Pure Mathematics 理论数学, 2024, 14(2), 606-611
Published Online February 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.142059

鸡兔同笼问题“假设法”的由来

鹿　璐

新疆师范大学数学科学学院，新疆 乌鲁木齐

收稿日期：2024年1月4日；录用日期：2024年1月23日；发布日期：2024年2月29日

摘　要

“鸡兔同笼”问题最早可追溯至古代经典《孙子算经》，其独特的数学魅力使得许多小学算术应用题都可以转化为此类问题，而其经典的解法——“假设法”更是被广泛应用。然而，在当前的教学设计中，我们常常直接告诉学生使用“假设法”来解答这类问题，却忽视了对其背后的逻辑和原理的深入探讨。这种做法显然与“数学需要理解”的核心学习观念背道而驰。因此，本文旨在通过揭示“直观画图”和“直接算式”中所隐含的“假设法”思想，进一步明确和深化对“假设法”的理解和应用，从而为解决“鸡兔同笼”问题提供更为全面和深入的视角。

关键词

鸡兔同笼，假设法

Origin of “Hypothesis Method” for Chicken and Rabbit in the Same Cage

Lu Lu

School of Mathematical Sciences, Xinjiang Normal University, Urumqi Xinjiang

Received: Jan. 4th, 2024; accepted: Jan. 23rd, 2024; published: Feb. 29th, 2024

Abstract

The problem of “chicken and rabbit in the same cage” can be traced back to ancient classical Sun Tzu’s Arithmetic Classics. Its unique mathematical charm makes many primary school arithmetic application problems can be transformed into such problems, and its classical solution “hypothesis method” is widely used. However, in the current instructional design, we often tell students to use “hypothesis” to solve such problems directly, but neglect the in-depth discussion of the logic and principle behind it. This practice obviously runs counter to the core learning concept of “mathematics needs to be understood.” Therefore, this paper aims to further clarify and deepen the

文章引用: 鹿璐. 鸡兔同笼问题“假设法”的由来[J]. 理论数学, 2024, 14(2): 606-611.
DOI: 10.12677/pm.2024.142059

understanding and application of “hypothesis method” by revealing the idea of “hypothesis method” implied in “visual drawing” and “direct formula,” so as to provide a more comprehensive and in-depth perspective for solving the problem of “chicken and rabbit in the same cage.”

Keywords

Chicken and Rabbit in the Same Cage, Hypothesis Method

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

1. 问题提出

在我国小学和初中数学课程中，“鸡兔同笼”问题作为问题解决的典型内容，以不同形式呈现。在《全日制义务教育教学课程标准(实验稿)》和《义务教育课程标准(2011 年版)》中，都以案例或例题形式提及[1]。

本节课选自人教版四年级下册数学广角，四年级的学生在学习“鸡兔同笼”问题之前，已经具备了加减乘除法、逐一尝试法、列表法解决数学问题的能力。解答鸡兔同笼问题的典型算术方法是“假设法”，诸多教学设计直接开门见山“告诉”学生用“假设法”解答而不分析其缘由，这显然违背了“数学需要理解”这样的基本学习观。那么，老师理应从学生原有的认知基础出发，自然而然地生长出新知“假设法”。让我们一起来探究吧！

2. 问题分析

问题 1 大约在 1500 年前，我国古代数学名著《孙子算经》中记载的一道数学趣题：“鸡兔同笼”问题。题目是“今有雉兔同笼，上有三十五头，下有九十四足，问雉兔各几何？”同学们会求解这道题吗？

生 1：可以用代数方法求解，设鸡有 x 只，兔有 $(35-x)$ 只。

生 2：可以设鸡有 x 只，兔有 y 只。

生 3：先假设 35 个头全是鸡。

师：以上三位同学的算法各有特点，前两位同学用代数的方法列一元一次方和二元一次方程组进行求解，但对没有系统学习代数知识的小学生而言，如何设未知数，如何找相等数量关系，尤其是如何解这么一个方程都有相当的难度[2]。第三位同学用算术的方法，也称“假设法”。对于小学四年级的学生来说，为什么全部假设鸡或兔？这个思路是如何产生的？“假设法”从何而来？[3]

