Pure Mathematics 理论数学, 2024, 14(2), 799-806
Published Online February 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.142077

具有正面积边界的相对紧Siegel盘

孙丹隽，曲宏宇

北京邮电大学理学院，北京

收稿日期：2024年1月5日；录用日期：2024年1月31日；发布日期：2024年2月29日

摘 要

Pérez-Marco用管状黎曼曲面构造了具有C^∞边界的相对紧Siegel盘。Chéritat改进了此技术，并且构造了具有伪圆边界的相对紧Siegel盘。本文基于此技术构造了具有正面积边界相对紧Siegel盘的全纯映射。给出的例子定义域为复平面的子集。

关键词

Siegel盘，正面积边界，全纯芽

Relatively Compact Siegel Disks with Boundaries of Positive Area

Danjun Sun, Hongyu Qu

School of Science, Beijing University of Posts and Telecommunications, Beijing

Received: Jan. 5^{th}, 2024; accepted: Jan. 31^{st}, 2024; published: Feb. 29^{th}, 2024

Abstract

Pérez-Marco used tube-log Riemann surfaces to construct relatively compact Siegel

文章引用: 孙丹隽, 曲宏宇. 具有正面积边界的相对紧Siegel盘[J]. 理论数学, 2024, 14(2): 799-806.
DOI: 10.12677/pm.2024.142077

disks with C^∞ boundaries. Chéritat developed the technique and constructed relatively compact Siegel disks with pseudo-cirle boundaries. In this paper, based on the technique, we construct holomorphic maps with relatively compact Siegel disks whose boundaries have positive area. The examples are defined on a subset of $\mathbb{C}$.

Keywords

Siegel Disk, Boundary of Positive Area, Holomorphic Germ

1. 背景介绍

令$f(z) = e^{2\pi i\alpha}z + O(z^2), \alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$为以原点为无理中性不动点的全纯映射.我们称$f$在原点处可局部线性化，若$f$在原点附近解析共轭于某个旋转变换$z \mapsto e^{2\pi i\alpha}z$，即存在原点的邻域$U$以及定义在$U$上的单叶解析函数$\phi$满足$\phi \circ f \circ \phi^{-1}(z) = e^{2\pi i\alpha}z$.局部线性化问题和$\alpha$的数值性质紧密相关.相关内容可参考 [1–8].

定义1. *若f在原点处可局部线性化，则称上述共轭成立的最大区域为f以原点为中心的Siegel盘.*

Siegel盘内各点在f迭代下的轨道落在同心圆在ϕ下的原象上。只有当Siegel盘紧包含于f的定义域内时，f的动力系统才是非平凡的.在这种情况下，Siegel盘的边界是值得研究的对象.首先，该边界显然不是解析曲线.然而，全纯映射具有C^∞光滑边界的Siegel盘的例子已由Pérez-Marco、Avila、Buff、Chéritat等给出，详见 [9, 10].特别地，Avila、Buff和Chéritat给出的例子是二次多项式的情形，该结果十分令人惊奇.另外，在 [11]中Buff和Chéritat构造了具有C^n但非C^{n+1}的边界的Siegel盘.本文主要关注边界可以有多么复杂.在这方面，有Chéritat先构造出了具有局部不连通的边界的Siegel盘的例子，也就是其边界为所谓的伪圆，参考 [12].然而，仍没有从测度论角度研究Siegel盘边界复杂程度的例子[1].基于此，本文构造具有正面积边界的相对紧Siegel盘的例子.结论可由如下定理给出：

主要定理. *存在定义在包含原点的复平面$\mathbb{C}$的单连通开子集上的单叶全纯函数f，满足f以原点为不动点，且在原点处有边界的面积为正数的相对紧Siegel盘$\triangle$.*

1 关于Julia集的面积及Hausdorff维数的某些问题已得到研究.在 [13]中，Biswas构造了正面积的刺猬(hedgehogs)，即不可局部线性化的无理中心不动点处的Julia集的完全不变子集.一些其他的关于Julia集及其子集的Hausdorff维数和面积问题的研究可以参考 [14, 15].

2. 一般构造过程

本节致力于回顾由Pérez-Marco建立、Chéritat改进的用于构造具有相对紧Siegel盘的单叶全纯芽的一般方法.此内容不是新的，可参考 [12].

