

数学核心素养“量感”的认识和培养

祁家璐, 董玉成

新疆师范大学数学科学学院, 新疆 乌鲁木齐

收稿日期: 2024年1月3日; 录用日期: 2024年1月17日; 发布日期: 2024年2月21日

摘要

人类科学发展的历程中,“量”在各领域皆有着举足轻重的地位,也是数学学习的基础根基。“量感”能力作为数学核心素养的典型代表,它主要是指对事物的可测量属性及大小关系的直观感知能力。量感能力的培养有助于提高学生估测及解决问题的能力,而做到对“量”及“量感”的正确认知是培养学生量感能力乃至提升数学核心素养的必由之路。本文由如何认识“量感”出发,阐述了“量”及“量感”在科学发展中的作用及数学学科中的地位,进而对数学教学中的量感培养进行分析。

关键词

量感, 数感, 度量, 数学教学

Understanding and Cultivating the “Sense of Quantity” of Mathematical Core Literacy

Jialu Qi, Yucheng Dong

School of Mathematical Sciences, Xinjiang Normal University, Urumqi Xinjiang

Received: Jan. 3rd, 2024; accepted: Jan. 17th, 2024; published: Feb. 21st, 2024

Abstract

In the process of human scientific development, quantity plays a crucial role in various fields and is also the foundation of mathematical learning. The ability to sense quantity, as a typical representative of mathematical core literacy, mainly refers to the intuitive perception ability of measurable attributes and size relationships of things. The cultivation of quantitative ability helps to improve students' ability to estimate and solve problems, and achieving a correct understanding of “quantity” and “quantitative sense” is the only way to cultivate students' quantitative ability and even enhance their mathematical core literacy. Starting from how to understand “sense of quantity”, this article elaborates on the role of “quantity” and “sense of quantity” in scientific develop-

ment and the position of “sense of quantity” in mathematics, and then analyzes the cultivation of sense of quantity in mathematics teaching.

Keywords

Sense of Quantity, Number Sense, Measurement, Mathematics Teaching

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

《义务教育数学课程标准(2022年版)》(以下简称“新课标”)在2011版十大关键词的基础上,创新性地提出了培养学生“量感”,量感作为一种抽象能力,主要是指对事物的可测量属性及大小关系的直观感知,即是要培养学生的数学眼光,培养学生通过测量与估算,以养成用定量的方法解决现实问题的能力[1]。恩格斯给出数学的定义为:数学是关于空间形式和数量关系的科学。因此,度量是数学的本质,而量感即是理解数量关系的灵魂,培养抽象素养的关键,解决数学问题的纽带,以及培养数学思维和应用意识的基础,在数学学习中扮演着不可替代的作用。人类发展的历程中,“量”在自然科学领域举足轻重,无论是物理学、化学和生物学,量对其发展都有着不可替代的重要作用。物理学是一门注重用“量”来描述“质”的科学,从基本的长度和时间的测量到复杂的粒子物理和量子力学都需要借助“量”来体现。早在古希腊时期,由于当时生产力水平低,人类对于自然界的认识主要是依赖于直觉观察和猜测,以达到对“量”的把握,比如用漏斗计算时间等。随着生产技术的发展,产生了大型的精密仪器,研究对象也从低速到高速、宏观到微观发展,如科学家们使用大型粒子加速器来研究微观粒子的性质和行为。到如今的2023年诺贝尔物理学奖得主 Pierre Agostini、Ferenc Krausz、Anne L’Huillier 所研究的超快激光科学和阿秒光脉冲,在突破飞秒的基础上,通过阿秒光脉冲展示了原子、分子和固体中电子运动的时间分辨成像,物理学领域对“量”的认识越来越深入。在生物学中,人类对量的认识可追溯到古希腊时期,亚里士多德等科学家对生物的观察和描述,使人类对生物学中“量”的方面有了初步的认识和理解。19世纪科学家开始对生物量和化学成分进行测量。20世纪中叶,生物实验技术发展,人们通过实验手段来研究生物学中的量。如今21世纪,在生物中的基因学、蛋白学和代谢组学等方面,使用更为精密的实验技术去研究“量”从而更好地理解生命现象。而在化学领域。早在古代人们就开始意识到化学反应中物质的变化和量的关系,中世纪的炼金术士们对化学中的量进行更深入的研究,比如使用滴定管来测量溶液的酸碱度。18~19世纪欧洲的化学家使用精确的实验仪器测量物质中的反应与量的变化关系,19世纪后直到现在,化学中关于量的认识更为深入,推动了原子分子理论的发展。综上可见在自然科学领域,“量”都扮演着极为重要的角色。