师：接下来，让我们一起来看“假设法”是怎么来的。先从小学生喜闻乐见的“画图”开始吧！

例题 1 鸡兔同笼共有 10 个头，32 只足，问鸡兔各几只？

生 1：先画 2 只足的鸡，再添 $1,2,\cdots,12$ 足。

生 2：每只先画一足，再逐一添加。

生 3：先画 4 只足的兔，再删掉 $1,2,\cdots,8$ 足。

生 4：我想先画一只鸡，再画一只兔，边画边数或画完再数，在不断的调整中，使得刚好足是 32 个就可以。

生 5：我既不想画鸡，也不想画兔，想画“三脚怪”。

我们将所有学生探究的情况归为以下 4 种情况：

1) 先画两只足的鸡(如图 1)

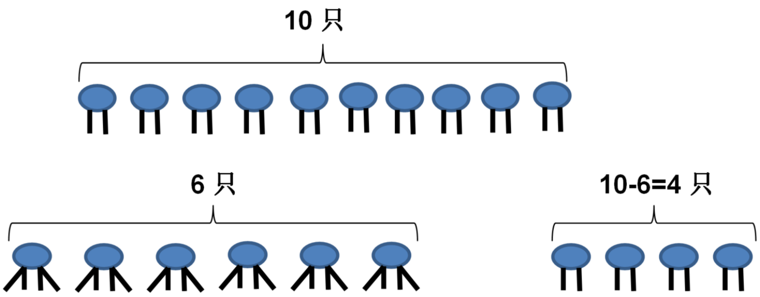

Figure 1. Schematic 1
图 1. 示意图 1

总共添加了$10\times 2=20$只足，还剩余$32-20=12$只足，需要继续添加，把 12 只足添加到这 10 只鸡上，1 只鸡添 2 只足，总共 12 足，则添了$12\div 2=6$只鸡，此时 6 只鸡变成了兔(数一数或算一算)。

2) 先画 4 只足的兔(如图 2)

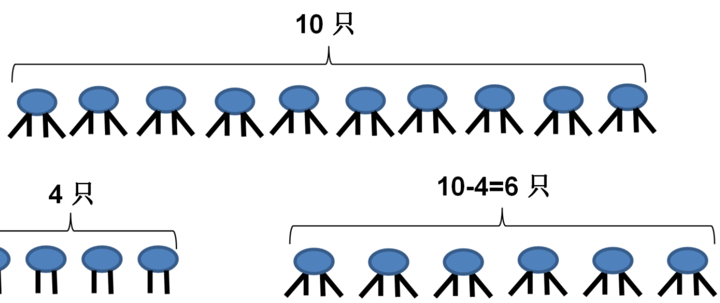

Figure 2. Schematic 2
图 2. 示意图 2

总共添了$10\times 4=40$只足，多画了$40-32=8$足，需要把 8 只足删掉，1 只兔删 2 足，总共 8 足，则需删了$8\div 2=4$只兔，此时 4 只兔变成了鸡。

3) 既画鸡，又画兔(如图 3)

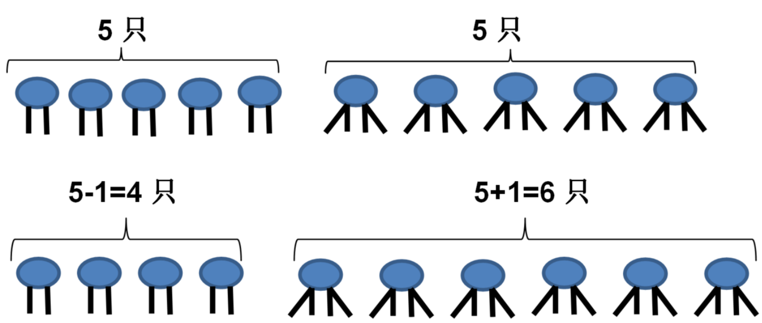

Figure 3. Schematic 3
图 3. 示意图 3

画 5 只鸡 5 只兔总共添加了$5\times 2+5\times 4=30$足，还剩余 2 只足，需继续添加，1 鸡添加 2 足，总共 2

足，则添了 $2\div2=1$ 只鸡，此时 1 只鸡变成兔。兔的数量为 $5+1=6$ 只，鸡的数量为 $5-1=4$ 只。

4) 全画“三脚怪”(如图 4)