在提升的坐标下的情形. 沿用Chéritat的习惯，我们先在提升的坐标下操作. 我们需要如下记号:

(1) 令$\mathrm{dom}(f)$表示f的定义域；

(2) 定义$E(z) := \exp(2\pi iz)$，则E为从$\mathbb{C}$到$\mathbb{C}^*$的万有覆盖并且诱导了一个从无穷柱筒面$\mathbb{C}/\mathbb{Z}$到$\mathbb{C}^*$的同构.分别用$+i\infty$和$-i\infty$表示$\mathbb{C}/\mathbb{Z}$“上端”和“下端”，其中任何一个都可以看做∞补充到$\mathbb{C}/\mathbb{Z}$使得$\{\infty\} \cup \mathbb{C}/\mathbb{Z}$同构于$\mathbb{C}$；

(3) 令$\mathbb{H}_h$表示上半平面$\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im} z > h\}$，其中$\mathrm{Im} z$表示$z$的虚部.特别地，$\mathbb{H}_0$也写作$\mathbb{H}$；

(4) 令T_v表示距离为v的平移；

(5) 令$\mathcal{H}$表示由导数恒不为零，且满足与T_1可交换，并且把上端的某个邻域共形映射到某个上半平面的全纯映射$\mathcal{R}$的全体所构成的集合.注意到对所有的$\mathcal{R} \in \mathcal{H}$，当$\mathrm{Im} z \to +\infty$时有$\mathcal{R}(z) = z + c + o(1)$，其中$c$为常数.

给定正整数序列$\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$和$\mathcal{H}$中元素构成的序列$\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$，我们设

(6) $\mathcal{R}_n = q_n\beta_n$，

(7) $X_n = \mathcal{R}_1^* \dots \mathcal{R}_n^* \vec{\mathbf{1}}$，即$X_n$是向量场$\vec{\mathbf{1}}(z) \equiv 1$在$\mathcal{R}_n \circ \cdots \circ \mathcal{R}_1$映射下的拉回，

(8) G_n为X_n的时间1映射，

(9) $F_n = G_n \circ \cdots \circ G_1$. 容易验证：

(10) $\mathcal{R}_n \circ \cdots \circ \mathcal{R}_1 \circ G_n = T_1 \circ \mathcal{R}_n \circ \cdots \circ \mathcal{R}_1$，

(11) $\frac{1}{q_n \cdots q_1}\mathcal{R}_n \circ \cdots \circ \mathcal{R}_1$ 和T_1可交换，

(12) $(G_n)^{q_n} = G_{n-1}$，故$F_n = (G_n)^{q_n \cdots q_1 \theta_n}$，其中$\theta_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{q_1 \dots q_k}$，

(13) F_n与T_1可交换（在$F_n \circ T_1$和$T_1 \circ F_n$均有定义时），且当$\mathrm{Im}(z)$趋于$+\infty$时有

$$F_n(z) = z + \theta_n + o(1)$$

成立.

引理1 (Chéritat, [12]). *对固定的$n \in \mathbb{N}$，假设对$k = 1, \dots, n-1$给定了$\mathcal{R}_k \in q_k\mathcal{H}$.固定$\beta_n \in \mathcal{H}$，且对$q \in \mathbb{N}^*$令$\mathcal{R}_n = q\beta_n$.则对$\mathrm{dom}(F_{n-1})$的每个紧子集$K$,存在某个充分大的q使得K最终包含于$\mathrm{dom}(F_n)$ 且$|F_n - F_{n-1}| < 1/n$在K上一致成立.*

给定$h > 0$,由引理1可知对任意的$n \in \mathbb{N}^*$，可以选择充分大的q_n使得$\mathrm{dom}(F_n)$包含$\mathbb{H}_{-h-\frac{1}{n}}$且$|F_n - F_{n-1}| < \frac{1}{n}$在$\mathbb{H}_{-h}$上一致成立.进一步地，若$q_n \to \infty$，则$\theta_n$收敛到某个无理数$\theta$.因此由(13)易知$F_n$在$\mathbb{H}_{-h}$上局部一致收敛到全纯映射$F$满足当$\mathrm{Im} z \to +\infty$时有$F(z) = z + \theta + o(1)$.

