Pure Mathematics 理论数学, 2024, 14(4), 1-17
Published Online April 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.144105

具有强阻尼的 Boussinesq 方程指数吸引子的存在性

张梦琪

西北师范大学数学与统计学院，甘肃 兰州

收稿日期：2024年2月22日；录用日期：2024年3月14日；发布日期：2024年4月7日

摘 要

本文研究了带有强阻尼的 Boussinesq 方程指数吸引子的存在性。Boussinesq 方程作为一个重要模型，被广泛地应用于描述一些大气物理流，如大气中的流体和海洋中的流体遇到的湍流现象，并在天气预报、船舶海运等实际生活中也有着广泛的应用。首先，在本文中运用能量估计的方法证明了空间 $H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)$ 和 $L^2(\Omega)\times(H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega))$ 中有界吸收集的存在性；其次，通过算子分解的方法获得了该问题的指数吸引子的存在性。作为额外的收获，本文获得了全局吸引子具有有限的分形维数。

关键词

Boussinesq 方程，算子分解，指数吸引子

Existence of Exponential Attractor with Strong Damping Boussinesq Equation

Mengqi Zhang

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu

Received: Feb. 22nd, 2024; accepted: Mar. 14th, 2024; published: Apr. 7th, 2024

文章引用: 张梦琪. 具有强阻尼的Boussinesq方程指数吸引子的存在性[J]. 理论数学, 2024, 14(4): 1-17.
DOI: 10.12677/pm.2024.144105

Abstract

In this paper, the existence of exponential attractors of Boussinesq equation with strong damping is studied. The Boussinesq equation, as an important model, has been widely used to describe some atmospheric physical flows, such as turbulence encountered by fluids in the atmosphere and fluids in the ocean, and has also been widely used in practical life such as weather forecasting and shipping. First of all, in this article, the existence of bounded absorption set in space $H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ and $L^2(\Omega) \times (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$ is proved by energy estimation method; Secondly, we obtain the existence of the exponential attractor by the method of operator decomposition. As a byproduction, we achieve that the global attractor has a finite fractal dimension.

Keywords

Boussinesq Equation, Operator Decomposition, Exponential Attractors

1. 引言

本文考虑如下带有强阻尼的 Boussinesq 方程指数吸引子的存在性,

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + \Delta^2 u + \Delta^2 u_t - \Delta u_t - \Delta g(u) = f(x), & x \in \Omega, \ t \in \mathbb{R}_+, \ \mathbb{R}_+ = [0, +\infty), \\ u(x,0) = u_0(x)\ , \ u_t(x,0) = u_1(x), & x \in \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = \Delta u|_{\partial\Omega} = 0, & \forall t \geq 0, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $u = u(x,t)$ 是未知函数, 表示流体自由表面的运动, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 3)$ 是具有光滑边界的有界区域, 外力项 $f(\cdot) \in V_2^{-1}$.

1872年, Boussinesq [1] 在研究浅水波水面的长波传播过程中, 提出了一维空间中的非线性水波

控制方程,

$$u_{tt} - u_{xx} + a u_{xxxx} = b(u^2)_{xx}, \tag{1.2}$$

其中 u 表示流体自由表面的运动, 常数 a, b 依赖于流体的深度和水波的特征速度. 当 $a > 0$ 时, 方程 (1.2) 被称为"好"的 Boussinesq 方程; 当 $a < 0$ 时, 方程 (1.2) 被称为"坏"的 Boussinesq 方程. 在文献 [2,3] 中, 研究了具有阻尼的 Boussinesq 方程的长时间动力学, 建立了自然能量空间中全局吸引子和指数吸引子的存在性. 文献 [4,5] 研究了 Kirchhoff-Boussinesq 型方程. 文献 [6–9] 研究了具有阻尼的广义 Boussinesq 方程的 Cauchy 问题, 获得了方程解的存在性以及在具有时间解的爆破的相关条件. 但研究发现, 全局吸引子具有本质缺陷: 吸引相空间中任意有界集的速率可能是任意慢的, 并且它的分形维数可能无限. 而指数吸引子解决了这些问题, 它不仅具有有限的分形维数, 并且吸引速率是呈指数型的, 且是可测的. 因此, 在文献 [10] 中, 杨志坚研究了具阻尼的 Boussinesq 方程,

$$u_{tt} + \Delta^2 u - \Delta u_t - \Delta g(u) = f(x), \tag{1.3}$$

解的长时间行为, 在 $g(u)$ 满足非超临界条件下得到了对应解算子半群全局吸引子及指数吸引子的存在性. 在文献 [11] 中耿范等人研究了具有阻尼和固定边界条件的 Boussinesq 方程,

$$u_{tt} - \Delta u + \Delta^2 u - \Delta u_t - \Delta \mathrm{g}(u) = f(x), \tag{1.4}$$

获得了方程 (1.4) 指数吸引子的存在性. 因此主要基于文 [10,11] 的研究, 我们关注具有强耗散结构的 Boussinesq 方程 (1.1) 指数吸引子的存在性.

2. 预备知识

不失一般性, 对于任意的 $s \in \mathbb{R}$, 定义由算子 A 生成的 Hilbert 空间族 $V_s = D(A^{\frac{s}{4}})$, 对应的内积与范数分别记为

$$(u, v)_s = (A^{\frac{s}{4}} u, A^{\frac{s}{4}} v), \quad \|u\|_{V_s} = \|A^{\frac{s}{4}} u\|,$$

特别地,

$$\|u\|_{V_1} = \|A^{\frac{1}{4}} u\| = \|\nabla u\|, \quad \|u\|_{V_2} = \|A^{\frac{1}{2}} u\| = \|\Delta u\|.$$

其中 $A^{\frac{1}{2}} = -\Delta : V_2 \to V_2^{-1}$, 显然算子 $A^s (s \in \mathbb{R})$ 是严格正的.