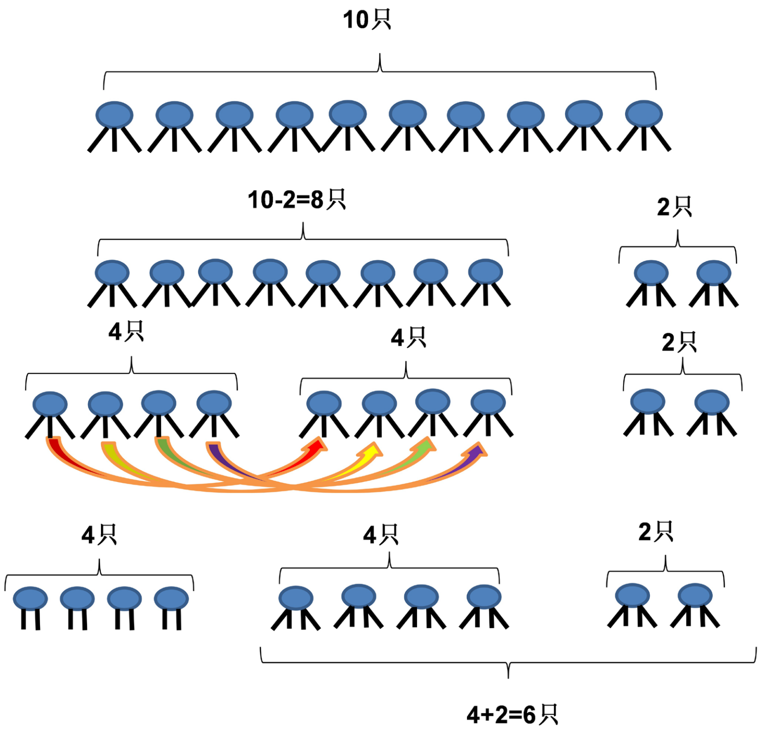

Figure 4. Schematic 4
图 4. 示意图 4

共添加了 $10\times3=30$ 只足，剩余 $32-30=2$ 足，需将 2 足继续添加，1 只“3 脚怪”添 1 足变兔，则添了 $2\div1=2$ 只“三脚怪”，此时 2 只“三脚怪”变成了兔。还剩余 $10-2=8$ 只“三脚怪”。我们发现 2 只“三脚怪”通过调整，恰好得到 1 只鸡和 1 只兔，那么 8 只“三脚怪”通过调整怜好得到 4 只鸡和 4 只兔。

师：回到问题 1，鸡兔同笼共 35 个头，94 只足，问鸡和兔各多少只？同学们会做吗？

生 1：会啊！先画 35 个头，再添足呗，不过这很麻烦。

师：当鸡和兔的头与足数比较多时，“直接画图”非常繁琐。同学们可从尝试在头脑中“想象图形”，然后把头脑中“想象图形”的每个步骤翻译成算式求解问题 1 (图示思维的简化)。

1) 想象全部画成 2 只足的鸡

添加 $35\times2=70$ 只足，还剩余 $94-70=24$ 只足，需要继续添加，(1 只鸡比 1 只兔少 2 足，24 只足添加到多少鸡上面呢？) 1 只鸡添 2 只足，总共 24 只足，添加 $24\div2=12$ 只鸡上面，此时 12 只鸡变成兔，则鸡有 $35-12=23$ 只。

2) 想象全部画成 4 只足的兔

添加 $35\times4=140$ 只足，多了 $140-94=46$ 只足，需要把 46 只足删掉。一只兔删 2 足，共 46 足，需删 $46\div2=23$ 只兔，使得 23 只兔变成鸡，则兔有 $35-23=12$ 只。

