

集值优化问题弱极小解的逼近定理

伍玉涛

贵州大学数学与统计学院, 贵州 贵阳

收稿日期: 2024年1月17日; 录用日期: 2024年1月31日; 发布日期: 2024年2月29日

摘要

目的: 针对集值优化问题, 考虑该问题的近似弱极小解序列的收敛性。方法: 通过定义集值优化问题的 ε -近似弱极小解的概念, 在有限理性的框架下寻求一个集值优化问题的近似弱极小解序列来逼近其精确解。结果: 给出了集值优化问题弱极小解的一个逼近定理以及两个重要推论。结论: 证明了在一定条件下对于集值优化问题可以用在有限理性下的近似解来逼近在完全理性下的精确解, 这一结果为该问题的计算提供了一种理论支持。

关键词

集值优化问题, 有限理性, 逼近定理

Approximation Theorem for Weak Minimal Solutions of Set-Valued Optimization Problems

Yutao Wu

School of Mathematics and Statistics, Guizhou University, Guiyang Guizhou

Received: Jan. 17th, 2024; accepted: Jan. 31st, 2024; published: Feb. 29th, 2024

Abstract

Objective: For set-valued optimization problem, we consider the convergence of the approximate weak minimal solution sequence. **Method:** By defining the concept of ε -approximate weak minimal solution for set-valued optimization problems, we aim to seek a sequence of approximate weak minimal solutions for the problem to approximate their exact solutions. **Results:** An approximation theorem and two corollaries for set-valued optimization problems are presented. **Conclusion:** It is proved that under certain conditions, the approximate solution under bounded

rationality can be approached by the exact solution under full rationality for set-valued optimization problems. This result provides a theoretical support for the calculation of the problem.

Keywords

Set-Valued Optimization Problems, Bounded Rationality, Approximation Theorem

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

近年来, 集值优化问题(简称 SOP)引起了大量学者的关注并成为优化领域的一个热点, 它不仅推广了数值优化问题和向量优化问题, 而且还在鲁棒优化[1] [2]、最优控制[3]和经济学[4]和变分包含[5]等领域有着广泛的应用, 并为这些理论的研究与发展提供了一个统一的研究框架。因此, 对集值优化问题的研究有着重要的理论意义和应用价值。近年来该问题还备受广大科研工作者的青睐, 且有了较丰硕的研究成果[6] [7] [8] [9] [10]。

由于决策者在做决策时会受到认知、环境等因素的影响, 往往不能得到“精确”的最优解, 这使得建立在完全理性假设下的经济模型的应用受到了限制, 而 Simon [11]引入的有限理性则打破了这种限制, 并使结论的假设条件更加符合实际情况。在此之后, Anderlini 和 Canning [12]在 2001 年引入了有限理性函数的概念, 建立了一个具有抽象理性函数的模型 M。随后, Yu 等对模型 M 进行了改造, 不仅大大减弱模型 M 中的条件, 而且扩大了其应用范围, 并将结果应用于优化问题、平衡问题、一般 n 人非合作博弈问题、多目标博弈问题等, 参见文献[13] [14] [15] [16] [17]。最近, 部分学者将该有限理性模型应用到向量平衡问题, 广义多目标博弈, 种群博弈等方面, 产生了较多新的结果, 见文献[18] [19] [20]。

现实生活中, 人们在有限理性下决策时往往寻求“满意解”, 而不是精确的“最优解”, 也就是“满意原则”。实际上, “满意解”对应近似解, 反映了有限理性, 精确的“最优解”对应完全理性。然而, 现实生活中很难得到精确的“最优解”, 我们只有尽可能地去寻求近似解。2009 年, 俞在文献[21]中给出了有限理性下最优化问题和多目标优化问题的逼近定理。他认为问题本身是近似的, 其求解方法也是近似的, 只能寻求某种近似的, 但已经是足够好的, 可以使决策者满意和放心的方案或策略。同时他还揭示了在一定假设条件下可以用有限理性来逼近完全理性, 回应了 Simon 有限理性的质疑, 这是很有理论意义的。关于有限理性下相关问题的逼近定理的研究还可见[18] [22] [23]。