当 $s = 0$ 时, 通常记 $H = V_0 = L^2(\Omega)$, 分别用 $\|\cdot\|$ 和 $(\cdot, \cdot)$ 表示 H 的内积和范数, 令 $V_1 = H_0^1(\Omega)$, $V_2 = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, 相应的内积和范数分别定义为

$$(u, v) = \int_\Omega u(x) v(x) dx, \ \ \|u\|^2 = \int_\Omega |u(x)|^2 dx;$$

$$(u, v)_{V_2} = (A^{\frac{1}{2}} u, A^{\frac{1}{2}} v), \ \ \|u\|_{V_2}^2 = \|A^{\frac{1}{2}} u\|^2 = \|\Delta u\|^2.$$

用 $\|Au\|$ 表示 $D(A)$ 的范数, 其中

$$D(A) = \{u \in H^4(\Omega) : u|_{\partial\Omega} = \Delta u|_{\partial\Omega} = 0\}.$$

假设 H^{-1}, V_1^{-1}, V_2^{-1} 分别是 H, V_1, V_2 的对偶空间，则显然有

$$V_2 \subset V_1 \subset H \subset H^{-1} \subset V_1^{-1} \subset V_2^{-1},$$

并且有紧嵌入 $V_{s_2} \Subset V_{s_1}, (\forall s_1 < s_2)$ 和 Poincaré 不等式

$$\|u\|_{V_{s_1}}^2 \leq \lambda_1^{-\frac{s_2-s_1}{2}} \|u\|_{V_{s_2}}^2, \ \ \forall u \in V_{s_2},$$

特别地, 根据 Poincaré 不等式, 成立

$$\|A^{\frac{1}{2}}u\|^2 \geq \lambda_1 \|u\|^2, \ \ \|A^{\frac{1}{2}}u\|^2 \geq \lambda_1^{\frac{1}{2}} \|A^{\frac{1}{4}}u\|^2, \ \ \forall u \in V_2.$$

其中 $\lambda_1 > 0$ 是 Δ^2 满足铰链边界条件 $u|_{\partial\Omega} = \Delta u|_{\partial\Omega} = 0$ 的第一特征值.

方程 (1.1) 中的非线性项 $g(u)$ 是 Lipschitz 连续的, 且满足如下的条件：

(Q_1) $\liminf\limits_{|s|\to\infty} \frac{g(s)}{s} \geq -\lambda_1$, $G(s) = \int_0^s g(r)dr$, $\forall s \in \mathbb{R}$;

(Q_2) $|g'(s)| \leq k_0(1 + |s|^{\frac{2}{N-2}})$, $N \geq 3$.

由(Q_1)可知, 存在两个正常数 M_1, M_2 及 $\sigma = \sigma(\lambda_1) > 0$, 使得

(Q_3) $g(s)s + \sigma s^2 + M_1 \geq 0$, $\forall s \in \mathbb{R}$;

(Q_4) $G(s) + \sigma s^2 + M_2 \geq 0$, $\forall s \in \mathbb{R}$.

为了书写方便, 定义如下的 Hilbert 空间与范数:

$$\mathcal{W} = V_1 \times V_1^{-1}, \ \|z\|_{\mathcal{W}} = \|(u, u_t)\|_{\mathcal{W}} = (\frac{1}{2}(\|A^{\frac{1}{4}}u\|^2 + \|A^{-\frac{1}{4}}u_t\|^2))^{\frac{1}{2}},$$

$$\mathcal{V} = V_2 \times H, \ \|z\|_{\mathcal{V}} = \|(u, u_t)\|_{\mathcal{V}} = (\frac{1}{2}(\|A^{\frac{1}{2}}u\|^2 + \|u_t\|^2))^{\frac{1}{2}}.$$

定义 2.1 [12,13] (指数吸引子) 假设 $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ 为完备度量空间 X 中的半群, 如果满足下列条件:

(i) 集合 $\mathcal{M}$ 在 X 中是紧的, 且具有有限的分形维数;

(ii) 集合 $\mathcal{M}$ 为正不变的, 即 $S(t)\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$, $\forall t \geq 0$;

(iii) 集合 $\mathcal{M} \subset X$ 为半群 $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ 的指数吸引集, 即对每一个有界集 $B \subset X$, 有

$$dist(S(t)B, \mathcal{M}) \leq \mathcal{D}(\|B\|_X)e^{-lt},$$

其中正常数 l 和单调函数 $\mathcal{D}$ 不依赖于 B, 则集合 $\mathcal{M} \subset X$ 称为半群 $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ 的指数吸引子.

定理 2.2 [13] 设 $\mathcal{X} \subset \mathcal{W}$ 是一不变紧子集, 且 $\mathcal{V}$ 到 $\mathcal{W}$ 是紧嵌入, 存在时间 $t_* > 0$, 使得如下条件成立:

(i) 映射 $\{(t, z_0) \mapsto S(t)\} : [0, t_*] \times \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ 是 Lipschitz 连续的;

(ii) 映射 $S(t_*) : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ 有如下分解形式

$$S(t_*) = S_0 + S_1,\ \ S_0 : \mathcal{X} \to \mathcal{W},\ \ S_1 : \mathcal{X} \to \mathcal{V},$$

其中 S_0 满足

$$\|S_0(z_1) - S_0(z_2)\|_{\mathcal{W}} \le \frac{1}{8}\|z_1 - z_2\|_{\mathcal{W}},$$

且 S_1 满足

$$\|S_1(z_1) - S_1(z_2)\|_{\mathcal{V}} \le C_*\|z_1 - z_2\|_{\mathcal{W}},$$

其中 $C_* > 0$. 那么, 半群 $\{S(t)\}$ 存在指数吸引子 $\mathcal{M}$.

3. 主要结果及其证明

3.1. 解的适定性

首先, 将 (1.1) 式转化为算子方程的形式, 并将 $A^{\frac{1}{2}} = -\Delta$ 应用于结果表达式, 从而得到等价于问题 (1.1) 的抽象算子方程

$$\begin{cases} A^{-\frac{1}{2}}u_{tt} + u + A^{\frac{1}{2}}u + A^{\frac{1}{2}}u_t + u_t + g(u) = A^{-\frac{1}{2}}f, \\ u(0) = u_0\ ,\ u_t(0) = u_1. \end{cases} \tag{3.1}$$

为了获得方程 (1.1) 的指数吸引子, 给出如下引理.