对任意的$n \in \mathbb{N}^*$，存在上端的邻域D_n使得$\mathcal{R}_n \circ \cdots \circ \mathcal{R}_1$是从$D_n$到某个上半平面的双射.并且由(10)(12)可知, F_n在D_n上共轭于T_{θ_n}，其共轭映射为$z \mapsto \frac{1}{q_1 \cdots q_n}\mathcal{R}_n \circ \cdots \circ \mathcal{R}_1(z)$.

在投影坐标下的情形. 接下来我们把上面的结果应用到E的投影坐标下.注意到由(13)可知F_n诱导了一个定义在$\{0\} \cup E(\mathrm{dom}(F_n))$的全纯投影$f_n$满足

$$E \circ F_n = f_n \circ E, f_n(0) = 0, f_n'(0) = e^{2\pi i\theta_n} \neq 0,$$

且$f_n(z) = 0 \Rightarrow z = 0$. 则可由(11)立即得出$f_n$在$E(D_n) \cup \{0\}$上共轭到角度为$2\pi\theta_n$的旋转. 由于$F_n$在$\mathbb{H}_{-h}$上局部一致收敛到全纯映射$F$满足当$\mathrm{Im}z \to +\infty$时有$F(z) = z+\theta+o(1)$，则$f_n$在$E(\mathbb{H}_{-h}) \cup \{0\}$上局部一致收敛到定义在$E(\mathbb{H}_{-h}) \cup \{0\}$上的全纯映射$f$满足在$\mathbb{H}_{-h}$上有交换关系$f \circ E = E \circ F$.

为了完成构造，我们还需要下面的引理.

引理2 (Chéritat, [12]). 假设$\{f_n\}$是一列定义在包含原点的复平面开子集上的全纯映射.设对所有的$n \in \mathbb{N}^*$，f_n 以原点为不动点且$f_n'(0) = e^{2\pi i\theta_n}$，其中$\theta_n \in \mathbb{R}$且当$n \to +\infty$时有$\theta_n \to \theta \in \mathbb{R}$.假设$\{\widetilde{D}_n\}$是一列包含原点的单连通开集，满足$\widetilde{D}_n \subset \mathrm{dom}(f)$并且$f_n$在$\widetilde{D}_n$上解析共轭于圆盘或复平面上角度为$2\pi\theta_n$的旋转.假设集合列$\{\widetilde{D}_n\}$在*Carathéodory*意义下存在极限$\widetilde{D}$，则$f_n$在$\widetilde{D}$上局部一致收敛到$f$且$f$在$\widetilde{D}$上解析共轭于圆盘或复平面上角度为$\theta$的旋转.

引理3 (Chéritat, [12]). 假设ϕ是从$\mathbb{H}/\mathbb{Z}$到$W \subset \mathbb{C}/\mathbb{Z}$的共形双射且可以延拓到以上端为不动点的共形双射.则存在一列全纯函数$\psi_n : \mathbb{C}/\mathbb{Z} \to \mathbb{C}/\mathbb{Z}$使得：

(14) ψ_n是局部共形的；

(15) $\psi_n - z$在$\mathrm{Im}z \to +\infty$时存在极限；

(16) ψ_n在W的任意紧子集和某个上端的邻域上局部一致收敛到ϕ^{-1}.

根据Chéritat的思想，引理3用于选择β_n使得$\{\widetilde{D}_n = \{0\} \cup E(D_n)\}$是单调减的单连通开集列，且在Carathéodory意义下收敛到复平面的非空单连通开子集$\widetilde{D}$. 则由引理2可立刻得出f_n在$\widetilde{D}$上局部一致收敛到全纯映射f，并且f在$\widetilde{D}$上解析共轭于圆盘或复平面上角度为$2\pi\theta$的旋转.若$\partial\widetilde{D}$不是解析曲线，则$\widetilde{D}$恰好是f以原点为中心的相对紧Siegel盘.在下一节我们将用引理3构造β_n使得$\partial\widetilde{D}$具有正面积.

3. 主要定理的证明

本节我们构造使$\partial\widetilde{D}$具有正面积的β_n.本节我们将不再区分复平面上在T_1映射下完全不变的集合与它们在$\mathbb{C}/\mathbb{Z}$中的象.这类集合我们称它们是T_1-不变的.令$\mathbb{D}$表示单位圆盘.