受以上工作的激励, 本文致力于在有限理性下研究集值优化问题的逼近定理, 即想找到一个集值优化问题的近似解序列来逼近其精确解。这一结果是新的并为该问题的计算提供了一种理论支持。

2. 预备知识

设 Z 是一个实线性空间, C 是 Z 中的凸锥, 且满足 $\{0\} \neq C \neq Z$, K 是一个非空集合, $F: K \rightarrow P_0(Z)$ 为一个非空值的集值映射, 其中 $P_0(Z)$ 表示 Z 中所有非空子集的全体。

集值优化问题(SOP)的模型如下:

$$\begin{cases} \min_C F(x) \\ x \in K \end{cases}.$$

定义 2.1 [7] 设 N 是 \mathcal{Z} 的非空子集,

1) 集合 S 称为代数实的, 若代数内部非空, 即:

$$\text{cor}(S) = \{\bar{t} \in N : \forall t \in \mathcal{Z}, \exists \theta > 0, \text{s.t. } \bar{t} + [0, \theta]t \subseteq S\} \neq \emptyset.$$

2) 假设 \mathcal{C} 是代数实的, 若 $(\{\bar{t}\} - \text{cor}(\mathcal{C})) \cap S = \emptyset$, 则称 $\bar{t} \in S$ 是 S 的弱极小元;

3) 若存在 $\bar{t} \in F(x)$, 使 $\bar{t} \in F(x)$ 是集合 $F(K)$ 的一个弱极小元, 则 $x \in K$ 是 SOP 的一个弱极小解。

其中, $F(K) = \bigcup_{x \in K} F(x)$ 。

定义 2.2 [24]

1) 设 (X, d) 是一个度量空间, $S \subset X$ 是一个非空点集, $\forall \varepsilon > 0$, 记

$$U(\varepsilon, S) = \{r \in X : \exists q \in S, \text{使 } d(r, q) < \varepsilon\}.$$

2) 设 A, B 是 X 中任意两个非空有界闭集, 定义有界闭集 A 和 B 之间的 Hausdorff 距离为:

$$h(A, B) = \inf \{\varepsilon > 0 : A \subset U(\varepsilon, B), B \subset U(\varepsilon, A)\}.$$

定义 2.3 [24] 设 X, \mathcal{Z} 为两个 Hausdorff 拓扑空间, $F: X \rightarrow P_0(\mathcal{Z})$ 为集值映射。

1) 若对 \mathcal{Z} 中任意包含 $F(x)$ 的开集 S , 存在 x 的开邻域 $O(x)$, 使 $\forall x' \in O(x)$, 有 $F(x') \subset S$, 则称 F 在 x 是上半连续的;

2) 若 F 在 X 中每一点都是上半连续的, 则称 F 在 X 是上半连续的。

引理 2.1 [24] X, \mathcal{Z} 是两个 Hausdorff 拓扑空间, \mathcal{Z} 是度量空间, 集值映射 $F: X \rightarrow P_0(\mathcal{Z})$ 满足 $\forall x \in X$, $F(x)$ 是紧集, 则 F 在 $x \in X$ 是上半连续的当且仅当 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 x 的开邻域 $O(x)$, 使 $\forall x' \in O(x)$, 有 $F(x') \subset U(\varepsilon, F(x))$ 。

引理 2.2 [21] 设 $\{S_n\}$ 是度量空间 X 中的一列非空有界子集, S 是 X 中的一个非空紧集, 如果 $h(S_n, S) \rightarrow 0$, $w_n \in S_n$, 则存在 $\{w_n\}$ 的子序列 $\{w_{n_k}\}$, 使 $w_{n_k} \rightarrow w \in S$, 其中 h 是 X 上的 Hausdorff 距离。

有限理性模型: [21]

设 M 是参数空间, 任意的 λ 是一个博弈; S 是行为空间, 任意的 s 是一个策略; $G: \Omega \times S \rightarrow P_0(S)$ 是可行映射, 而 G 诱导出行为映射 g , 其中 $g(\lambda) = \{s \in S : s \in G(\lambda, s)\}$, 集值映射 g 的图像 $\text{Graph}(g) = \{(\lambda, s) \in \Omega \times S : s \in g(\lambda)\}$; $\Phi: \text{Graph}(g) \rightarrow R_+$ 是理性函数。