引理 3.1 [11] (解的存在唯一性) 假设非线性项 $g(u)$ 满足条件 $(Q_1) - (Q_2)$, 且 $f \in V_2^{-1}$, 则有

(1)若初始值 $u_0 \in V_1,\ u_1 \in V_1^{-1}$, 则问题 (3.1) 存在一个解 (u, u_t) 并且满足

$$(u, u_t) \in C([0, T], \mathcal{W}),\ \ \forall T > 0,$$

(2)令 $z^i = (u^i, u_t^i)$ 是问题 (3.1) 分别对应初值 $z^i(0) = (u_0^i, u_1^i),\ i = 1, 2$ 的两个解, 则存在常数 $b > 0,\ T > 0$, 使得

$$\|z_1(t) - z_2(t)\|_{\mathcal{W}} \le e^{bt}\|z_1(0) - z_2(0)\|_{\mathcal{W}},\ \ t \in [0, T].$$

因此, 可定义映射 $S(t) : \mathcal{W} \to \mathcal{W}$ 为

$$S(t)(u_0, u_1) = (u(t), u_t),\ t \ge 0,$$

其中 (u, u_t) 是问题 (3.1) 的唯一解, 算子 $S(t)$ 满足半群的性质.

3.2. 有界吸收集

接下来运用能量估计 (能量不等式) 的方法证明了 $H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ 和 $L^2(\Omega) \times (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$ 中有界吸收集的存在性.

3.2.1. $\mathcal{W}$ 中的有界吸收集

定理 3.2 假设非线性项 $g(u)$ 满足 $(Q_1)-(Q_2)$, $f\in V_2^{-1}$, 则球 $B_1=B_{\mathcal{W}}(0,R_0)$ 是问题 (3.1) 所生成的解半群 $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ 在 $\mathcal{W}$ 中的有界吸收集.

证明 : 用 $v=u_t+\sigma u$ $(0<\sigma<1)$ 在 $L^2(\Omega)$ 中与方程 (3.1) 做内积，得到

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{2}\tfrac{d}{dt}\left(\|A^{-\frac14}v\|^2+(1-\sigma)\|u\|^2+(1-\sigma)\|A^{\frac14}u\|^2\right)-\sigma\|A^{-\frac14}v\|^2+\sigma^2(A^{-\frac12}u,v)+\|v\|^2\\&+\sigma(1-\sigma)\|u\|^2+\sigma(1-\sigma)\|A^{\frac14}u\|^2+\|A^{\frac14}v\|^2+(g(u),v)-\left(A^{-\frac12},v\right)=0.\end{aligned}\tag{3.2}$$

根据 Young, Hölder 和 Poincaré 不等式, 可得

$$\begin{aligned}&-\sigma\|A^{-\frac14}v\|^2+\sigma^2(A^{-\frac12}u,v)+\|v\|^2+\sigma\left(1-\sigma\right)\|u\|^2+\|A^{\frac14}v\|^2\\&\geq\left(\lambda_1+\sqrt{\lambda_1}-\sigma\right)\|A^{-\frac14}v\|^2+\sigma\left(1-\sigma\right)\|u\|^2-\sigma^2\|A^{-\frac14}u\|\|A^{-\frac14}v\|\\&\geq\left(\lambda_1+\sqrt{\lambda_1}-\sigma\right)\|A^{-\frac14}v\|^2+\sigma\left(1-\sigma\right)\|u\|^2-\tfrac{\sigma^3}{2}\|A^{-\frac14}u\|^2-\tfrac{\sigma}{2}\|A^{-\frac14}v\|^2\\&\geq\left(\lambda_1+\sqrt{\lambda_1}-\tfrac{3\sigma}{2}\right)\|A^{-\frac14}v\|^2+\sigma\left(1-\sigma-\tfrac{\sigma^2}{2\sqrt{\lambda_1}}\right)\|u\|^2,\end{aligned}\tag{3.3}$$

利用条件 (Q_1) 及内积定义, 可得

$$\begin{aligned}(g(u),v)&=(g(u),u_t+\sigma u)\\&=(g(u),u_t)+(g(u),\sigma u)\\&=\frac{d}{dt}\int_\Omega G(u)dx+\sigma\int_\Omega g(u)udx,\end{aligned}\tag{3.4}$$

和

$$\begin{aligned}\left(A^{-\frac12}f,v\right)&=\left(A^{-\frac12}f,u_t+\sigma u\right)\\&=\frac{d}{dt}\int_\Omega(A^{-\frac12}f)udx+\sigma\int_\Omega(A^{-\frac12})udx,\end{aligned}\tag{3.5}$$

结合 (3.2)-(3.5) 式, 可得

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{2}\tfrac{d}{dt}\left(\|A^{-\frac14}v\|^2+(1-\sigma)\|u\|^2+(1-\sigma)\|A^{\frac14}u\|^2+2\textstyle\int_\Omega G(u)dx-2\int_\Omega(A^{-\frac12}f)udx\right)\\&+\left(\lambda_1+\sqrt{\lambda_1}-\tfrac{3\sigma}{2}\right)\|A^{-\frac14}v\|^2+\sigma\left(1-\sigma-\tfrac{\sigma^2}{2\sqrt{\lambda_1}}\right)\|u\|^2\\&+\sigma\left(1-\sigma\right)\|A^{\frac14}u\|^2+\sigma\textstyle\int_\Omega g(u)udx-\sigma\int_\Omega(A^{-\frac12}f)udx\leq 0.\end{aligned}\tag{3.6}$$

令

$$F(t)=\|A^{-\frac14}v\|^2+(1-\sigma)\|u\|^2+(1-\sigma)\|A^{\frac14}u\|^2+2\int_\Omega G(u)dx-2\int_\Omega(A^{-\frac12}f)udx,\tag{3.7}$$

$$
\begin{aligned}
J(t) = &\left(\lambda_1 + \sqrt{\lambda_1} - \frac{3\sigma}{2}\right) \|A^{-\frac{1}{4}} v\|^2 + \sigma \left(1 - \sigma - \frac{\sigma^2}{2\sqrt{\lambda_1}}\right) \|u\|^2 \\
&+ \sigma (1-\sigma) \|A^{\frac{1}{4}} u\|^2 + \sigma \int_\Omega g(u) u dx - \sigma \int_\Omega (A^{-\frac{1}{2}} f) u dx.
\end{aligned} \tag{3.8}
$$

