Pure Mathematics 理论数学, 2024, 14(3), 1-8
Published Online March 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.143080

二维预泊松代数的分类

董新潞

辽宁师范大学数学学院，辽宁 大连

收稿日期：2024年1月22日；录用日期：2024年3月5日；发布日期：2024年3月12日

摘 要

本文主要研究低维预泊松代数的分类，以二维Zinbiel代数的分类为基础，计算低维预泊松代数上的预李代数的左乘运算在某组基下对应的矩阵，确定了对应的预李代数的类型。最后，通过具体计算得到了预泊松代数的同构关系，从而得到了二维预泊松代数的分类。

关键词

预泊松代数，预李代数，Zinbiel代数

Classification of 2-Dimensional Pre-Poisson Algebras

Xinlu Dong

School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Received: Jan. 22nd, 2024; accepted: Mar. 5th, 2024; published: Mar. 12th, 2024

Abstract

This paper mainly studies the classification of low-dimensional pre-poisson algebras. Based on the classification of two-dimensional Zinbiel algebras, the matrix corresponding to the left multiplication operation of the pre-poisson algebras on the low-dimensional pre-poisson algebras is calculated under a certain set of bases, and the type of the corresponding pre-poisson algebras is determined. Finally, the isomorphic relation of pre-poisson algebras is obtained through concrete calculation, and the classification of two-dimensional pre-poisson algebras is obtained.

Keywords

Pre-Poisson Algebra, Pre-Lie Algebra, Zinbiel Algebra

文章引用: 董新潞. 二维预泊松代数的分类[J]. 理论数学, 2024, 14(3): 1-8.
DOI: 10.12677/pm.2024.143080

1. 引言

泊松代数起源于 20 世纪 70 年代对泊松几何的研究，并出现在数学和物理学的极其广泛的领域，如泊松流形、量子化理论、量子群等。预泊松代数和泊松代数有着密切的联系。在 1999 年，Aguiar 引入了预泊松代数的概念[1]，即一个预泊松代数包含一个 Zinbiel 代数和一个满足相容条件的预李代数。由于代数分类(直至同构)是非结合代数理论中的一个经典问题，而泊松代数、Zinbiel 代数和预李代数的分类已经分别在[2] [3] [4]中给出，本文主要考虑在此分类的基础上研究二维预泊松代数的分类。

2. 预备知识

定义 1.1 [5]设 A 是复数域上的向量空间，A 上具有双线性运算 $\cdot,[\,,\,]: A\times A\to A$，若 $(A,\cdot)$ 是交换结合代数，$(A,[\,,\,])$ 是李代数，且满足相容条件

$$[x,y\cdot z]=[x,y]\cdot z+y\cdot[x,z],\ \forall x,y,z\in A,$$

则称三元组 $(A,\cdot,[\,,\,])$ 为泊松代数。

定义 1.2 [6]设 A 是复数域上的向量空间，且有双线性运算 $*: A\times A\to A$，若 $*$ 满足

$$x*(y*z)=(y*x)*z+(x*y)*z,\ \forall x,y,z\in A,$$

则称 $(A,*)$ 为 Zinbiel 代数。

定义 1.3 [7]设 A 是复数域上的向量空间，且有双线性运算 $\circ$，若 $\circ$ 满足

$$x\circ(y\circ z)-(x\circ y)\circ z=y\circ(x\circ z)-(y\circ x)\circ z,\ \forall x,y,z\in A,$$