3. 逼近定理

在本节, 我们首先引入集值优化问题的 ε -近似弱极小解的概念。

定义 3.1 E 是 Hausdorff 线性拓扑空间, \mathcal{Z} 是紧赋范线性空间, K 是 E 中的非空集合, \mathcal{C} 是 \mathcal{Z} 中的代数实的闭凸锥, 且 $\text{int}(\mathcal{C}) \neq \emptyset$ 。 $F: K \rightarrow P_0(\mathcal{Z})$ 是一个非空值的集值映射, 满足 $\forall x \in K$, $F(x)$ 是紧集。若对于一个实数 $\varepsilon > 0$, 存在 $t \in F(x)$, 使 $(\{t\} + \{\varepsilon\} - \text{cor}(\mathcal{C})) \cap F(K) = \emptyset$, 则称 $x \in K$ 是 SOP 的一个 ε -近似弱极小解。

接下来, 我们给出本文的主要结果:

定理 3.1 设 (E, d) 是一个度量空间, \mathcal{Z} 是一个紧赋范线性空间, 且满足下列条件:

1) $\forall n=1, 2, \dots$, 集值映射序列 $F^n: K \rightarrow P_0(\mathcal{Z})$ 满足: $\sup_{x \in K} h(F^n(x), F(x)) \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, 其中 $F: K \rightarrow P_0(\mathcal{Z})$ 是上半连续的, h 是 \mathcal{Z} 上的 Hausdorff 距离。

2) $\forall n=1, 2, \dots$, $\{K_n\}$ 是 E 中非空子集序列, 满足 $\tilde{h}(K_n, K) \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, 其中 K 是 E 中的非空

紧集, \tilde{h} 是 E 上的 Hausdorff 距离。

3) $\forall n=1,2,\dots, x_n \in K$ 满足存在 $t_n \in F^n(x_n)$, 使得 $(\{t_n\} + \{\varepsilon_n\} - \text{cor}(\mathcal{C})) \cap F^n(K_n) = \emptyset$, 且当 $n \rightarrow \infty$ 时有 $d(x_n, K_n) \rightarrow 0$, 其中当 $n \rightarrow \infty$ 时有 $\varepsilon_n \geq 0, \varepsilon_n \rightarrow 0$ 。

则有:

a) $\{x_n\}$ 必有子序列 $\{x_{n_k}\}$, 使 $x_{n_k} \rightarrow x_0 \in K$ 。

b) $\exists t \in F(x_0)$, s.t. $(\{t\} - \text{cor}(\mathcal{C})) \cap F(K) = \emptyset$ 。

c) 若 SOP 的解集是单点集, 则必有 $x_n \rightarrow x_0$ 。

证明:

a) $\forall n=1,2,\dots$, 由 $d(x_n, K_n) \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$ 得: 存在 $x'_n \in K_n$, 使 $d(x_n, x'_n) \rightarrow 0$ 。由于当 $n \rightarrow \infty$ 时 $\tilde{h}(K_n, K) \rightarrow 0$, 且 K 是一个紧集, 根据引理 2.2, $\{x'_n\}$ 必有子序列 $\{x'_{n_k}\}$ 使 $x'_{n_k} \rightarrow x_0 \in K$ 。故 $\{x_n\}$ 必有子序列 $\{x_{n_k}\}$, 使 $x_{n_k} \rightarrow x_0$ 。

b) 由结论(a)不妨设 $x_n \rightarrow x_0$ 。反证: 若结论(b)不成立, 即: 对任何的 $t \in F(x)$, 都有 $(\{t\} - \text{cor}(\mathcal{C})) \cap F(K) \neq \emptyset$ 成立。

由 $\tilde{h}(K_n, K) \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, 则存在 $\bar{x} \in K_n \cap K$, 使得 $(\{t\} - \text{cor}(\mathcal{C})) \cap F(\bar{x}) \neq \emptyset$ 。