对 (3.7)-(3.8) 式运用 Sobolev 嵌入定理, Young 不等式和条件 $(Q_3)-(Q_4)$, 可得

$$
\begin{aligned}
F(t) &\geq \|A^{-\frac{1}{4}} v\|^2 + (1-\sigma) \|u\|^2 + (1-\sigma) \|A^{\frac{1}{4}} u\|^2 - 2\int_\Omega (\sigma u^2 + M_2) dx - 2\|A^{-\frac{1}{2}} f\| \|u\| \\
&\geq \|A^{-\frac{1}{4}} v\|^2 + (1-3\sigma) \|u\|^2 + (1-\sigma) \|A^{\frac{1}{4}} u\|^2 - 2M_2 |\Omega| - 2\|A^{-\frac{1}{2}} f\|^2 - \frac{1}{2}\|u\|^2 \\
&\geq \|A^{-\frac{1}{4}} v\|^2 + (\frac{1}{2} - 3\sigma)\|u\|^2 + (1-\sigma) \|A^{\frac{1}{4}} u\|^2 - K_1,
\end{aligned} \tag{3.9}
$$

其中 $K_1 = 2M_2 |\Omega| + 2 \|f\|^2_{V_2^{-1}}$.

同理, 再对 (3.8) 式进行估计, 可得

$$
\begin{aligned}
J(t) \geq &\left(\lambda_1 + \sqrt{\lambda_1} - \frac{3\sigma}{2}\right) \|A^{-\frac{1}{4}} v\|^2 + \sigma \left(1 - \sigma - \frac{\sigma^2}{2\sqrt{\lambda_1}}\right) \|u\|^2 \\
&+ \sigma (1-\sigma) \|A^{\frac{1}{4}} u\|^2 - \sigma \int_\Omega (\sigma u^2 + M_1) dx - \sigma \|A^{-\frac{1}{2}} f\| \|u\| \\
\geq &\left(\lambda_1 + \sqrt{\lambda_1} - \frac{3\sigma}{2}\right) \|A^{-\frac{1}{4}} v\|^2 + \sigma \left(1 - \sigma - \frac{\sigma^2}{2\sqrt{\lambda_1}}\right) \|u\|^2 \\
&+ \sigma (1-\sigma) \|A^{\frac{1}{4}} u\|^2 - \sigma^2 \|u\|^2 - \sigma M_1 |\Omega| - \frac{\sigma}{2}\|A^{-\frac{1}{2}} f\|^2 - \frac{\sigma}{2}\|u\|^2 \\
\geq &\left(\lambda_1 + \sqrt{\lambda_1} - \frac{3\sigma}{2}\right) \|A^{-\frac{1}{4}} v\|^2 + \sigma \left(\frac{1}{2} - 2\sigma - \frac{\sigma^2}{2\sqrt{\lambda_1}}\right) \|u\|^2 \\
&+ \sigma (1-\sigma) \|A^{\frac{1}{4}} u\|^2 - K_2,
\end{aligned} \tag{3.10}
$$

其中$K_2 = \sigma M_1 |\Omega| + \frac{\sigma}{2} \|f\|^2_{V_2^{-1}}$. 取 $\sigma > 0$ 充分小, 可得

$$
\frac{1}{2} - 3\sigma > 0,\ \ 1-\sigma > 0,\ \ \sigma(\frac{1}{2} - 2\sigma - \frac{\sigma^2}{2\sqrt{\lambda_1}}) > 0,\ \ \lambda_1 + \sqrt{\lambda_1} - \frac{3\sigma}{2} > 0,\ \ \sigma(1-\sigma) > 0,
$$

记 $D_1 = \min\left\{\frac{1}{2} - 3\sigma,\ 1-\sigma,\ \sigma(\frac{1}{2} - 2\sigma - \frac{\sigma^2}{2\sqrt{\lambda_1}}),\ \lambda_1 + \sqrt{\lambda_1} - \frac{3\sigma}{2},\ \sigma(1-\sigma)\right\}$, 则

$$
F(t) \geq D_1 \left(\|A^{-\frac{1}{4}} v\|^2 + \|u\|^2 + \|A^{\frac{1}{4}} u\|^2\right) - K_1, \tag{3.11}
$$

$$
J(t) \geq D_1 \left(\|A^{-\frac{1}{4}} v\|^2 + \|u\|^2 + \|A^{\frac{1}{4}} u\|^2\right) - K_2, \tag{3.12}
$$

从而由 (3.6) 式, 可得

$$
\frac{1}{2}\frac{d}{dt} F(t) \leq -J(t),
$$

进而可得到

$$
F(t) \leq -\int_0^t 2J(\tau) d\tau + F(0). \tag{3.13}
$$

故根据 (3.11)-(3.13) 式, 可得

$$D_1\left(\|A^{-\frac{1}{4}}v\|^2+\|u\|^2+\|A^{\frac{1}{4}}v\|^2\right)-K_1\le -2\int_0^t\left[D_1\left(\|A^{-\frac{1}{4}}v\|^2+\|u\|^2+\|A^{\frac{1}{4}}v\|^2\right)-K_2\right]d\tau+F(0). \tag{3.14}$$

因此, 对 $\forall\gamma_1>\frac{2K_2}{D_1}$, 存在 $t_0=t_0(B)$, $t\ge t_0$, 使得

$$\|A^{-\frac{1}{4}}v(t_0)\|^2+\|u(t_0)\|^2+\|A^{\frac{1}{4}}u(t_0)\|^2\le\gamma_1. \tag{3.15}$$

因此, 若 (u,u_t) 是方程 (3.1) 的解, 令 $B_1=\bigcup_{t\ge 0}S(t)B_1'$, 其中

$$B_1'=\left\{(u_0,u_1)\in\mathcal{W}:\ \|A^{-\frac{1}{4}}(u_1+\sigma u_0)\|^2+\|u_0\|^2+\|A^{\frac{1}{4}}u_0\|^2\le\gamma_1\right\},$$

那么

$$B_1=\left\{(u,u_t)\in\mathcal{W}:\ \|(u,u_t)\|_{\mathcal{W}}^2\le\gamma_1\right\},$$

是半群 $\{S(t)\}_{t\ge 0}$ 在 $\mathcal{W}$ 中的有界吸收集.

推论 3.3 假设定理 3.2 的条件成立, 则对任意的 $R>0$ 及初值 $z_0=(u_0,u_1)$, 存在 $t_1=t_1(R)$, 当$\|z_0\|_{\mathcal{W}}\le R$ 时, $\|S(t)z_0\|_{\mathcal{W}}\le R_0,\ \ \forall t\ge t_1$.