无内点的正面积紧集. 不失一般性我们构造$W_0 = \{z : 0 \leq \mathrm{Im}z \leq 1\} \subset \mathbb{C}/\mathbb{Z}$的无内点正面积紧子集，并要求把$\mathbb{C}/\mathbb{Z}$分成两个连通分支.

令$A_0 = \{z : \mathrm{Im}z > 1\}, B_0 = \{z : \mathrm{Im}z < 0\}$，且$\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$,$\{B_n\}_{n=0}^{\infty}$均为递增的单连通区域序列，满足对所有的$i, j \in \mathbb{N}^*$有$A_i \cap B_j = \emptyset$，对$n \in \mathbb{N}^*$令$W_n = (\mathbb{C}/\mathbb{Z}) \setminus (A_n \cup B_n)$.则有

引理4. 若对所有的$n \in \mathbb{N}^*$和任意的$\zeta \in W_n$，圆盘$\{z : |z - \zeta| < \frac{1}{n}\}$和$A_n, B_n$都相交，且$\left(\left(\bigcup_{j=0}^{n} A_j\right) \setminus A_0\right) \cup \left(\left(\bigcup_{j=0}^{n} B_j\right) \setminus B_0\right)$的面积有小于*1*的上界，则$\kappa = \bigcap_{n=0}^{\infty} W_n$是无内点的正

面积紧集，并且将$\mathbb{C}/\mathbb{Z}$分成W, B两个连通分支，W, B均共形到$\mathbb{D}\backslash\{0\}$，且$\partial W=\partial B=\kappa$.

引理4的证明是平凡的，进一步我们有

引理5. 任给$0<\varepsilon<1$，存在W_0的紧子集κ，其面积介于ε和*1*之间，且满足κ内部为空并把$\mathbb{C}/\mathbb{Z}$分成W, B两个连通分支，W, B均共形到$\mathbb{D}\backslash\{0\}$，且$\partial W=\partial B=\kappa$.

证明. 对上述的A_0, B_0, W_0，令$L_k=\{z:\mathrm{Re}z=\frac{m}{k}, \mathrm{Im}z\in[\frac{1}{2k},1], m\in\mathbb{Z}\}$, $L'_k=\{z:\mathrm{Re}z=\frac{m}{k}+\frac{1}{2k}, \mathrm{Im}z\in[0,\frac{2k-1}{2k}], m\in\mathbb{Z}\}$，则对充分大的$k$，任取$\zeta\in W_0\backslash(L_k\cup L'_k)$，圆盘$\{z:|z-\zeta|<1\}$和$A_0\cup L_k, B_n\cup L'_k$均相交.

令

$$A_{1,\delta}=A_0\cup\left(\bigcup_{\xi\in L_k\cup\partial A_0}\{z:|z-\xi|<\delta\}\right),$$

$$B_{1,\delta}=B_0\cup\left(\bigcup_{\xi\in L'_k\cup\partial B_0}\{z:|z-\xi|<\delta\}\right),$$

则对充分小的$\delta>0$，$(A_{1,\delta}\cup B_{1,\delta})\setminus(A_0\cup B_0)$的面积严格小于$\delta_0/2$，其中$\delta_0>0$是一个固定的常数，且$\partial A_{1,\delta}, \partial B_{1,\delta}$是不相交的若尔当曲线.选取这样的$k, \delta$ 并把$A_{1,\delta}, B_{1,\delta}$分别记为$A_1, B_1$.

现在假设给定了A_n, B_n, W_n满足$\partial A_n, \partial B_n$是若尔当曲线，且$\partial A_n$和$\partial B_n$各自与直线$\mathrm{Re}z=x$的交集总是要么为单点集，要么为线段，以及$(A_n\cup B_n)\setminus(A_{n-1}\cup B_{n-1})$的面积严格小于$\delta_0/2^n$.令$L_{n,k}=\{z:\mathrm{Re}z=\frac{m}{k}, \mathrm{Im}z\in[r_{n,k}(m),1], m\in\mathbb{Z}\}$, $L'_{n,k}=\{z:\mathrm{Re}z=\frac{m}{k}+\frac{1}{2k}, \mathrm{Im}z\in[0,r'_{n,k}(m)], m\in\mathbb{Z}\}$，其中选取$r_{n,k}, r'_{n,k}:\mathbb{Z}\to(0,1)$满足

(17) $A_n\cap L'_{n,k}=B_n\cap L_{n,k}=\emptyset$;

(18) 对所有的$k\in\mathbb{N}^*, m\in\mathbb{Z}$，$\frac{m}{k}+ir_{n,k}(m)$和$B_n$的距离以及$\frac{m}{k}+\frac{1}{2k}+ir'_{n,k}(m)$和$A_n$的距离均为小于$\frac{1}{2k}$的正数;

(19) $L_{n,k}$和$L'_{n,k}$均为T_1-不变的.