由 $\sup_{x \in K} \tilde{h}(F^n(x), F(x)) \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, F 的上半连续性及 $x_n \rightarrow x_0$ 可知, 对任意的 $\delta > 0$ 有:

$$t_n \in F^n(x_n) \subset U(\delta, F(x_n)) \subset U(2\delta, F(x_0)).$$

又 $F(x)$ 是紧集, 则 $t_n \in F(x_0)$, 故满足 $(\{t_n\} - \text{cor}(\mathcal{C})) \cap F(\bar{x}) \neq \emptyset$ 。进而可得: $(\{t_n\} - \text{cor}(\mathcal{C})) \cap F^n(\bar{x}) \neq \emptyset$ 。由 $\varepsilon_n \rightarrow 0$ 知: $\tilde{h}(\{t_n\} + \{\varepsilon_n\} - \text{cor}(\mathcal{C}), \{t_n\} - \text{cor}(\mathcal{C})) \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$ 。故有 $(\{t_n\} + \{\varepsilon_n\} - \text{cor}(\mathcal{C})) \cap F^n(\bar{x}) \neq \emptyset$ 。这与条件(3)矛盾。因此结论(b)成立, 即:

$$\exists t \in F(x_0), \text{s.t. } (\{t\} - \text{cor}(\mathcal{C})) \cap F(K) = \emptyset.$$

c) 利用反证法, 假设(c)的结论不成立, 即: 若 SOP 的解集是单点集, 但 $x_n \not\rightarrow x_0$ 。则存在 $\bar{\delta} > 0$ 及 $\{x_n\}$ 的一个子列 $\{x_{n_k}\}$, 使 $d(x_{n_k}, x_0) \geq \bar{\delta}$ 。由(a)知: $\{x_{n_k}\}$ 必有收敛子列, 不妨设 $x_{n_k} \rightarrow \bar{x} \in K$, 即: $d(x_{n_k}, \bar{x}) \rightarrow 0$ 。由结论(b)知:

$$\exists t \in F(\bar{x}), \text{s.t. } (\{t\} - \text{cor}(\mathcal{C})) \cap F(K) = \emptyset$$

又 SOP 的解集是单点集, 则有 $x_0 = \bar{x}$ 。这与 $d(x_{n_k}, x_0) \geq \bar{\delta}$ 矛盾。故 $x_n \rightarrow x_0$ 。

注 3.1: 定理 3.1 的结果是很有理论意义的: 尽管目标函数是近似的 ($F^n \rightarrow F$), 可行解集是近似的 ($K_n \rightarrow K$), 求解精度也是近似的 ($\varepsilon_n \rightarrow 0$), 但我们可以得到一个近似问题的近似解序列 $\{x_n\}$ 的收敛子序列 $\{x_{n_k}\}$, 并证明了该子序列的极限属于目标函数的解集 ($x_{n_k} \rightarrow x_0 \in K$)。如果把集值优化问题 F^n 的 ε_n -近似弱极小解看作有限理性下的“满意解”, 那么集值优化问题的弱极小解 x_0 被视为完全理性下的“精确解”。定理 3.1 蕴含了集值优化问题的完全理性弱极小解可以用一系列有限理性的近似弱极小解来逼近。

在上述定理中, 若 $x_n \in K_n$, 则结论仍成立, 即下述推论 3.1:

推论 3.1 设 (E, d) 是一个度量空间, \mathcal{Z} 是一个紧赋范线性空间, 且满足下列条件:

1) $\forall n=1,2,\dots$, 集值映射序列 $F^n: K \rightarrow P_0(\mathcal{Z})$ 满足: $\sup_{x \in K} \tilde{h}(F^n(x), F(x)) \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, 其中 $F: K \rightarrow P_0(\mathcal{Z})$ 是上半连续的, \tilde{h} 是 \mathcal{Z} 上的 Hausdorff 距离。

2) $\forall n=1,2,\dots$, $\{K_n\}$ 是 E 中非空子集序列, 满足 $\tilde{h}(K_n, K) \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, 其中 K 是 E 中的非空紧集, \tilde{h} 是 E 上的 Hausdorff 距离。

3) $\forall n=1,2,\dots$, $x_n \in K_n$ 满足 $\exists t_n \in F^n(x_n)$, s.t. $(\{t_n\} + \{\varepsilon_n\} - \text{cor}(\mathcal{C})) \cap F^n(K_n) = \emptyset$, 其中 $\varepsilon_n \geq 0$, $\varepsilon_n \rightarrow 0$ 。