3.2.2. $\mathcal{V}$ 中的有界吸收集

为了得到$\mathcal{V}$ 中的有界吸收集的存在性, 还需要如下拟单调条件:

$$g'(s)>-l,\ \ \forall s\in\mathbb{R}. \tag{3.16}$$

定理 3.4 假设非线性项 $g(u)$ 满足 $(Q_1)-(Q_2)$ 和 (3.16) 式, $f\in V_2^{-1}$, 则球 $B_2=B_{\mathcal{V}}(0,\gamma_2)$ 是问题 (3.1) 所生成的解半群 $\{S(t)\}_{t\ge 0}$ 在 $\mathcal{V}$ 中的有界吸收集.

证明: 用 $A^{\frac{1}{2}}v=A^{\frac{1}{2}}u_t+\sigma A^{\frac{1}{2}}u\ (0<\sigma<1)$ 在 $L^2(\Omega)$ 中与方程 (3.1) 做内积, 得到

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{2}\tfrac{d}{dt}\left(\|v\|^2+(1-\sigma)\|A^{\frac{1}{4}}u\|^2+(1-\sigma)\|A^{\frac{1}{2}}u\|^2\right)-\sigma\|v\|^2+\sigma^2(u,v)+\|A^{\frac{1}{4}}v\|^2\\&+\sigma(1-\sigma)\|A^{\frac{1}{4}}u\|^2+\sigma(1-\sigma)\|A^{\frac{1}{2}}u\|^2+\|A^{\frac{1}{2}}v\|^2+\left(g(u),A^{\frac{1}{2}}v\right)-\left(A^{-\frac{1}{2}},A^{\frac{1}{2}}v\right)=0.\end{aligned} \tag{3.17}$$

结合条件 $(Q_1)-(Q_2)$, 定理 3.2 中的有界性以及 Young, Hölder 和 Poincaré 不等式, 可得

$$\begin{aligned}&-\sigma\|v\|^2+\sigma^2(u,v)+\sigma(1-\sigma)\|A^{\frac{1}{4}}u\|^2+\|A^{\frac{1}{4}}v\|^2+\|A^{\frac{1}{2}}v\|^2\\&\ge\left(\lambda_1+\sqrt{\lambda_1}-\sigma\right)\|v\|^2+\sigma(1-\sigma)\|A^{\frac{1}{4}}u\|^2-\tfrac{\sigma^3}{2}\|u\|^2-\tfrac{\sigma}{2}\|v\|^2\\&\ge\left(\lambda_1+\sqrt{\lambda_1}-\tfrac{3\sigma}{2}\right)\|v\|^2+\sigma\left(1-\sigma-\tfrac{\sigma^2}{2\sqrt{\lambda_1}}\right)\|A^{\frac{1}{4}}u\|^2.\end{aligned} \tag{3.18}$$

运用 Sobolev 嵌入定理以及 Young, Hölder 不等式, 并结合 (3.16) 式以及推论 3.3 中的有界性, 可得,

$$\begin{aligned}\left(g(u), A^{\frac{1}{2}}v\right) &= \left(A^{\frac{1}{4}}g(u), A^{\frac{1}{4}}v\right) = \left(g'(u)A^{\frac{1}{4}}u, A^{\frac{1}{4}}v\right) \\ &\geq -l\|A^{\frac{1}{4}}u\|\|A^{\frac{1}{4}}v\| \\ &\geq -\frac{1}{4}\|A^{\frac{1}{4}}v\|^2 - l^2R_0^2,\end{aligned} \tag{3.19}$$

和

$$\begin{aligned}\left(A^{-\frac{1}{2}}f, A^{\frac{1}{2}}v\right) &= \left(A^{-\frac{1}{2}}f, A^{\frac{1}{2}}u_t + \sigma A^{\frac{1}{2}}u\right) \\ &= \frac{d}{dt}\left(A^{-\frac{1}{2}}f, A^{\frac{1}{2}}u\right) + \sigma\left(A^{-\frac{1}{2}}f, A^{\frac{1}{2}}u\right).\end{aligned} \tag{3.20}$$

整理 (3.17)-(3.20) 式, 可得

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{2}\tfrac{d}{dt}\left(\|v\|^2 + (1-\sigma)\|A^{\frac{1}{4}}u\|^2 + (1-\sigma)\|A^{\frac{1}{2}}u\|^2 - 2(A^{-\frac{1}{2}}f(x), A^{\frac{1}{2}}u)\right) \\ &+(\lambda_1 + \sqrt{\lambda_1} - \tfrac{3\sigma}{2})\|v\|^2 + \sigma(1-\sigma-\tfrac{\sigma^2}{2\sqrt{\lambda_1}})\|A^{\frac{1}{4}}u\|^2 + \sigma(1-\sigma)\|A^{\frac{1}{2}}u\|^2 \\ &-\tfrac{1}{4}\|A^{\frac{1}{4}}v\|^2 - l^2R_0^2 - \sigma(A^{-\frac{1}{2}}f, A^{\frac{1}{2}}u) \leq 0,\end{aligned}$$

从而可得

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{2}\tfrac{d}{dt}\left(\|v\|^2 + (1-\sigma)\|A^{\frac{1}{4}}u\|^2 + (1-\sigma)\|A^{\frac{1}{2}}u\|^2 - 2(A^{-\frac{1}{2}}f, A^{\frac{1}{2}}u)\right) + (\lambda_1 + \tfrac{3\sqrt{\lambda_1}}{4} - \tfrac{3\sigma}{2})\|v\|^2 \\ &+\sigma(1-\sigma-\tfrac{\sigma^2}{2\sqrt{\lambda_1}})\|A^{\frac{1}{4}}u\|^2 + \sigma(1-\sigma)\|A^{\frac{1}{2}}u\|^2 - \sigma(A^{-\frac{1}{2}}f, A^{\frac{1}{2}}u) \leq l^2R_0^2.\end{aligned} \tag{3.21}$$

取 σ 充分小, 则

$$\lambda_1 + \frac{3\sqrt{\lambda_1}}{4} - \frac{3\sigma}{2} > 0,\ \ \sigma(1-\sigma-\frac{\sigma^2}{2\sqrt{\lambda_1}}) > 0,$$