则对充分大的k，任给$\zeta\in W_n\setminus\left(L_{n,k}\cup L'_{n,k}\right)$，圆盘$\{z:|z-\zeta|<\frac{1}{n+1}\}$和$A_n\cup L_{n,k}, B_n\cup L'_{n,k}$均相交.且对充分小的$\delta>0$，$(A_{n+1,\delta}\cup B_{n+1,\delta})\setminus(A_n\cup B_n)$的面积严格小于$\delta_0/2^{n+1}$，其中

$$A_{n+1,\delta}=A_n\cup\left(\bigcup_{\xi\in L_{n,k}\cup\partial A_n}\{z:|z-\xi|<\delta\}\right),$$

$$B_{n+1,\delta}=B_n\cup\left(\bigcup_{\xi\in L'_{n,k}\cup\partial B_n}\{z:|z-\xi|<\delta\}\right),$$

并且$\partial A_{n+1,\delta}, \partial B_{n+1,\delta}$是不相交的若尔当曲线.选取满足上述条件的$k, \delta$并且把$A_{n+1,\delta}, B_{n+1,\delta}$分别记作$A_{n+1}, B_{n+1}$.

由归纳法可以得到序列$\{(A_n, B_n)\}$，且由引理4知，$\kappa=\bigcap_{n=0}^{\infty}W_n$是无内点的正面积紧集，并且将$\mathbb{C}/\mathbb{Z}$分成$W, B$两个连通分支，$W, B$均共形到$\mathbb{D}\backslash\{0\}$，且$\partial W=\partial B=\kappa$.由于$\left(\left(\bigcup_{j=0}^{n}A_j\right)\setminus A_0\right)\cup\left(\left(\bigcup_{j=0}^{n}B_j\right)\setminus B_0\right)$的面积不超过$\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\delta_0$且$\delta_0$是任取的，可知引理得证. □

$\{\beta_n\}$的归纳构造　首先取固定的$\delta_0 \in (0,1)$和$h > 0$. 令β_1为单位映射，$q_1 = 5 > 1$，则有$\mathcal{R}_1(z) = 5z$. 令$\Gamma_1 = \{z \in \mathbb{C}/\mathbb{Z} : \mathrm{Im}z > 1\}$, $\Lambda_1 = \{z \in \mathbb{C}/\mathbb{Z} : \mathrm{Im}z < 0\}$.

假设$q_1, \beta_1, q_2, \beta_2, \ldots, q_n, \beta_n$已确定，且满足：

(20) 对$j = 1, 2, \ldots, n$，有$\beta_j \in \mathcal{H}$，且存在某个$\varepsilon_j > 0$使得β_j^{-1}的某个单值解析分支λ_j在$\mathbb{H}_{-\varepsilon_j}$上有定义，使得$\lambda_j(\mathbb{H}_{-\varepsilon_j}) \subset \mathbb{H}$.令$\alpha_j(z) = \lambda_j(z/q_j)$，则$\alpha_j$是$\mathcal{R}_j^{-1}$在$\mathbb{H}_{-q_j\varepsilon_j}$上的某个单值解析分支；

(21) 存在$\varepsilon'_n > 0$，使得$(\mathbb{C}/\mathbb{Z}) - (\Gamma_n \cup \Lambda_n)$的面积大于$\delta_0$，其中$\Gamma_n$ (resp. Λ_n)是$\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(\mathbb{R} + i\varepsilon'_n)$ (resp. $\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(\mathbb{R})$)补集的连通分支，满足$\Gamma_n \cap \Lambda_n = \emptyset$且$\partial\Gamma_n \cup \partial\Lambda_n \subset W_0$.