则称 $(A,\circ)$ 为预李代数。

定义 1.4 [1]设 A 是复数域上的向量空间，$*,\circ$ 是 A 上的双线性运算，如果 $(A,*)$ 是 Zinbiel 代数，$(A,\circ)$ 是预李代数，且满足

$$(x\circ y-y\circ x)*z=x\circ(y*z)-y*(x\circ z), \tag{1.1}$$

$$(x*y+y*x)\circ z=x*(y\circ z)+y*(x\circ z), \tag{1.2}$$

其中 $x,y,z\in A$，则称 $(A,*,\circ)$ 为预泊松代数。

设 $(A,*,\circ)$ 是预泊松代数，L_*,R_* 分别为 A 关于 $*$ 的左乘，右乘运算，其中

$$L_*(x)y=x*y,\ R_*(x)y=y*x,\ \forall x,y\in A.$$

同理可定义 A 关于 $\circ$ 的左乘，右乘运算，设 $L_\circ,R_\circ$ 分别为 A 关于 $\circ$ 的左乘，右乘运算，其中

$$L_\circ(x)y=x\circ y,\ R_\circ(x)y=y\circ x,\ \forall x,y\in A.$$

定义 1.5 设 $(A_1,*_1,\circ_1)$ 与 $(A_2,*_2,\circ_2)$ 是泊松代数，$\varphi: A_1\to A_2$ 为线性映射，若 φ 满足

$$\varphi(x*_1 y)=\varphi(x)*_2\varphi(y),\ \varphi(x\circ_1 y)=\varphi(x)\circ_2\varphi(y),\ \forall x,y\in A,$$

则称 φ 为 $(A_1,*_1,\circ_1)$ 到 $(A_2,*_2,\circ_2)$ 的同态映射。

特别地，若 φ 为双射，则称 φ 为 $(A_1,*_1,\circ_1)$ 和 $(A_2,*_2,\circ_2)$ 的同构映射。显然，若两个泊松代数 $(A_1,*_1,\circ_1)$ 和 $(A_2,*_2,\circ_2)$ 同构，则作为 Zinbiel 代数，$(A_1,*_1)$ 和 $(A_2,*_2)$ 同构，作为预李代数，$(A_1,\circ_1)$ 和 $(A_2,\circ_2)$ 同构。

定理 1 [8]若 A 为二维 Zinbiel 代数，则存在 A 的一组基 e_1,e_2，满足 $e_1*e_1=e_2$。

定理 2 [4]设 A 是复数域上的二维左对称代数，则 A 一定同构于下面的(互不同构)左对称代数：

$$A^1=\left\langle e_1,e_2 \mid e_ie_j=\delta_{ij}e_i,i,j=1,2\right\rangle;$$

$$A^2=\left\langle e_1,e_2 \mid e_1e_1=e_1,e_1e_2=e_2e_1=e_2,e_2e_2=0\right\rangle;$$

$$A^3=\left\langle e_1,e_2 \mid e_1e_1=e_1,e_1e_2=e_2e_1=e_2e_2=0\right\rangle;$$

$$A^4=\left\langle e_1,e_2 \mid e_1e_1=e_1=e_1e_2=e_2e_1=e_2e_2=0\right\rangle;$$

$$A^5=\left\langle e_1,e_2 \mid e_1e_1=e_2,e_1e_2=e_2e_1=e_2e_2=0\right\rangle;$$

$$A^6=\left\langle e_1,e_2 \mid e_1e_1=e_1e_2=0,e_2e_1=-e_1,e_2e_2=-e_2\right\rangle;$$

$$A^7\in\left\{A_k \mid A_k=\left\langle e_1,e_2 \mid e_1e_1=e_1e_2=0,e_2e_1=-e_1,e_2e_2=ke_2\right\rangle,k\neq-1\right\};$$

$$A_{-1}=\left\langle e_1,e_2 \mid e_1e_1=e_1e_2=0,e_2e_1=-e_1,e_2e_2=e_1-e_2\right\rangle;$$

$$A^8=\left\langle e_1,e_2 \mid e_1e_1=0,e_1e_2=e_1,e_2e_1=0,e_2e_2=e_2\right\rangle;$$

$$A^9\in\left\{A_l \,\middle|\, A_l=\left\langle e_1,e_2 \mid e_1e_1=0,e_1e_2=le_1,e_2e_1=(l-1)e_1,e_2e_2=e_1+le_2\right\rangle,l\neq0\right\};$$

$$A^{10}=\left\langle e_1,e_2 \mid e_1e_1=2e_1,e_1e_2=e_2,e_2e_1=0,e_2e_2=e_1\right\rangle.$$