3) 想象既画兔，又画鸡(20 只鸡，15 只兔)

添加 $20\times2+15\times4=100$ 只足，多了 $100-94=6$ 只足，需要把 6 只足删掉。1 只兔删 2 足，共 6 足，需删 $6\div2=3$ 只兔，使得 3 只兔变成鸡，则鸡有 $20+3=23$ 只，兔有 $15-3=12$ 只。

4) 想象全部画成“三脚怪”

添加$35\times3=105$足，多了$105-94=11$只足，需要把 11 只足删掉。1“三脚怪”删 1 只足，共 11 足，需删$11\div1=11$只“三脚怪”，使得 11 只“三脚怪”变成鸡。此时，还剩余$35-11=24$只“三脚怪”，通过调整，恰好得到$24\div2=12$只鸡和兔，则鸡有$11+12=23$只，兔有 12 只。

我们前面用直观画图的方法解答“鸡兔同答”问题时，先在每个“□”下面添加 2 个“|”，或者用想象画图的方式，先想象全部画成 2 只足的鸡。这两种方法，实际隐含着“所有头都是鸡的头”，也就是在自己的思维过程中做一个不自觉的假设，即已经假设笼子里装的都是 2 只足的鸡。这是一个隐性假设(潜在假设)。

我们要将“直观画图”和“直接算式”中所隐含的“潜在假设”思想显性化，也就是用“假设法”解答“鸡兔同笼”问题。即① 假设全是鸡；② 假设全是兔；③ 假设既有鸡，又有兔；④ 假设全是“三脚怪”。通过以上四个步骤，我们可以将“潜在假设”思想显性化，从而更好地理解和解决“鸡兔同笼”这类问题。

基于以上分析可以看出，“鸡兔同笼”问题的“假设法”源于小学生喜闻乐见的“画图”过程，即先画鸡、先画兔、既画鸡又画兔或画三脚怪。这表明任何巧妙的解法都不是凭空产生的，而应该基于学生已有的知识和经验，建立新旧知识之间的联系，从而实现真正的“理解学习”。

3. 实际应用

在数学问题解决中，“假设法”作为一种通用的解题思维，具有广泛的普适性。它不仅仅局限于“鸡兔同笼”这类经典问题，而是可以应用于各种数学问题的解决过程中。通过设立合适的假设条件，我们可以将复杂的问题简化为更易于理解和处理的形式，从而找到问题的解决方案。

师：你能求解下例问题吗？

变式 1 小明和妈妈去市场买水果，已知香蕉 5 元/斤，苹果 8 元/斤，共买 10 斤，花 62 元，那么香蕉和苹果各买多少斤？

1) 假设全买香蕉

共花$10\times5=50$元，剩余$62-50=12$元，已知 1 斤香蕉比 1 斤苹果便宜$8-5=3$元，即苹果：$12\div3=4$斤，香蕉：$10-4=6$斤。

2) 假设全买苹果

共花$10\times8=80$元，多花$80-62=18$元，已知 1 斤苹果比 1 斤香蕉贵$8-5=3$元，所以香蕉：$18\div3=6$斤，苹果：$10-6=4$斤。

3) 假设既买香蕉，又买苹果

假设买 5 斤香蕉，5 斤苹果。共花$5\times5+5\times8=65$元，多花$65-62=3$元，已知 1 斤苹果比 1 斤香蕉贵$8-5=3$元，所以将$3\div3=1$斤苹果变香蕉，则香蕉有$5+1=6$斤，苹果有$5-1=4$斤。

4) 假设全买 7 元/斤水果

共花$10\times7=70$元，多花$70-62=8$元，需将多出的 8 元减去，因为$7-2=5$，$7+1=8$，所以需减$8\div2=4$。

通过调整，3 个“7”恰好得到 1 个“5”和 2 个“8”。共 6 个“7”通过调整，可恰好得到 2 个“5”和 4 个“8”。所以“5”有$4+2=6$个，“8”有 4 个，则苹果有 4 斤，香蕉有 6 斤。

5) 假设全买 6 元/斤水果

共花$10\times6=60$元，剩余$62-60=2$元，将剩余 2 元加上。因为$6-1=5$，$6+2=8$，所以需加上$2\div2=1$。

还剩余 9 个“6”，通过调整，3 个“6”怜好得到 2 个“5”和 1 个“8”。共有 9 个“6”，通过调整，

恰好得到2×3个“5”，1×3个“8”。所以“5”有6个，“8”有$1+3=4$个，则香蕉有6斤，苹果有4斤。

变式2 一堆2分和5分硬币共39板，总价值1.5元，那么2分和5分各多少枚?

