_{L^2\left([0,T];H_0^1(\Omega)\right)}\\&\le C\left\|\varphi\left(u_\lambda\right)\right\|_{L^2\left([0,T];H_0^1(\Omega)\right)}\left\|\rho_\lambda\right\|_{L^2\left([0,T];H_0^1(\Omega)\right)}\end{aligned}\tag{38}$$

在$[0,T]$上几乎处处成立。将(37)以及(38)代入(36)，并且利用引理1和引理2中的(13)和(24)，得到：

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\left(\rho_\lambda\left(\cdot,t\right),\rho_\lambda\left(\cdot,t\right)\right)+\int_0^t B\left(\rho_\lambda\left(x,\tau\right),\rho_\lambda\left(x,\tau\right)\right)\mathrm{d}\tau\\&\le C\left\{\left(\left\|\varphi\left(u_\lambda\right)\right\|_{L^\infty\left([0,T];H_0^1(\Omega)\right)}+\left\|\varphi\left(u_\lambda\right)\right\|_{L^2\left([0,T];H_0^1(\Omega)\right)}\right)\left(\left\|\rho_\lambda\right\|_{L^2\left([0,T];H_0^1(\Omega)\right)}+\left\|\rho_\lambda\right\|_{L^\infty\left([0,T];L^2(\Omega)\right)}\right)\right.\\&\quad\left.+\left\|\varphi\left(u_\lambda\right)\right\|^2_{L^2\left([0,T];H_0^1(\Omega)\right)}+\left\|\varphi\left(u_\lambda\right)\right\|_{L^r(Q)}\right.\\&\le C\left\{\left(\frac{1}{\lambda^k}+\lambda\varepsilon\right)^{\frac{1}{2}}\left(\left\|\rho_\lambda\right\|_{L^2\left([0,T];H_0^1(\Omega)\right)}+\left\|\rho_\lambda\right\|_{L^\infty\left([0,T];L^2(\Omega)\right)}\right)+\left(\frac{1}{\lambda^k}+\lambda\varepsilon\right)+\left(\frac{1}{\lambda^k}+\varepsilon\right)\right\}\end{aligned}\tag{39}$$

在$[0,T]$上几乎处处成立。再有

$$\begin{aligned}&\left(\left\|\rho_\lambda\right\|_{L^\infty\left([0,T];L^2(\Omega)\right)}+\left\|\rho_\lambda\right\|_{L^\infty\left([0,T];H_0^1(\Omega)\right)}\right)^2\\&\le C\left(\frac{1}{2}\left\|\rho_\lambda\right\|^2_{L^\infty\left([0,T];L^2(\Omega)\right)}+\left\|\rho_\lambda\right\|^2_{L^\infty\left([0,T];H_0^1(\Omega)\right)}\right)\\&\le C\left(\frac{1}{2}\left(\rho_\lambda\left(\cdot,t\right),\rho_\lambda\left(\cdot,t\right)\right)+\int_0^t B\left(\rho_\lambda\left(x,\tau\right),\rho_\lambda\left(x,\tau\right)\right)\mathrm{d}\tau\right)\end{aligned}\tag{40}$$

在$[0,T]$上几乎处处成立。将上面(39)代入(40)，得出：

$$\begin{aligned}&\left(\left\|\rho_\lambda\right\|_{L^\infty\left([0,T];L^2(\Omega)\right)}+\left\|\rho_\lambda\right\|_{L^\infty\left([0,T];H_0^1(\Omega)\right)}\right)^2\\&\le C\left\{\left(\frac{1}{\lambda^k}+\lambda\varepsilon\right)^{\frac{1}{2}}\left(\left\|\rho_\lambda\right\|_{L^2\left([0,T];H_0^1(\Omega)\right)}+\left\|\rho_\lambda\right\|_{L^\infty\left([0,T];L^2(\Omega)\right)}\right)+\left(\frac{1}{\lambda^k}+\lambda\varepsilon\right)\right\}\end{aligned}\tag{41}$$

上述(41)可以写为$y^2\le C\left(zy+z^2\right)$的形式，即：

$$\left(y-\frac{Cz}{2}\right)^2\le Cz^2+\frac{C^2z^2}{4}\tag{42}$$

因此$y\le Cz$。将y和Z替换为$\left\|\rho_\lambda\right\|_{L^2\left([0,T];H_0^1(\Omega)\right)}+\left\|\rho_\lambda\right\|_{L^\infty\left([0,T];L^2(\Omega)\right)}$以及$\left(\frac{1}{\lambda^k}+\lambda\varepsilon\right)^{\frac{1}{2}}$，(42)就可以重写为：

$$\left\|\rho_\lambda\right\|_{L^2\left([0,T];H_0^1(\Omega)\right)}\left\|\rho_\lambda\right\|_{L^\infty\left([0,T];L^2(\Omega)\right)} \le C\left(\frac{1}{\lambda^k}+\lambda\varepsilon\right)^{\frac{1}{2}} \tag{43}$$

最后，我们根据上述(24)、(37)、(38)和(43)以及引理 1、引理 2，得到：

$$\begin{aligned}
&\left\|u-u_\lambda\right\|_{L^2\left([0,T];H_0^1(\Omega)\right)}+\left\|u-u_\lambda\right\|_{L^\infty\left([0,T];L^2(\Omega)\right)} \\
&\le \left\|\rho_\lambda\right\|_{L^2\left([0,T];H_0^1(\Omega)\right)}+\left\|\rho_\lambda\right\|_{L^\infty\left([0,T];L^2(\Omega)\right)}+\left\|\varphi\left(u_\lambda\right)\right\|_{L^2\left([0,T];H_0^1(\Omega)\right)}+\left\|\varphi\left(u_\lambda\right)\right\|_{L^\infty\left([0,T];L^2(\Omega)\right)} \\
&\le C\left(\frac{1}{\lambda^k}+\lambda\varepsilon\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