3. 二维预泊松代数上关于预李代数的左乘运算

定理 3 设 $(A,*,\circ)$ 是二维预泊松代数，则存在 A 的一组基 e_1,e_2，有 $e_1*e_1=e_2$，且满足

$$e_1\circ e_1=\lambda e_1+\mu e_2,\ e_1\circ e_2=e_2\circ e_1=\lambda e_2,$$

其中 $\lambda,\mu\in\mathbb{C}$。

证 由定理 1 可知，存在 A 的一组基 e_1,e_2 使 $e_1*e_1=e_2$，从而关于 $*$ 的左乘运算 $L_*(e_1),L_*(e_2)$ 在 e_1,e_2 下对应的矩阵为

$$L_*(e_1)=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\ L_*(e_2)=0.$$

设关于 $\circ$ 的左乘运算 $L_\circ(e_1),L_\circ(e_2)$ 在 e_1,e_2 下对应的矩阵为

$$L_\circ(e_1)=\begin{pmatrix}a_1&a_2\\a_3&a_4\end{pmatrix},\ L_\circ(e_2)=\begin{pmatrix}b_1&b_2\\b_3&b_4\end{pmatrix},\ a_i,b_i\in\mathbb{C},\ i=1,2,3,4.$$

根据预泊松代数的定义，由(1.1) (1.2)知关于 $\circ$ 的左乘运算需要满足的条件是：

$$L_\circ(x*y+y*x)=L_*(x)L_\circ(y)+L_*(y)L_\circ(x), \tag{2.1}$$

$$L_*(x\circ y+y\circ x)=L_\circ(x)L_*(y)+L_*(y)L_\circ(x). \tag{2.2}$$

一方面，在等式(2.1)中，分别考虑 x,y 取基 e_1,e_2，有下列 4 种情况：

(1) 若 $x=e_1,y=e_1$，有

$$L_{\circ}(2e_1 * e_1) = 2L_{\circ}(e_2) = 2L_*(e_1)L_{\circ}(e_1),$$

即

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix},$$

通过计算可得

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}.$$

即

$$b_1 = b_2 = 0,\ b_3 = a_1,\ b_4 = a_2.$$

(2) 若 $x = e_1, y = e_2$，有

$$L_{\circ}(e_1 * e_2 + e_2 * e_1) = L_*(e_1)L_{\circ}(e_2) + L_*(e_2)L_{\circ}(e_1),$$

即

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix}.$$

通过计算得对任意 a_1, a_2 等式恒成立。

(3) 若 $x = e_2, y = e_1$，有

$$L_{\circ}(e_2 * e_1 + e_1 * e_2) = L_*(e_2)L_{\circ}(e_1) + L_*(e_1)L_{\circ}(e_2),$$

即

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix}.$$

通过计算得对任意 a_1, a_2，等式恒成立。

(4) 若 $x = e_2, y = e_2$，有

$$0 = L_{\circ}(2e_2 * e_2) = 2L_*(e_2)L_{\circ}(e_2).$$

由 $L_*(e_2) = 0$ 可知等式恒成立。

在等式(2.2)中，分别考虑 x, y 取基 e_1, e_2，有下列 4 种情况：

(1) 若 $x = e_1, y = e_1$，有

$$0 = L_0(e_1)L_*(e_1) - L_*(e_1)L_0(e_1),$$

即

$$0 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ a_4 - a_1 & -a_2 \end{pmatrix},$$

计算得

$$a_2 = 0,\ a_1 = a_4.$$

(2) 若 $x = e_1, y = e_2$，有

$$0 = L*(e_1 \circ e_2 - e_2 \circ e_1) = L_{\circ}(e_1)L_*(e_2) - L_*(e_2)L_{\circ}(e_1),$$