(22) 对$j = 2, \ldots, n$，有$q_j > j$，$\mathrm{dom}(F_j)$包含$\mathbb{H}_{-h-\frac{1}{j}}$，且$|F_j - F_{j-1}| < \frac{1}{j}$在$\mathbb{H}_{-h}$成立.

我们先说明若存在$\beta_{n+1} \in \mathcal{H}$和$T_1$-不变的若尔当曲线$I_{n+1}, J_{n+1} \subset (\mathbb{H} - \overline{(\mathbb{H}_{\varepsilon'_n})})$使得以下条件成立，则可由归纳法得到所求的例子：

(23) $\beta_{n+1}(J_{n+1}) = \mathbb{R}$，且存在某个$\varepsilon'_{n+1} > 0$使得$\beta_{n+1}(I_{n+1}) = \mathbb{R} + i\varepsilon'_{n+1}$；

(24) 存在某个$\varepsilon_{n+1} > 0$使得β_{n+1}^{-1}的某个单值解析分支λ_{n+1}在$\mathbb{H}_{-\varepsilon_{n+1}}$上有定义，并且$\lambda_{n+1}(\mathbb{H}_{-\varepsilon_{n+1}}) \subset \mathbb{H}$；

(25) 令$\Gamma_{n+1} \subset \mathbb{C}/\mathbb{Z}$表示$\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(I_{n+1})$的补集以上端为聚点的连通分支，$\Lambda_{n+1} \subset \mathbb{C}/\mathbb{Z}$表示$\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(J_{n+1})$的补集的与$\Gamma_{n+1}$不相交的连通分支，则有$(\mathbb{C}/\mathbb{Z}) - (\Gamma_{n+1} \cup \Lambda_{n+1})$的面积大于$\delta_0$且任取$\zeta \in (\mathbb{C}/\mathbb{Z}) - (\Gamma_{n+1} \cup \Lambda_{n+1})$都有圆盘$\{z : |z - \zeta| < 1/(n+1)\}$既与$\Gamma_{n+1}$相交，也与$\Lambda_{n+1}$相交.（注意到$I_{n+1}, J_{n+1} \subset (\mathbb{C}/\mathbb{Z}) - (\Gamma_n \cup \Lambda_n), \Gamma_n \subset \Gamma_{n+1}, \Lambda_n \subset \Lambda_{n+1}$.）

(26) $q_{n+1} > n + 1$，$\mathrm{dom}(F_{n+1})$包含$\mathbb{H}_{-h-\frac{1}{n+1}}$且$|F_n - F_{n+1}| < \frac{1}{n+1}$在$\mathbb{H}_{-h}$上成立.

容易验证条件(23)-(26)蕴含条件(20)-(22)，因此只要条件(23)-(26)成立，则有归纳法可得序列$\{q_n\}$与$\{\beta_n\}$满足条件(23)-(26)对所有的$n \in \mathbb{N}^*$ 成立.

根据前节的一般过程，定义$D_n := \mathbb{C}\backslash\overline{\Lambda_n}$.则$\{\widetilde{D}_n = \{0\} \cup E(D_n)\}$ 是递减的单连通开集列，且在Carathéodory意义下收敛到$\widetilde{D}$，满足：

(27) f_n在$\widetilde{D_n}$上共轭到$\mathbb{D}$上角度为$2\pi\theta_n$的旋转；

(28) $\partial\widetilde{D} = \bigcap_{n=0}^{\infty} E(\mathbb{C}\backslash(\Gamma_n \cup \Lambda_n)) \subset \mathbb{D} \subset \mathrm{dom}(f)$.

由引理4可知，$\partial\widetilde{D}$面积为正数.由$q_n > n$对所有的$n \in \mathbb{N}^*$成立知，$\theta = \lim\limits_{n\to+\infty} \theta_n \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.因此由引理2知，$f$有以原点为中心，边界面积为正数的相对紧Siegel盘$\triangle = \widetilde{D}$，故$f$即为定理所求的例子.

注意到条件(26)可由引理1直接得到，因此只需证明下面的引理：
假设条件(20)-(22)成立，则存在$\beta_{n+1} \in \mathcal{H}$和$T_1$-不变的若尔当曲线$I_{n+1}, J_{n+1} \subset (\mathbb{H} - \overline{(\mathbb{H}_{\varepsilon'_n})})$满足条件(23)-(25).