1) 假设全是2分

共$39\times2=78$分，剩余$150-78=72$分，已知1枚2分比1枚5分少$5-2=3$分，1枚2分添3分，共添72分，则添了$72\div3=24$枚，将24枚“2分”变“5分”，则“5分”有24枚，“2分”有$39-24=15$枚。

2) 假设全是5分

共$39\times5=195$分，多了$195-150=45$分，需将45分减去，已知1枚“5分”比1枚“2分”多3分。1枚“5分”减去3分，共减45分，则减去了$45\div3=15$枚，将15枚“5分”变“2分”，则“2分”有15枚，“5分”有$39-15=24$枚。

3) 假设既有2分，又有5分

假设有20枚2分，19枚5分。共$20\times2+19\times5=135$分，剩余$150-135=15$分，需将15分继续添加。1枚“2分”添加3分，共添加15分，则添了$15\div3=5$枚，将5枚“2分”变“5分”，则“2分”有$20-5=15$枚，“5分”有$19+5=24$枚。

4) 假设全是3分

共$39\times3=117$分，少了$150-117=33$分，需将33分继续添加。已知$3-1=2$，$3+2=5$，1枚“3分”加2分，共加33分，则添了$33\div2=16\cdots1$。16枚余“1分”，将剩余的“1分”添加到第17枚“3分”上变“4分”。

将剩余22枚“3分”中取出1枚“3分”，$3-1=2$分，$4+1=5$分。“3分”减1分变“2分”，“4分”加1分变“5分”。将21枚分$21\div3=7$组，通过调整3个“3”恰好得到2个“2”和1个“5”。所从21个“3”可恰好得到$2\times7=14$个“2”，$1\times7=7$个“5”，则“2分”硬币有$14+1=15$枚，“5分”硬币有$7+16+1=24$枚。

5) 假设全是4分

共$39\times4=156$，多了$156-150=6$分，需将6分减去。已知$4-2=2$，1枚“4分”减2分，共减6分，则减去了$6\div2=3$枚，将3枚“4分”变“2分”。剩余$39-3=36$枚“4分”。

将36枚分$36\div3=12$组，通过调整3个“4”恰好得到1个“2”和2个“5”，则36个“4”刚好得到$1\times12=12$个“2”，$2\times12=24$个“5”。所以，“2分”硬币有$12+3=15$枚，“5分”硬币有24枚。

通过以上两道应用题，我们可以观察到“假设法”在解决数学问题时具有广泛的适用性。这种方法具有以下特点：① 已知两个未知变量的总数；② 这两个未知量之间存在一定的数量关系。对于这类应用题，我们都可以采用“假设法”来寻求解答。

4. 总结

鸡兔同笼问题有多种解法，教师在教学中常常忽视学生的出声思维，直接告诉式地给学生讲解假设法，这样的设计显然不符合学生的认知规律。从直观画图到想象画图再到假设法，让学生在自己的思维中埋下了隐性假设。最后通过两道变式，同学们可以感受生活中的“鸡兔同笼”问题，数学知识源于生活又反作用于生活。让学生感受问题的变式，既开阔了学生的视野，又利于学生思维的发展。

参考文献

[1] 郜舒竹. 鸡兔同笼问题中的辩证思维[J]. 课程.教材.教法, 2019, 39(9): 88-93.

[2] 施银燕. “鸡兔同笼”问题的另类教学[J]. 人民教育, 2009(7): 35-39.

[3] 杨军. 追根溯源: 数学中的为什么[M]. 西安: 世界图书出版西安有限公司, 2016: 32-37.