由 $L_*(e_2)=0$ 可知等式恒成立。

(3) 若 $x=e_2, y=e_1$，有

$$0=L_*(e_2\circ e_1-e_1\circ e_2)=L_\circ(e_2)L_*(e_1)-L_*(e_1)L_\circ(e_2),$$

通过计算得

$$\begin{pmatrix}0 & 0\\ a_2 & 0\end{pmatrix}=0.$$

即 $a_2=0$。

(4) 若 $x=e_2, y=e_2$，有

$$0=L_0(e_2)L_*(e_2)-L_*(e_2)L_0(e_2).$$

由 $L_*(e_2)=0$ 可知等式恒成立。

此时有

$$e_1\circ e_1=a_1e_1+a_2e_2,\ e_1\circ e_2=a_1e_2,\ e_2\circ e_1=a_1e_2,\ e_2e_2=0.$$

另一方面，根据预李代数的定义，关于$\circ$的左乘运算还需要满足条件：

$$L_\circ(x\circ y-y\circ x)=L_\circ(x)L_\circ(y)-L_\circ(y)L_\circ(x). \tag{2.3}$$

在等式(2.3)中，分别考虑 x, y 取基 e_1, e_2，有下列 4 种情况：

(1) 若 $x=e_1, y=e_1$，有

$$0=L_\circ(e_1\circ e_1-e_1\circ e_1)=L_\circ(e_1)L_\circ(e_1)-L_\circ(e_1)L_\circ(e_1).$$

(2) 若 $x=e_1, y=e_2$，有

$$a_1^2=L_\circ(e_1\circ e_2-e_2\circ e_1)=L_\circ(e_1)L_\circ(e_2)-L_\circ(e_2)L_\circ(e_1).$$

(3) 若 $x=e_2, y=e_1$，有

$$a_1^2=L_\circ(e_2\circ e_1-e_1\circ e_2)=L_\circ(e_2)L_\circ(e_1)-L_\circ(e_1)L_\circ(e_2).$$

(4) 若 $x=e_2, y=e_2$，有

$$0=L_\circ(e_2\circ e_2-e_2\circ e_2)=L_\circ(e_2)L_\circ(e_2)-L_\circ(e_2)L_\circ(e_2).$$

通过计算，以上 4 个方程对任意 a_1, a_2，等式恒成立。综上，可知

$$e_1\circ e_1=a_1e_1+a_3e_2,\ e_1\circ e_2=a_1e_2,\ e_2\circ e_1=a_1e_2.$$

取 $\lambda=a_1, \mu=a_3$，则对于 A 的基 e_1, e_2，满足

$$e_1\circ e_1=\lambda e_1+\mu e_2,\ e_1\circ e_2=e_2\circ e_1=\lambda e_2,$$

其中 $\lambda, \mu\in\mathbb{C}$。

4. 二维预泊松代数的类型

定理 4 设 $(A,*,\circ)$ 是二维预泊松代数，e_1, e_2 为 A 的基，则 $(A,*,\circ)$ 中的运算$\circ$为以下几种类型：

(1) $e_1\circ e_1=e_1\circ e_2=e_2\circ e_1=e_2\circ e_2=0$，$(A,\circ)$ 同构于 A^4 型的预李代数；

(2) $e_1\circ e_1=\lambda e_1, e_1\circ e_2=e_2\circ e_1=\lambda e_2$，$(A,\circ)$ 同构于 A^2 型的预李代数；

(3) $e_1\circ e_1=\mu e_2, e_1\circ e_2=e_2\circ e_1=e_2\circ e_2=0$，$(A,\circ)$ 同构于 A^5 型的预李代数；

(4) $e_1 \circ e_1 = \lambda e_1 + \mu e_2, e_1 \circ e_2 = e_2 \circ e_1 = \lambda e_2$，$(A,\circ)$同构于$A^2$型的预李代数。