令 $\sigma_1 = \min\left\{\lambda_1 + \frac{3\sqrt{\lambda_1}}{4} - \frac{3\sigma}{2},\ \sigma(1-\sigma-\frac{\sigma^2}{2\sqrt{\lambda_1}})\right\}$, 有

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{2}\tfrac{d}{dt}\left(\|v\|^2 + (1-\sigma)\|A^{\frac{1}{4}}u\|^2 + \|\sqrt{1-\sigma}A^{\frac{1}{2}}u - \tfrac{1}{\sqrt{1-\sigma}}A^{-\frac{1}{2}}f\|^2\right) \\ &+\sigma_1\|v\|^2 + \sigma_1\|A^{\frac{1}{4}}u\|^2 + \sigma_1\|\sqrt{1-\sigma}A^{\frac{1}{2}}u - \tfrac{1}{\sqrt{1-\sigma}}A^{-\frac{1}{2}}f\|^2 \leq l^2R_0^2 + \tfrac{\sigma_1}{1-\sigma}\|f\|^2_{V_2^{-1}}.\end{aligned} \tag{3.22}$$

根据推论 3.3 中的有界性和 Hölder 不等式, 可得

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{2}\tfrac{d}{dt}\left(\|v\|^2 + (1-\sigma)\|A^{\frac{1}{4}}u\|^2 + \|\sqrt{1-\sigma}A^{\frac{1}{2}}u - \tfrac{1}{\sqrt{1-\sigma}}A^{-\frac{1}{2}}f\|^2\right) \\ &+\sigma_1\left(\|v\|^2 + (1-\sigma)\|A^{\frac{1}{4}}u\|^2 + \|\sqrt{1-\sigma}A^{\frac{1}{2}}u - \tfrac{1}{\sqrt{1-\sigma}}A^{-\frac{1}{2}}f\|^2\right) \leq l^2R_0^2 + \tfrac{\sigma_1}{1-\sigma}\|f\|^2_{V_2^{-1}} = D_2,\end{aligned}$$

进一步可得

$$\begin{aligned}&\tfrac{d}{dt}\left(\|v\|^2+(1-\sigma)\left\|A^{\frac14}u\right\|^2+\|\sqrt{1-\sigma}A^{\frac12}u-\tfrac{1}{\sqrt{1-\sigma}}A^{-\frac12}f\|^2\right)\\&+\widetilde{\sigma_1}\left(\|v\|^2+(1-\sigma)\left\|A^{\frac14}u\right\|^2+\|\sqrt{1-\sigma}A^{\frac12}u-\tfrac{1}{\sqrt{1-\sigma}}A^{-\frac12}f\|^2\right)\le D_3.\end{aligned}\tag{3.23}$$

再由 Gronwall 引理, 可得

$$\begin{aligned}&\|v(t)\|^2+(1-\sigma)\|A^{\frac14}u(t)\|^2+\|\sqrt{1-\sigma}A^{\frac12}u-\tfrac{1}{\sqrt{1-\sigma}}A^{-\frac12}f\|^2\\&\le\left(\|u_1+\sigma u_0\|^2+(1-\sigma)\left\|A^{\frac14}u_0\right\|^2+\|\sqrt{1-\sigma}A^{\frac12}u-\tfrac{1}{\sqrt{1-\sigma}}A^{-\frac12}f\|^2\right)e^{-\widetilde{\sigma_1}t}+\tfrac{D_3}{\widetilde{\sigma_1}}\left(1-e^{-\widetilde{\sigma_1}t}\right).\end{aligned}$$

所以, 对 $\forall\gamma_2>\sqrt{\frac{D_3}{\widetilde{\sigma_1}}}$, 当 $t\ge t_1$ 成立, 使得

$$\|v(t)\|^2+(1-\sigma)\|A^{\frac14}u(t)\|^2+\|\sqrt{1-\sigma}A^{\frac12}u-\frac{1}{\sqrt{1-\sigma}}A^{-\frac12}f\|^2\le\gamma_2,\tag{3.24}$$

令

$$B_2=\left\{(u,u_t)\in\mathcal{V}:\ \|u_t+\sigma u\|^2+(1-\sigma)\left\|A^{\frac14}u\right\|^2+\|\sqrt{1-\sigma}A^{\frac12}u-\frac{1}{\sqrt{1-\sigma}}A^{-\frac12}f\|^2\le\gamma_2\right\},$$

是半群 $\{S(t)\}_{t\ge0}$ 在 $\mathcal{V}$ 中的有界吸收集.

3.3. 指数吸引子的存在性

接下来将通过算子分解 (一个线性算子分解为两个或几个线性算子的复合) 的方法获得了该问题的指数吸引子的存在性.

引理 3.5 对任意的初始值 $z_1=(u_{10},u_{11})$, $z_2=(u_{20},u_{21})\in\mathcal{W}$ 及任意的 $R>0$, 使得 $\|z_i\|_{\mathcal{W}}\le R\ (i=1,2)$. 则存在常数 $H>0$, 使得

$$\|S(t)z_1-S(t)z_2\|_{\mathcal{W}}\le e^{Ht}\|z_1-z_2\|_{\mathcal{W}},\ \ \forall t\in\mathbb{R}_+.\tag{3.25}$$

其中 H 是与 R_0, λ_1, k_0 有关的常数.