证明. 由引理5可知，存在无内点的正面积紧集$\kappa \subset (\mathbb{H} - \overline{(\mathbb{H}_{\varepsilon'_n})})/\mathbb{Z}$，其面积可以无限接近$\varepsilon'_n$，并且满足$\kappa$把$\mathbb{C}/\mathbb{Z}$ 分成和$\mathbb{D}\backslash\{0\}$共形的两个连通分支.故选取$\kappa$使得$\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(\kappa)$面积大于$\delta_0$.用$B$表示$\kappa$的补集的以下端$-i\infty$为聚点的连通分支. 则存在共形双射$\sigma : \mathbb{D} \to B \cup \{-i\infty\}$.对$r = 1, 2, \ldots$ 令$B_r = \sigma(\{z : |z| < 1 - 1/2r\})$.

令W_r表示$\overline{B_r}$的补集，ϕ_r为从$\mathbb{H}/\mathbb{Z}$ 到W_r且可以延拓以上端为不动点的共形双射. 则对所有

的r，ϕ_r在E下的投影都是从$\mathbb{D}\backslash\{0\}$到$E(W_r)$的同构，并且可以延拓以原点为不动点. 把这个投影记为$\widetilde{\phi}_r$.由黎曼映照定理知，我们总可以令$\widetilde{\phi}_r'(0)>0$.令W表示$\overline{B}$的补集，则$E(W)$是$\{E(W_r)\}$在Carathéodory意义下的极限集.由Carathéodory定理，$\widetilde{\phi}_r$在$\mathbb{D}$上局部一致收敛到一个共形双射$\widetilde{\phi}:\mathbb{D}\to E(W)\cup\{0\}$.故存在某个共形双射$\phi:\mathbb{H}/\mathbb{Z}\to W$以上端为不动点，且任给$t>0$，$\phi_r$在$\mathbb{H}_t/\mathbb{Z}$上一致收敛到$\phi$.

选取固定的充分大的$r\in\mathbb{N}^*$和充分小的正数t使得任取$\zeta\in\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n((\mathbb{C}/\mathbb{Z})\backslash(A\cup B_r))$，圆盘$\{z:|z-\zeta|<1/2(n+1)\}$总和$\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n((\mathbb{C}/\mathbb{Z})\backslash(A\cup B_r))$的补集的两个连通分支均相交，其中$A$表示$\phi(\mathbb{R}+it)$的补集的以上端为聚点的连通分支.注意到$\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n((\mathbb{C}/\mathbb{Z})\backslash(A\cup B_r))$的面积大于$\delta_0$.则由于$\phi_r$在$\mathbb{H}_{\frac{t}{2}}$上一致收敛，存在$t'\in(t/2,t)$ and $r'>r$使得任取$\zeta\in\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n((\mathbb{C}/\mathbb{Z})\backslash(A_{r'}\cup B_{r'}))$，圆盘$\{z:|z-\zeta|<1/2(n+1)\}$和$\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n((\mathbb{C}/\mathbb{Z})\backslash(A_{r'}\cup B_{r'}))$的补集的两个连通分支均相交，其中$A_{r'}$表示$\phi_{r'}(\mathbb{R}+it')$ 的补集的以上端为聚点的连通分支.选取$\varepsilon_{n+1}\in(0,t/2)$使得$\phi_{r'}(\mathbb{R}+2i\varepsilon_{n+1})$包含于$B\backslash B_{r'}$的内部.