我们即得出了定理 1 中的(12)。□

这样的话，我们最后就证明了给定惩罚方程的解收敛于变分不等式的解，且根据定理 1 得到了收敛速度为 $O\left(\left(\frac{1}{\lambda^k}+\lambda\varepsilon\right)^{1/2}\right)$，其中 λ 是惩罚参数，且当 k 很大时，只需要一个较小的 $\lambda>1$ 就可以达到很高的近似精度。

参考文献

[1] Lions, J.L. and Stampacchia, G. (1967) Variational Inequalities. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **20**, 493-519. https://doi.org/10.1002/cpa.3160200302

[2] Karamardian, S. (1971) Generalized Complementarity Problem. *Journal of Optimization Theory and Applications*, **8**, 161-168. https://doi.org/10.1007/BF00932464

[3] Huang, Y.S. and Zhou, Y.Y. (2003) Finite-Dimensional Approximation for a Class of Elliptic Obstacle Problems. *Nonlinear Analysis*: *Theory*, *Methods & Applications*, **52**, 1745-1754. https://doi.org/10.1016/S0362-546X(02)00292-4

[4] Bergounioux, M. (1997) Use of Augmented Lagrangian Methods for the Optimal Control of Obstacle Problems. *Journal of Optimization Theory and Applications*, **95**, 101-126. https://doi.org/10.1023/A:1022635428708

[5] Wang, S. and Huang, C.-S. (2008) A Power Penalty Method for Solving a Nonlinear Parabolic Complementarity Problem. *Nonlinear Analysis*: *Theory*, *Methods & Applications*, **69**, 1125-1137. https://doi.org/10.1016/j.na.2007.06.014

[6] Rodrigues, J.F. (1987) Obstacle Problems in Mathematical Physics. North-Holland Publishing, Amsterdam.

[7] Li, W. and Wang, S. (2009) Penalty Approach to the HJB Equation Arising in European Stock Option Pricing with Proportional Transaction Costs. *Journal of Optimization Theory and Applications*, **143**, 279-293. https://doi.org/10.1007/s10957-009-9559-7

[8] Duan, Y., Wu, P. and Zhou, Y. (2023) Penalty Approximation Method for a Double Obstacle Quasilinear Parabolic Variational Inequality Problem. *Journal of Industrial and Management Optimization*, **19**, 1770-1789. https://doi.org/10.3934/jimo.2022017

[9] Wang, S. (2018) An Interior Penalty Method for a Large-Scale Finite-Dimensional Nonlinear Double Obstacle Problem. *Applied Mathematical Modelling*, **58**, 217-228. https://doi.org/10.1016/j.apm.2017.07.038

[10] Zhou, Y.Y., Wang, S. and Yang, X.Q. (2014) A Penalty Approximation Method for a Semilinear Parabolic Double Obstacle Problem. *Journal of Global Optimization*, **60**, 531-550. https://doi.org/10.1007/s10898-013-0122-6

[11] Wang, F. and Cheng, X.L. (2008) An Algorithm for Solving the Double Obstacle Problems. *Applied Mathematics and Computation*, **201**, 221-228. https://doi.org/10.1016/j.amc.2007.12.015

[12] Konnov, I.V. (2014) Application of the Penalty Method to Nonstationary Approximation of an Optimization Problem. *Russian Mathematics*, **58**, 49-55. https://doi.org/10.3103/S1066369X14080064

[13] Kashiwabara, T., Oikawa, I. and Zhou, G. (2016) Penalty Method with P1/P1 Finite Element Approximation for the Stokes Equations under the Slip Boundary Condition. *Numerische Mathematik*, **134**, 705-740. https://doi.org/10.1007/s00211-016-0790-5

[14] Zhou, G., Kashiwabara, T. and Oikawa, I. (2017) A Penalty Method for the Time-Dependent Stokes Problem with the Slip Boundary Condition and Its Finite Element Approximation. *Applications of Mathematics*, **62**, 377-403. https://doi.org/10.21136/AM.2017.0328-16

[15] Zhao, J.X. and Wang, S. (2019) A Power Penalty Approach to a Discretized Obstacle Problem with Nonlinear Con-

straints. *Optimization Letters*, **13**, 1483-1504. https://doi.org/10.1007/s11590-018-1354-7

[16] Chen, W. and Wang, S. (2014) A Penalty Method for a Fractional Order Parabolic Variational Inequality Governing American Put Option Valuation. *Computers & Mathematics with Applications*, **67**, 77-90. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2013.10.007

[17] Chen, W. and Wang, S. (2017) A Power Penalty Method for a 2D Fractional Partial Differential Linear Complementarity Problem Governing Two-Asset American Option Pricing. *Applied Mathematics and Computation*, **305**, 174-187. https://doi.org/10.1016/j.amc.2017.01.069

[18] Duan, Y., Wang, S. and Zhou, Y. (2021) A Power Penalty Approach to a Mixed Quasilinear Elliptic Complementarity Problem. *Journal of Global Optimization*, **81**, 901-918. https://doi.org/10.1007/s10898-021-01000-7

[19] Goeleven, D., Motreanu, D., Dumont, Y. and Rochdi, M. (2003) Variational and Hemivariational Inequalities Theory, Methods, and Applications-Volume I: Unilateral Analysis and Unilateral Mechanics. Springer, New York, 1-205. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-8610-8_2