证 由定理 3，A上有基e_1, e_2满足$e_1 * e_1 = e_2$，且

$$e_1 \circ e_1 = \lambda e_1 + \mu e_2, e_1 \circ e_2 = e_2 \circ e_1 = \lambda e_2, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}.$$

根据二维左对称代数的分类，当$\lambda = 0, \mu = 0$时，即

$$e_1 \circ e_1 = e_1 \circ e_2 = e_2 \circ e_1 = e_2 \circ e_2 = 0,$$

此时$(A,\circ)$同构于A^4型的预李代数。

当$\lambda \neq 0, \mu = 0$时，即

$$e_1 \circ e_1 = \lambda e_1, \ e_1 \circ e_2 = e_2 \circ e_1 = \lambda e_2,$$

作非退化线性替换，$e_1' = \frac{1}{\lambda} e_1$，$e_2' = \frac{1}{\lambda^2} e_2$，有

$$e_1' \circ e_1' = \frac{1}{\lambda} e_1 \circ \frac{1}{\lambda} e_1 = \frac{1}{\lambda} e_1 = e_1',$$

$$e_1' \circ e_2' = \frac{1}{\lambda} e_1 \circ \frac{1}{\lambda^2} e_2 = \frac{1}{\lambda^2} e_2 = e_2',$$

$$e_2' \circ e_1' = \frac{1}{\lambda^2} e_2 \circ \frac{1}{\lambda} e_1 = \frac{1}{\lambda^2} e_2 = e_2'.$$

此时$(A,\circ)$同构于A^2型的预李代数。

当$\lambda = 0, \mu \neq 0$时，即

$$e_1 \circ e_1 = \mu e_2, \ e_1 \circ e_2 = e_2 \circ e_1 = e_2 \circ e_2 = 0,$$

作非退化线性替换，$e_1' = \frac{1}{\mu} e_1$，$e_2' = \frac{1}{\mu} e_2$，有

$$e_1' \circ e_1' = \frac{1}{\mu} e_1 \circ \frac{1}{\mu} e_1 = \frac{1}{\mu} e_2 = e_2',$$

$$e_1' \circ e_2' = e_2' \circ e_1' = e_2' \circ e_2' = 0.$$

此时$(A,\circ)$同构于A^5型的预李代数。

当$\lambda \neq 0, \mu \neq 0$时，即

$$e_1 \circ e_1 = \lambda e_1 + \mu e_2, \ e_1 \circ e_2 = e_2 \circ e_1 = \lambda e_2,$$

作非退化线性替换，令$e_1' = \frac{1}{\lambda} e_1 - \frac{\mu}{\lambda^2} e_2$，$e_2' = e_2$，有

$$e_1' \circ e_1' = \frac{1}{\lambda^2} e_1 \circ e_1 - \frac{2\mu}{\lambda^3} e_1 \circ e_2 = \frac{1}{\lambda^2}(\lambda e_1 + \mu e_2) - \frac{2\mu}{\lambda^3} e_2 = \frac{1}{\lambda} e_1 - \frac{\mu}{\lambda^2} e_2 = e_1',$$

$$e_1' \circ e_2' = \left(\frac{1}{\lambda} e_1 - \frac{\mu}{\lambda^2} e_2\right) \circ e_2 = \frac{1}{\lambda} e_1 \circ e_1 = e_2 = e_2',$$

$$e_2' \circ e_1' = e_2 \circ \left(\frac{1}{\lambda} e_1 - \frac{\mu}{\lambda^2} e_2\right) = \frac{1}{\lambda} e_1 \circ e_1 = e_2 = e_2'.$$

此时$(A,\circ)$同构于A^2型的预李代数。

5. 二维预泊松代数在同构意义下的分类

定理 5 设$(A,*,\circ)$是二维预泊松代数，e_1, e_2为A的基，则二维预泊松代数在同构意义下有以下三类：

(1) $e_1 * e_1 = e_2; e_1 \circ e_1 = e_1 \circ e_2 = e_2 \circ e_1 = e_2 \circ e_2 = 0$。