2. “量感”在数学中的地位

“量感”主要是指对事物的可测量属性及大小关系的直观感知[1]。量感在数学中具有重要地位,它不仅是理解数量关系和培养抽象素养的基础,还是培养数学思维和解决问题的能力的关键。

2.1. 度量是数学的本质

史宁中教授认为:“数是对度量结果的表达,是一种符号表达,数学的本质在于度量,度量的本质

在于数的表达。” [2]因此, 度量是人们认识、理解和表达现实世界的工具, 而过去我们对度量的重视程度明显不够, 新课标在核心素养的表现中加入“量感”, 实际上也是在强调度量, 即以核心素养为统领, 理解和掌握与度量有关的知识点, 在此过程中逐步培养量感, 培养学生学会用数学的眼光观察现实世界。历史证明, 度量起源于空间度量, 尤其是对长度和面积的度量, 在日常生活中, 有许多无形的量, 如时间、速度、温度等, 经过度量我们掌握了它们。度量实际上是将连续量分割成大小相等的可数集合, 转化为离散的形式进行表示[3]。数学是研究有关数和空间的科学, 度量则代表了二者的统一性并为二者搭建了沟通的桥梁。度量的起步阶段人们还只是将可测量的量视为定性的术语, 随着测量范围的扩大, 为数学发展和贸易、科技、技术发明等都提供了动力。

2.2. 量感是理解数量关系的灵魂

数学不是关于数字, 而是关于数量[4]。在原始社会, 数是对数量的抽象, 数量是度量的结果, 因此数是人类创造的用来对量进行表示的语言和工具, 而量是客观存在的事物所具有的属性, 是一种客观实在。在数学中, 存在各种类型的数, 如自然数、整数、分数等等, 对于这些数的理解, 必须建立在量感的基础上, 才能理解数的实际意义。例如, 儿童学习极具抽象的数字“5”, 需要依托具体的数量关系, 如“5头牛、5个苹果”而抽象得到。数具有5种表现形式: 对象、点集图案、线段、刻度上的线段、刻度盘上的线段或点, 而计数单词正是数量世界与符号世界之间的关键联系[4]。即客观事物的量进行抽象得到的便是数, 将数具体化为客观事物就转换成了量, 图1是数的5种表现形式与量相互转换的过程。