则有:

a) $\{x_n\}$ 必有子序列 $\{x_{n_k}\}$, 使 $x_{n_k} \rightarrow x_0 \in K$ 。

b) $\exists t \in F(x_0)$, s.t. $(\{t\} - \text{cor}(\mathcal{C})) \cap F(K) = \emptyset$ 。

c) 若 SOP 的解集是单点集, 则必有 $x_n \rightarrow x_0$ 。

在定理 3.1 中, 若 $K = K_n (n=1,2,\dots)$, 则结论仍然成立, 因此可以得到推论 3.2:

推论 3.2 设 (E, d) 是一个度量空间, \mathcal{Z} 是一个紧赋范线性空间, 且满足下列条件:

1) $\forall n=1,2,\dots$, 集值映射序列 $F^n: K \rightarrow P_0(\mathcal{Z})$ 满足: $\sup_{x \in K} \tilde{h}(F^n(x), F(x)) \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$,

其中 $F: K \rightarrow P_0(\mathcal{Z})$ 是上半连续的, \tilde{h} 是 \mathcal{Z} 上的 Hausdorff 距离。

2) K 是 E 中的非空紧集。

3) $\forall n=1,2,\dots$, $x_n \in K$ 是 SOP 的一个 ε_n -近似若极小解序列, 满足 $\exists t_n \in F^n(x_n)$, s.t. $(\{t_n\} + \{\varepsilon_n\} - \text{cor}(\mathcal{C})) \cap F^n(K) = \emptyset$, 其中 $\varepsilon_n \geq 0$, $\varepsilon_n \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$ 。

则有:

a) $\{x_n\}$ 必有子序列 $\{x_{n_k}\}$, 使 $x_{n_k} \rightarrow x_0 \in K$ 。

b) $\exists t \in F(x_0)$, s.t. $(\{t\} - \text{cor}(\mathcal{C})) \cap F(K) = \emptyset$ 。

c) 若 SOP 的解集是单点集, 则必有 $x_n \rightarrow x_0$ 。

注 3.2: 在定理 3.1 以及以上两个推论中, 对目标函数 F^n 没有任何连续性的要求, 对可行解集 K_n 更没有任何闭性或紧性的要求, 这表明该定理的条件较弱, 应用更具有普遍性。

4. 结论

本文利用有限理性的思想讨论了集值优化问题逼近定理, 我们给出了集值优化问题的逼近定理和两个推论, 并证明了在一定假设条件下, 集值优化问题的弱极小解可以用有限理性来逼近完全理性, 为集值优化问题的算法研究提供了基础。

参考文献

- [1] Gutiérrez, C., Huerga, L., Köbis, E., et al. (2021) A Scalarization Scheme for Binary Relations with Applications to Set-Valued and Robust Optimization. *Journal of Global Optimization*, **79**, 233-256. <https://doi.org/10.1007/s10898-020-00931-x>
- [2] Crespi, G.P., Kuroiwa, D. and Rocca, M. (2017) Quasiconvexity of Set-Valued Maps Assures Well-Posedness of Robust Vector Optimization. *Annals of Operations Research*, **251**, 89-104. <https://doi.org/10.1007/s10479-015-1813-9>
- [3] Azimov, A.Y. (2008) Duality for Set-Valued Multiobjective Optimization Problems. Part 2: Optimal Control. *Journal of Optimization Theory and Applications*, **137**, 75-88. <https://doi.org/10.1007/s10957-007-9314-x>
- [4] Hamel, A.H., Heyde, F., Löhne, A., et al. (2015) Set Optimization and Applications—The State of the Art: From Set Relations to Set-Valued Risk Measures. Springer, Berlin. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-48670-2>
- [5] Qiu, Y. and Liu, X. (2021) Iterative Algorithms for a System of Variational Inclusions Involving Set-Valued Quasi-Contractive Mappings in Banach Spaces. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, **42**, 865-882. <https://doi.org/10.1080/01630563.2021.1933519>
- [6] Khan, A.A., Tammer, C. and Zalinescu, C. (2016) Set-Valued Optimization. Springer, Berlin. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-54265-7>
- [7] Chinaie, M., Fakhar, F., Fakhar, M., et al. (2019) Weak Minimal Elements and Weak Minimal Solutions of a Noncon-