(2) $e_1 * e_1 = e_2; e_1 \circ e_1 = \lambda e_1,\ e_1 \circ e_2 = e_2 \circ e_1 = \lambda e_2,\ e_2 \circ e_2 = 0$。

(3) $e_1 * e_1 = e_2; e_1 \circ e_1 = \mu e_2,\ e_1 \circ e_2 = e_2 \circ e_1 = e_2 \circ e_2 = 0$。

其中 $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$。

证 由定理 4，设 $(A,*,\circ)$ 是二维预泊松代数，取 e_1, e_2 为 A 的一组基，使 $e_1 * e_1 = e_2$，此时，$(A,\circ)$ 同构于 A^4 型、A^2 型、A^5 型、A^2 型的预李代数。

由于在 A 上 A^4 型、A^2 型、A^5 型对应的预李代数类型不同，因此定理 4 中的第(1)，(2)，(3)种类型不同构，从而只需要计算定理 4 中的第(2)种和第(4)种是否同构即可。

设 $(A_1,*_1,\circ_1)$ 是定理 4 中的第(2)种预泊松代数，$(A_2,*_2,\circ_2)$ 是定理 4 中的第(4)种预泊松代。取 e_1, e_2 为满足定理 4 中第(2)种预泊松代数的 A_1 的一组基，e_1', e_2' 为满足定理 4 中第(4)种预泊松代数 A_2 的一组基。下面找可逆线性变换 $f: A_1 \to A_2$，满足

$$f(e_i *_1 e_j) = f(e_i) *_2 f(e_j),\ f(e_i \circ_1 e_j) = f(e_i) \circ_2 f(e_j),\ \forall i, j = 1,2.$$

即 f 使 $(A_1,*_1,\circ_1)$ 与 $(A_2,*_2,\circ_2)$ 同构。

设线性变换 f 在基 e_1, e_2 下的矩阵为 $F = (f_{ij})_{2\times 2}$，即

$$f(e_1,e_2) = (e_1', e_2')\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix}, f_{ij} \in \mathbb{C}, i, j = 1,2.$$

一方面，f 为 Zinbiel 代数的同构需要满足以下 4 个方程：

$$f(e_1 * e_1) = f(e_2) = f(e_1) * f(e_1) = (f_{11}e_1' + f_{21}e_2') * (f_{11}e_1' + f_{21}e_2'),$$

$$f(e_1 * e_2) = 0 = f(e_1) * f(e_2) = (f_{11}e_1' + f_{21}e_2') * (f_{12}e_1' + f_{22}e_2'),$$

$$f(e_2 * e_1) = 0 = f(e_2) * f(e_1) = (f_{12}e_1' + f_{22}e_2') * (f_{11}e_1' + f_{21}e_2'),$$

$$f(e_2 * e_2) = 0 = f(e_2) * f(e_2) = (f_{12}e_1' + f_{22}e_2') * (f_{12}e_1' + f_{22}e_2').$$

通过计算得

$$f_{22} = f_{11}^2, f_{12} = 0.$$

此时

$$f(e_1,e_2) = (e_1', e_2')\begin{pmatrix} f_{11} & 0 \\ f_{21} & f_{11}^2 \end{pmatrix}.$$