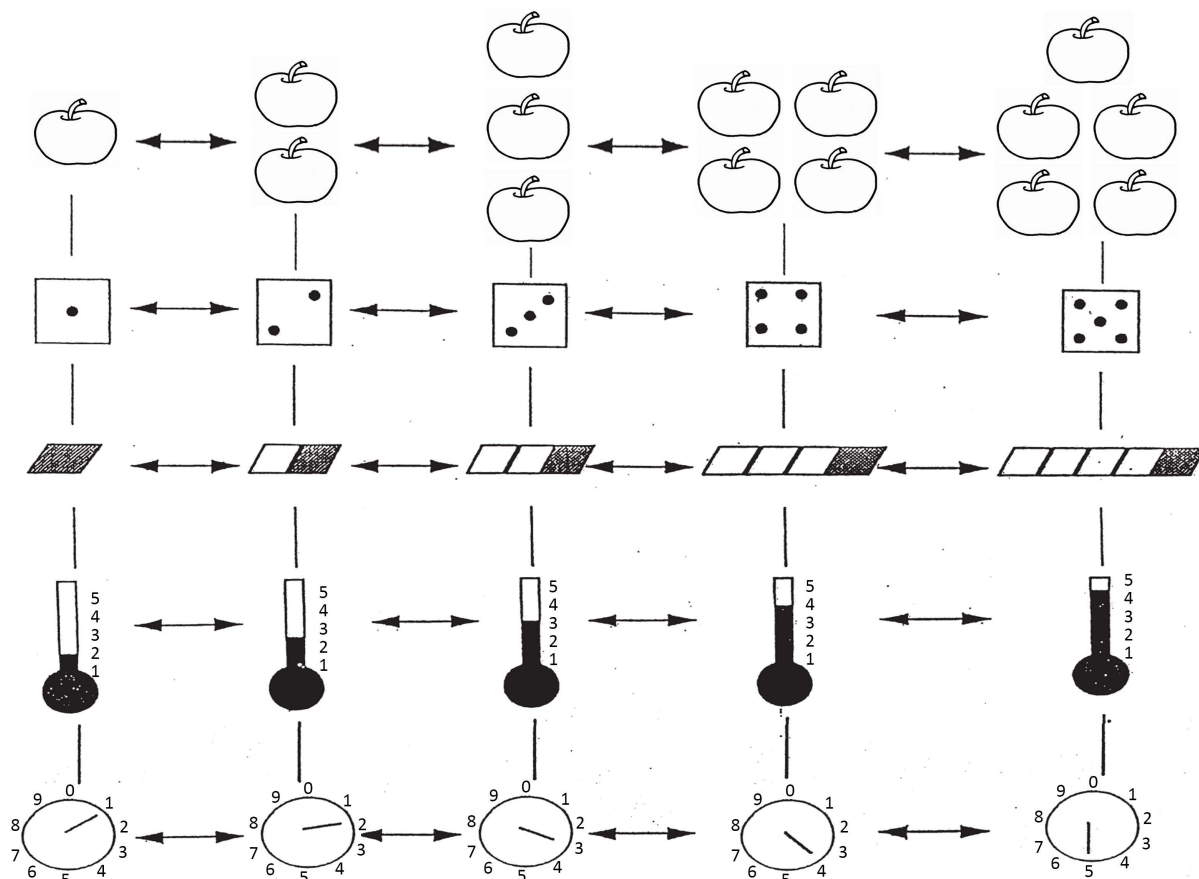


Figure 1. Transformation diagram between “number” and “quantity”

图1. “数”与“量”相互转化图

2.3. 量感是培养抽象素养的关键

新课标指出培养学生核心素养主要体现在三个方面, 即会用数学的眼光观察现实世界、会用数学的思维思考现实世界、会用数学的语言表达现实世界[1]。量感是一种直观感悟, 它自身具有抽象性, 涉及到对事物的可测量属性及大小关系的直观感知和直觉判断。这种感悟不仅需要直接观察事物, 还需要对事物进行抽象思考。“量感”属于抽象素养, 即要培养学生会用数学的眼光观察现实世界的能力。对多少、距离远近和大小规模的感知是人类能够度量的经验基础, 从“直观感知”到“度量认知”是一个逐步抽象的过程。如要测量一支铅笔的长度, 学生需要首先建立长度的概念, 经历铅笔长度直接比较和间接比较, 从非正式单位到标准单位的约定, 用单位长度度量和长度单位的换算与计算等过程, 在这个过程中, 学生需要经历从具体的直观感知到抽象逐步进阶的过程[5], 如图2所示。在培养量感的过程中, 需要经历多个抽象过程从而得出结论, 因此量感的培养对提高抽象素养起着至关重要的作用。

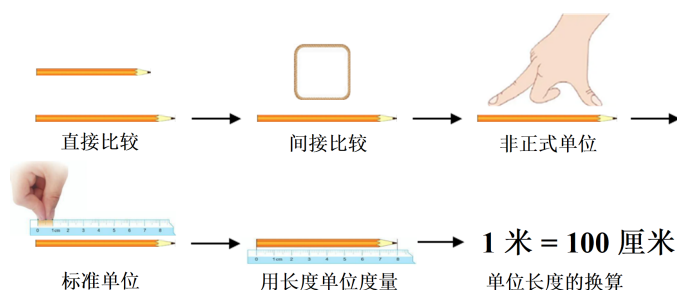


Figure 2. Perceived cognitive diagram of “quantity”