证明: 假设 $z^1=(u^1,u_t^1)$ 和 $z^2=(u^2,u_t^2)$ 分别是以 $z_1,z_2\in\mathcal{W}$ 为初值的解. 令 $\overline{u}=u^1-u^2$, 且

$$A^{-\frac12}\overline{u}_{tt}+\overline{u}+A^{\frac12}\overline{u}+A^{\frac12}\overline{u}_t+\overline{u}_t+g(u^1)-g(u^2)=0,\tag{3.26}$$

用 $\overline{u}_t$ 与 (3.26) 式做内积, 可得

$$\frac12\frac{d}{dt}\left(\|A^{-\frac14}\overline{u}_t\|^2+\|\overline{u}\|^2+\|A^{\frac14}\overline{u}\|^2\right)+\|A^{\frac14}\overline{u}_t\|^2+\|\overline{u}_t\|^2=(g(u^2)-g(u^1),\overline{u}_t),\tag{3.27}$$

结合定理 3.2 以及 Sobolev 嵌入定理, Young, Hölder 和 Poincaré 不等式, 可得

$$
\begin{aligned}
\left|(g(u^2)-g(u^1),\overline{u}_t)\right| &\leq \|g(u^2)-g(u^1)\|\|\overline{u}_t\| \\
&\leq \int_\Omega k_0\left(1+|u^1|^{\frac{2}{N-2}}+|u^2|^{\frac{2}{N-2}}\right)\cdot|\overline{u}|\cdot|\overline{u}_t|dx \\
&\leq k_0\|\overline{u}\|\cdot\|\overline{u}_t\|+k_0\left(\int_\Omega\left(|u^1|^{\frac{2N}{N-2}}+|u^2|^{\frac{2N}{N-2}}\right)dx\right)^{\frac{1}{N}}\cdot\|\overline{u}\|_{L^{\frac{2N}{N-2}}}\cdot\|\overline{u}_t\| \\
&\leq k_0\|\overline{u}\|\cdot\|\overline{u}_t\|+k_0\left(\|u^1\|^{\frac{2}{N-2}}_{L^{\frac{2N}{N-2}}}+\|u^2\|^{\frac{2}{N-2}}_{L^{\frac{2N}{N-2}}}\right)\cdot\|\overline{u}\|_{L^{\frac{2N}{N-2}}}\cdot\|\overline{u}_t\| \\
&\leq k_0\|\overline{u}\|\cdot\|\overline{u}_t\|+k_0\left(\|A^{\frac{1}{4}}u^1\|^{\frac{2}{N-2}}+\|A^{\frac{1}{4}}u^2\|^{\frac{2}{N-2}}\right)\cdot\|A^{\frac{1}{4}}\overline{u}\|\cdot\|\overline{u}_t\| \\
&\leq \|\overline{u}_t\|^2+\frac{k_0^2}{2}\|\overline{u}\|^2+\frac{1}{2}\Big(k_0\left(\|A^{\frac{1}{4}}u^1\|^{\frac{2}{N-2}}+\|A^{\frac{1}{4}}u^2\|^{\frac{2}{N-2}}\right)\cdot\|A^{\frac{1}{4}}\overline{u}\|\Big)^2 \\
&\leq \|\overline{u}_t\|^2+\frac{k_0^2}{2}\|\overline{u}\|^2+2k_0^2R_0^{\frac{4}{N-2}}\|A^{\frac{1}{4}}\overline{u}\|^2.
\end{aligned}
\tag{3.28}
$$

整理 (3.27)-(3.28) 式可得

$$
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|A^{-\frac{1}{4}}\overline{u}_t\|^2+\|\overline{u}\|^2+\|A^{\frac{1}{4}}\overline{u}_t\|^2\right)+\|A^{\frac{1}{4}}\overline{u}_t\|^2\leq\frac{k_0^2}{2}\|\overline{u}\|^2+2k_0^2R_0^{\frac{4}{N-2}}\|A^{\frac{1}{4}}\overline{u}\|^2, \tag{3.29}
$$

进一步放缩可变形为

$$
\frac{d}{dt}\left(\|A^{-\frac{1}{4}}\overline{u}_t\|^2+\|\overline{u}\|^2+\|A^{\frac{1}{4}}\overline{u}\|^2\right)\leq H\left(\|A^{-\frac{1}{4}}\overline{u}_t\|^2+\|\overline{u}\|^2+\|A^{\frac{1}{4}}\overline{u}\|^2\right), \tag{3.30}
$$

其中 H 是与 R_0, λ_1, k_0 , N 有关的常数. 最后再根据 Gronwall 引理可得到结论成立.

引理 3.6 存在常数 $K>0$, 使得

$$
\sup_{z_0\in\mathcal{V}}\|z_t(t)\|_{\mathcal{W}}\leq K,\ \ \forall t\geq 0. \tag{3.31}
$$

证明: 令 $\overline{u}=u_t$, 并对方程 (3.1) 求导, 则原方程可写为

$$
A^{-\frac{1}{2}}\overline{u}_{tt}+\overline{u}+A^{\frac{1}{2}}\overline{u}+A^{\frac{1}{2}}\overline{u}_t+\overline{u}_t+g'(u)\overline{u}=0, \tag{3.32}
$$

用 $\overline{v}=\overline{u}_t+\sigma\overline{u}$ 与 (3.32) 式做内积, 可得

$$
\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}\tfrac{d}{dt}\left(\|A^{-\frac{1}{2}}\overline{v}\|^2+(1-\sigma)\|\overline{u}\|^2+(1-\sigma)\|A^{\frac{1}{4}}\overline{u}\|^2\right)-\sigma\|A^{-\frac{1}{4}}\overline{v}\|^2+\sigma^2(A^{-\frac{1}{2}}\overline{u},\overline{v}) \\
&+\|\overline{v}\|^2+\sigma(1-\sigma)\|\overline{u}\|^2+\sigma(1-\sigma)\|A^{\frac{1}{4}}\overline{u}\|^2+\|A^{\frac{1}{4}}\overline{v}\|^2+(g'(u)\overline{u},\overline{v})=0.
\end{aligned}
\tag{3.33}
$$

利用 (3.16) 式与定理 3.2 以及 Young, Hölder 和 Poincaré 不等式, 可得

$$
\begin{aligned}
&-\sigma\|A^{-\frac{1}{4}}\overline{v}\|^2+\sigma^2(A^{-\frac{1}{2}}\overline{u},\overline{v})+\sigma(1-\sigma)\|\overline{u}\|^2 \\
&\geq -\tfrac{3\sigma}{2}\|A^{-\frac{1}{4}}\overline{v}\|^2+\sigma(1-\sigma-\tfrac{\sigma^2}{2\sqrt{\lambda_1}})\|\overline{u}\|^2,
\end{aligned}
\tag{3.34}
$$

和

$$
\begin{aligned}
(g'(u)\overline{u},\overline{v}) &= \left(g'(u)A^{\frac{1}{4}}\overline{u}, A^{-\frac{1}{4}}\overline{v}\right) \\
&\geq -l\|A^{\frac{1}{4}}\overline{u}\|\|A^{-\frac{1}{4}}\overline{v}\| \\
&\geq -\frac{\sigma}{4}\|A^{-\frac{1}{4}}\overline{v}\|^2 - \frac{l^2R_0^2}{\sigma},
\end{aligned} \tag{3.35}
$$