对$\phi_{r'}$应用引理5，我们得到从$\mathbb{C}/\mathbb{Z}$映到$\mathbb{C}/\mathbb{Z}$的全纯函数列ψ_m满足条件(14)-(16)，诱导一个$\mathcal{H}$中的函数列，我们仍用ψ_m标记.由$\mathbb{H}_{\varepsilon_{n+1}}$上$\psi_m$的一致收敛性，我们可以选取充分大的正整数$m$使得$\psi_m^{-1}$的某个单值解析分支$\lambda$，满足$\lambda(\mathbb{R}+it')$包含于$W\backslash A_{r'}$的内部，并且$\lambda(\mathbb{R}+2i\varepsilon_{n+1})$包含于$B\backslash B_{r'}$的内部.选取$\beta_{n+1}(z)=\psi_m(z)-2i\varepsilon_{n+1},\varepsilon_{n+1}'=t'-2\varepsilon_{n+1}$并用$\Gamma_{n+1},\Lambda_{n+1}$分别标记$\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n\lambda(\mathbb{R}+it')$ 的补集的包含Γ_n的连通分支与$\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n\lambda(\mathbb{R}+2i\varepsilon_{n+1})$ 的补集的包含Λ_n的连通分支.故β_{n+1}满足条件(23)(24).注意到$(\mathbb{C}/\mathbb{Z})\backslash(\Gamma_{n+1}\cup\Lambda_{n+1})$的面积大于$\delta_0$.任取$\zeta\in(\mathbb{C}/\mathbb{Z})\backslash(\Gamma_{n+1}\cup\Lambda_{n+1})$，圆盘$\{z:|z-\zeta|<1/(n+1)\}$总和$\Gamma_{n+1},\Lambda_{n+1}$均相交.故$\beta_{n+1}$满足条件(25). □

4. 结论

本文构造了具有正面积边界的相对紧Siegel盘的单叶全纯芽的例子，是对现有的Siegel盘边界问题的研究的补充。此结果说明了具有中性不动点的全纯函数的动力系统具有复杂性，也体现了Chéritat方法的灵活性。然而，一方面，对于有理函数而言，其Siegel盘能否具有如此性质仍未可知；另一方面，鉴于Biswas在 [13]中的成果，关于Julia集的不变子集的测度等性质可能仍有值得研究的问题。

参考文献

[1] Brjuno, A.D. (1965) On Convergence of Transforms of Differential Equations to the Normal Form. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, **165**, 987-989.

[2] Brjuno, A.D., Èskin, G.I., Genov, G.K., *et al.* (1971) Transactions of the Moscow Mathematical Society. Vol. 25, American Mathematical Society, Providence, 131-288.

[3] Cheraghi, D. (2019) Typical Orbits of Quadratic Polynomials with a Neutral Fixed Point: Non-Brjuno Type. *Annales Scientifiques de l'Éns*, **52**, 59-138.
https://doi.org/10.24033/asens.2384

[4] Siegel, C.L. (1942) Iteration of Analytic Functions. *Annals of Mathematics*, **43**, 607-612. https://doi.org/10.2307/1968952

[5] Yang, F. (2023) Siegel Disks and Related Topics. http://maths.nju.edu.cn/~yangfei/materials/Siegel-disk-Sanya.pdf

[6] Cremer, H. (1928) Zum Zentrumproblem. *Mathematische Annalen*, **98**, 151-163. https://doi.org/10.1007/BF01451586

[7] Geyer, L. (2019) Linearizability of Saturated Polynomials. *Indiana University Mathematics Journal*, **68**, 1551-1578. https://doi.org/10.1512/iumj.2019.68.6160

[8] Yoccoz, J.-C. (1988) Linéarisation des germes de difféomorphismes holomorphes de ($\mathbb{C}$, 0). *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, **306**, 55-58.

[9] Pérez-Marco, R. (1997) Siegel Disks with Smooth Boundaries. Preprint.

[10] Avila, A., Buff, X. and Chéritat, A. (2004) Siegel Disks with Smooth Boundaries. *Acta Mathematica*, **193**, 1-30. https://doi.org/10.1007/BF02392549

[11] Buff, X. and Chéritat, A. (2007) How Regular Can the Boundary of a Quadratic Siegel Disk Be? *Proceedings of the American Mathematical Society*, **135**, 1073-1080. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-06-08578-9

[12] Chéritat, A. (2011) Relatively Compact Siegel Disks with Non-Locally Connected Boundaries. *Mathematische Annalen*, **349**, 529-542. https://doi.org/10.1007/s00208-010-0527-1

[13] Biswas, K. (2016) Positive Area and Inaccessible Fixed Points for Hedgehogs. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, **36**, 1839-1850. https://doi.org/10.1017/etds.2014.143

[14] Fu, Y. and Yang, F. (2020) Area and Hausdorff Dimension of Sierpiński Carpet Julia Sets. *Mathematische Zeitschrift*, **294**, 1441-1456. https://doi.org/10.1007/s00209-019-02319-4

[15] Cheraghi, D., DeZotti, A. and Yang, F. (2020) Dimension Paradox of Irrationally Indifferent Attractors. Submitted.