图2. “量”的感知到认知示意图

2.4. 量感是解决数学问题的纽带

数学问题可以主要分为数与代数、图形与几何、概率与统计三个类型, 在这三个类型的数学问题中, 量都扮演着十分重要的角色。如在数与代数问题中, 在初步学习阶段, 学生需要借助量来理解数, 从而展开对代数深入的学习, 其中量可以表示为具体的数字也可以表示为未知数; 在图形与几何问题中, 中国古代数学家通过“勾三股四弦五”发现了勾股定理, 学者们借助量, 发现了图形与几何的对称美, 毕达哥拉斯也借助对量的研究发现了黄金分割数; 在统计与概率问题中, 通过对量的整理、分析, 可以描述、揭示某一现象的规律等等。

2.5. 量感是培养数学思维和应用意识的基础

学生通过对量感的初步感知, 可以逐渐形成对问题的敏感性和洞察力, 能够对现实生活中的物体、图形按标准进行分类, 锻炼学生数学思维, 从而引导学生用数学的思维思考现实世界, 进而更好地解决实际问题。面对许多实际问题, 都需要借助量来解决。如在日常生活中去超市买蔬菜水果, 消费者需要根据自己的需求对量进行估计、学生考试时对时间这个量进行合理安排以取得好成绩、出行时通过对距离进行估测优先选择最短路线等等; 再如在进行类似于数学建模的过程中, 每个量都具有实际意义, 可以通过整理大量数据, 对问题进行分类、评价、预测等等。因此, 量感也是发展学生应用意识的经验基础, 有助于学生养成用定量的方法认识 and 解决问题的习惯[6]。

3. 何以培养量感?

3.1. 在前概念知识的基础上教学

巴西街头叫卖的儿童能够进行数学运算, 但不能回答以类似形式呈现的与学校相关的问题; 家庭主

妇具备处理购物时面临的数学问题的能力,但不具备解决在课堂上以抽象的形式呈现的数学问题的能力;减肥者能够采取策略解决与饮食相关的数学测量问题,但以抽象的形式呈现,他们就被难住了[4]。以上例子说明,人们具有非正式的策略和数学推理能力,并且可以作为学习更抽象数学的基础。儿童对数学的学习也是如此,他们并不是空着脑袋进入教室的,在进行正式的数学学习之前,他们的前概念知识已经为他们奠定了学习抽象数学知识的基础。如在进行量感教学前,教师应理解数学不是计算和遵守规则,而是解决与数量相关的问题,充分了解学生当前的学习水平,如关于数量的多少与距离的远近是两项本能,量感教学可在这两项本能的基础上教学。根据皮亚杰的认知发展理论,小学的学生正处于具体运算阶段,这一阶段儿童的逻辑思维还需要依靠直观具体事物的辅助支撑,大脑未能形成抽象能力。加之小学生生活经验不足,无法建立关于量的实际概念,因此量感对小学生而言具有一定挑战性,并不能够一蹴而就,而是一个漫长、持续的过程。

3.2. 理解要建立在事实性知识和概念框架的基础上

在教学过程中,往往教师更侧重于教授学生事实性知识,如 $1\text{ 千克} = 1000\text{ 克}$, $1\text{ 小时} = 60\text{ 分钟}$,对于数值和单位的理解是建立量感的基础,但同时概念框架也是帮助学生全面建立量感的必备知识,如在学习“认识时间”内容时,可加入实践活动“时间都去哪儿了?”,切身感受时间是一种连续的量,感受时光流逝,体验时间管理的重要性等。其次,要注重知识点的前后联系与连贯性。教材编写不仅要遵循学科知识的逻辑,还要考虑学生认知发展特点。小学数学的学习内容包括数与代数、图形与几何、统计与概率、综合与实践四大模块,与量感相关的知识点分布在四大模块中,呈现出一种非系统的零散状态。这一现象在培养学生量感角度不仅不利于教师系统性地教学量感相关知识,也不利于学生量感的建立。比如“克、千克”的学习是在二年级下册,而“吨”是三年级上册的内容,倘若教师在教学时不能有意识地将“克、千克、吨”的教学相联系,学生对于质量的认知就不够完整,不能体会它们的相关性,不能形成完整的知识体系,从而无法实现学生量感的建立。因此,在事实性知识与概念框架的基础上理解量感,才能系统掌握量感。