另一方面，f 为预李代数的同构需要满足以下 4 个方程：

$$f(e_1 \circ_1 e_1) = \lambda f(e_1) = f(e_1) \circ_2 f(e_1) = (f_{11}e_1' + f_{21}e_2') \circ_2 (f_{11}e_1' + f_{21}e_2'),$$

$$f(e_1 \circ_1 e_2) = \lambda f(e_2) = f(e_1) \circ_2 f(e_2) = (f_{11}e_1' + f_{21}e_2') \circ_2 (f_{11}^2 e_2'),$$

$$f(e_2 \circ_1 e_1) = \lambda f(e_2) = f(e_2) \circ_2 f(e_1) = (f_{11}^2 e_2') \circ_2 (f_{11}e_1' + f_{21}e_2'),$$

$$f(e_2 \circ_1 e_2) = 0 = f(e_2) \circ_2 f(e_2) = (f_{11}^2 e_2') \circ_2 (f_{11}^2 e_2').$$

由于 f 为同构映射，则 $f_{11} \neq 0$，通过计算得

$$f_{11}=\frac{\lambda}{\gamma}, f_{21}=-\frac{\lambda\mu}{\gamma^2}, f_{22}=\pm\frac{\lambda}{\gamma}.$$

综上，取 $f_{11}=\frac{\lambda}{\gamma}, f_{21}=-\frac{\lambda\mu}{\gamma^2}, f_{22}=\frac{\lambda}{\gamma}$，则

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} f_{11} & 0 \\ f_{21} & f_{11}^2 \end{vmatrix}=f_{11}^3=\frac{\lambda^3}{\mu^3}\neq 0.$$

因此，取

$$F=\begin{pmatrix} \frac{\lambda}{\gamma} & 0 \\ -\frac{\lambda\mu}{\gamma^2} & \frac{\lambda}{\gamma} \end{pmatrix},$$

f 即为 $(A_1,*_1,\circ_1)$ 和 $(A_2,*_2,\circ_2)$ 的同构映射。因此，二维预泊松代数 $(A,*,\circ)$ 在同构意义下有三类。

通过定理 5，我们得到了二维我们得到了二维的预泊松代数在同构意义下的完全分类，为进一步考虑预泊松代数的分类、扩张以及预泊松代数上的特殊算子等问题提供了基础。

6. 总结与展望

本文通过计算二维预泊松代数上的预李代数的类型，得到二维预泊松代数的同构关系，从而确定了二维预泊松代数的分类。在此研究方法的基础上，以三维 Zinbiel 代数的分类为基础，可以计算出三维预泊松代数的同构关系以及分类，该研究结果对预泊松代数进一步研究提供了便捷的分类结果，具有深刻意义。

参考文献

[1] Aguiar, M. (2000) Pre-Poisson Algebras. *Letters in Mathematical Physics*, **54**, 263-277. https://doi.org/10.1023/A:1010818119040

[2] Grabowski, J., Marmo, G. and Perelomov, A.M. (1993) Poisson Structures: Towards a Classification. *Modern Physics Letters A*, **8**, 1719-1733. https://doi.org/10.1142/S0217732393001458

[3] Kaygorodov, I., Alvarez, A.M. and Mello, D.C.T. (2023) Central Extensions of 3-Dimensional Zinbiel Algebras. *Ricerche di Matematica*, **72**, 921-947. https://doi.org/10.1007/s11587-021-00604-1

[4] 白承铭, 孟道骥. 二维左对称代数的分类[J]. 科学通报, 1996(23): 2207.

[5] Frédéric, C. and Muriel, L. (2001) Pre-Lie Algebras and the Rooted Trees Operad. *International Mathematics Research Notices*, **8**, 395-408.

[6] Loday, J.-L. (1995) Cup Product for Leibniz Cohomology and Dual Leibniz Algebras. *Mathematica Scandinavica*, **77**, 189-196. https://doi.org/10.7146/math.scand.a-12560

[7] Gerstenhaber, M. (1963) The Cohomology Structure of an Associative Ring. *Annals of Mathematics*, **78**, 267-288. https://doi.org/10.2307/1970343

[8] Dzhumadil'Daev, A.S. and Tulenbaev, K.M. (2005) Nilpotency of Zinbiel Algebras. *Journal of Dynamical and Control Systems*, **11**, 195-213. https://doi.org/10.1007/s10883-005-4170-1