- vex Set-Valued Optimization Problem. *Journal of Global Optimization*, **75**, 131-141. <https://doi.org/10.1007/s10898-019-00810-0>
- [8] Som, K. and Vetrivel, V. (2023) Global Well-Posedness of Set-Valued Optimization with Application to Uncertain Problems. *Journal of Global Optimization*, **85**, 511-539. <https://doi.org/10.1007/s10898-022-01208-1>
- [9] Long, X.J., Huang, Y.Q. and Tang, L.P. (2015) Generic Stability of the Solution Mapping for Set-Valued Optimization Problems. *Journal of Inequalities and Applications*, **2015**, Article No. 349. <https://doi.org/10.1186/s13660-015-0875-1>
- [10] Li, X.B., Wang, Q.L. and Lin, Z. (2016) Stability of Set-Valued Optimization Problems with Naturally Quasi-Functions. *Journal of Optimization Theory and Applications*, **168**, 850-863. <https://doi.org/10.1007/s10957-015-0802-0>
- [11] Simon, H.A. (1955) A Behavioral Model of Rational Choice. *The Quarterly Journal of Economics*, **69**, 99-118. <https://doi.org/10.2307/1884852>
- [12] Anderlini, L. and Canning, D. (2001) Structural Stability Implies Robustness to Bounded Rationality. *Journal of Economic Theory*, **101**, 395-422. <https://doi.org/10.1006/jeth.2000.2784>
- [13] Yu, C. and Yu, J. (2006) On Structural Stability and Robustness to Bounded Rationality. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, **65**, 583-592. <https://doi.org/10.1016/j.na.2005.09.039>
- [14] Yu, C. and Yu, J. (2006) Bounded Rationality in Multiobjective Games. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, **67**, 930-937. <https://doi.org/10.1016/j.na.2006.06.050>
- [15] Yu, J., Yang, H. and Yu, C. (2009) Structural Stability and Robustness to Bounded Rationality for Non-Compact Cases. *Journal of Global Optimization*, **44**, 149-157. <https://doi.org/10.1007/s10898-008-9316-8>
- [16] 俞建. 几类考虑有限理性平衡问题解的稳定性[J]. 系统科学与数学, 2009, 29(7): 999-1008.
- [17] Yu, J., Yang, Z. and Wang, N. (2016) Further Results on Structural Stability and Robustness to Bounded Rationality. *Journal of Mathematical Economics*, **67**, 49-53. <https://doi.org/10.1016/j.jmateco.2016.09.009>
- [18] Jia, W., Qiu, X. and Peng, D. (2020) An Approximation Theorem for Vector Equilibrium Problems under Bounded Rationality. *Mathematics*, **8**, 45. <https://doi.org/10.3390/math8010045>
- [19] Hung, V.N., Tam, V.M., O'Regan, D., et al. (2020) A New Class of Generalized Multiobjective Games in Bounded Rationality with Fuzzy Mappings: Structural (λ, ε) -Stability and (λ, ε) -Robustness to ε -Equilibria. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **372**, Article ID: 112735.
- [20] Zhao, W., Yang, H., Deng, X., et al. (2021) Stability of Equilibria for Population Games with Uncertain Parameters under Bounded Rationality. *Journal of Inequalities and Applications*, **2021**, Article No. 15. <https://doi.org/10.1186/s13660-020-02544-0>
- [21] 俞建. 有限理性与博弈论中平衡点集的稳定性的稳定性[M]. 北京: 科学出版社, 2017.
- [22] Qiu, X., Jia, W. and Peng, D. (2018) An Approximation Theorem and Generic Convergence for Equilibrium Problems. *Journal of Inequalities and Applications*, **2018**, Article No. 30. <https://doi.org/10.1186/s13660-018-1617-y>
- [23] 丘小玲, 贾文生. 有限理性下变分不等式的逼近定理[J]. 数学物理学报, 2019, 39(4): 730-737.
- [24] 俞建. 博弈论与非线性分析[M]. 北京: 科学出版社, 2008.