3.3. 借助直观的感觉体验,在活动中感受量感

数学来源于生活,并最终回归于生活。教师可以采取“做中学”的教学方法,为学生提供相应的教具、学具,在课堂教学中提供活动让学生亲自动手直观感受量感。例如在学习“克与千克”相关内容时,教师可以组织学生每人带一些小米,在课堂上先引导学生猜测一千克小米大概有多少,以游戏的形式,让学生挨个进行尝试,最终以最接近一千克的同学为胜。小学生最大的兴趣就是游戏,在课堂中以游戏的形式进行教学,不仅能够引起学生的学习兴趣,还能在学生切身实验的过程中切实感受量感,这一教学效果是无疑是无数次老师讲授都无法比拟的。

4. “数感”与“量感”的关系

数感和量感的本质都是数的表达,但两者表达的数又是不一样的。谈数感时,可以脱离现实背景抽象成数,因此可以去掉后缀量词,表达的是个数与数量的关系,而谈量感时,不可以去掉后缀量词,要通过某个量词借助现实背景去理解数[2]。“数感”是对数字关系和数字模式的意识,以及运用这种意识灵活地解决数字问题的能力[7]。因此数感所面临的对象是抽象的数字符号,具有内隐性,目标是提升计算策略的灵活性和创新性,体现出较强的思维价值。“量感”主要是指对于事物的可测量属性及大小关系的感知[2]。其对象是客观存在的事物,既具有内隐性又具有外显性,最终目的是通过对客观事物的度量 and 感知,解决实际问题。数感的发展侧重于对于数的理解和运用,而量感的发展则侧重于对于客观事物的度量和应用。数感和量感的发展方向也是相互促进的,因此,量感与数感既相互区别又相互联系、

相互促进。

在培养量感的过程中,教师可以从数感出发培养学生的量感。如在学习“数的表示”时,教师可以让学生用数来表示生活中具体的事物,激发学生的量感意识;在学习“数量关系”时,学生经历由“量”抽象到“数”的过程,通过比较长短、大小等来初步感知量感;在学习“数的估计”时,将其与“量的估计”相联系,体验“数”与“量”的转化过程;在学习“数的问题解决”时,可以与实际问题相联系,在培养数感的同时建立量感。因此,教师要对数与量有更清晰的认知,在强化两者之间联系的基础上展开教学,会得到事半功倍的效果。

参考文献

- [1] 中华人民共和国教育部. 义务教育数学课程标准(2022年版)[M]. 北京: 北京师范大学出版, 2022.
- [2] 史宁中. 为什么要强调量感[J]. 小学教学(数学版), 2021(10): 8-10.
- [3] (美)蔡金法作. 数学教育研究手册上册[M]. 北京: 人民教育出版社, 2020.
- [4] (美)M.苏珊娜·多诺万, 约翰·D.布兰思福特. 学生是如何学习的——课堂中的数学[M]. 史亚娟, 译. 桂林: 广西师范大学出版社, 2012.
- [5] 孙兴华. 为什么把量感作为小学阶段核心素养表现——马云鹏教授、吴正宪老师访谈录(二)[J]. 小学教学(数学版), 2022(9): 9-14.
- [6] 徐国明. 小学生量感: 内涵、价值及培养策略[J]. 中小学教师培训, 2022(6): 49-52.
- [7] 徐文彬, 喻平. “数感”及其形成与发展[J]. 数学教育学报, 2007(2): 8-11.