整理 (3.33)-(3.35) 可得,

$$
\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}\tfrac{d}{dt}\left(\|A^{-\frac{1}{4}}\overline{v}\|^2 + (1-\sigma)\|\overline{u}\|^2 + (1-\sigma)\|A^{\frac{1}{4}}\overline{u}\|^2\right) - \tfrac{3\sigma}{2}\|A^{-\frac{1}{4}}\overline{v}\|^2 + \sigma(1-\sigma-\tfrac{\sigma^2}{2\sqrt{\lambda_1}})\|\overline{u}\|^2 \\
&+\|\overline{v}\|^2 + \sigma(1-\sigma)\|A^{\frac{1}{4}}\overline{u}\|^2 + \|A^{\frac{1}{4}}\overline{v}\|^2 - \tfrac{\sigma}{4}\|A^{-\frac{1}{4}}\overline{v}\|^2 - \tfrac{l^2R_0^2}{\sigma} \leq 0.
\end{aligned}
$$

即

$$
\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}\tfrac{d}{dt}\left(\|A^{-\frac{1}{4}}\overline{v}\|^2 + (1-\sigma)\|\overline{u}\|^2 + (1-\sigma)\|A^{\frac{1}{4}}\overline{u}\|^2\right) + (\lambda_1 + \sqrt{\lambda_1} - \tfrac{7\sigma}{4})\|A^{-\frac{1}{4}}\overline{v}\|^2 \\
&+\sigma(1-\sigma-\tfrac{\sigma^2}{2\sqrt{\lambda_1}})\|\overline{u}\|^2 + \sigma(1-\sigma)\|A^{\frac{1}{4}}\overline{u}\|^2 \leq l^2R_0^2,
\end{aligned} \tag{3.36}
$$

令 $\sigma_2 = \min\{\lambda_1 + \sqrt{\lambda_1} - \frac{7\sigma}{4},\ \sigma(1-\sigma-\frac{\sigma^2}{2\sqrt{\lambda_1}}),\ \sigma(1-\sigma)\}$, 取 σ 充分小, 则

$$
\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}\tfrac{d}{dt}\left(\|A^{-\frac{1}{4}}\overline{v}\|^2 + (1-\sigma)\|\overline{u}\|^2 + (1-\sigma)\|A^{\frac{1}{4}}\overline{u}\|^2\right) \\
&+\sigma_2\|A^{-\frac{1}{4}}\overline{v}\|^2 + \sigma_2\|\overline{u}\|^2 + \sigma_2\|A^{\frac{1}{4}}\overline{u}\|^2 \leq l^2R_0^2.
\end{aligned}
$$

根据推论 3.3 中的有界性, 可得

$$
\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}\tfrac{d}{dt}\left(\|A^{-\frac{1}{4}}\overline{v}\|^2 + (1-\sigma)\|\overline{u}\|^2 + (1-\sigma)\|A^{\frac{1}{4}}\overline{u}\|^2\right) \\
&+\sigma_2\left(\|A^{-\frac{1}{4}}\overline{v}\|^2 + \|\overline{u}\|^2 + \|A^{\frac{1}{4}}\overline{u}\|^2\right) \leq D_4.
\end{aligned}
$$

其中 $D_4 = l^2R_0^2$. 令

$$
P(t) = \|A^{-\frac{1}{4}}\overline{v}\|^2 + (1-\sigma)\|\overline{u}\|^2 + (1-\sigma)\|A^{\frac{1}{4}}\overline{u}\|^2,
$$

则有

$$
\frac{1}{2}\left(\|A^{-\frac{1}{4}}\overline{v}\|^2 + \|\overline{u}\|^2 + \|A^{\frac{1}{4}}\overline{u}\|^2\right) \leq P(t) \leq \|A^{-\frac{1}{4}}\overline{v}\|^2 + \|\overline{u}\|^2 + \|A^{\frac{1}{4}}\overline{u}\|^2. \tag{3.37}
$$

通过利用 (3.37) 式进而可得

$$
\begin{aligned}
&\tfrac{d}{dt}\left(\|A^{-\frac{1}{4}}\overline{v}\|^2 + \|\overline{u}\|^2 + \|A^{\frac{1}{4}}\overline{u}\|^2\right) \\
&+\widetilde{\sigma_2}\left(\|A^{-\frac{1}{4}}\overline{v}\|^2 + \|\overline{u}\|^2 + \|A^{\frac{1}{4}}u\|^2\right) \leq D_5.
\end{aligned}
$$

再结合 Gronwall 引理, 由上式可得

$$
\begin{aligned}
&\|A^{-\frac{1}{4}}\overline{v}(t)\|^2 + \|\overline{u}(t)\|^2 + \|A^{\frac{1}{4}}\overline{u}(t)\|^2 \\
&\leq \left(\|A^{-\frac{1}{4}}\overline{v}(0)\|^2 + \|\overline{u}(0)\|^2 + \|A^{\frac{1}{4}}\overline{u}(0)\|^2\right) e^{\int_0^t -\widetilde{\sigma_2}(\tau)d\tau} + \int_0^t D_5 e^{\int_s^t -\widetilde{\sigma_2}(\tau)d\tau} ds \\
&= \left(\|A^{-\frac{1}{4}}\overline{v}(0)\|^2 + \|\overline{u}(0)\|^2 + \|A^{\frac{1}{4}}\overline{u}(0)\|^2\right) e^{-\widetilde{\sigma_2}t} + \tfrac{D_5}{\widetilde{\sigma_2}}\left(1 - e^{-\widetilde{\sigma_2}t}\right).
\end{aligned}
$$

所以, 对 $\forall K > \sqrt{\frac{D_5}{\sigma_2}}$, 当 $t \geq t_1$ 成立, 使得

$$\|A^{-\frac{1}{4}}\overline{v}(t)\|^2 + \|\overline{u}(t)\|^2 + \|A^{\frac{1}{4}}\overline{u}(t)\|^2 \leq K, \tag{3.38}$$

其中 K 为常数, 由此可得

$$\|z_t(t)\|^2_{\mathcal{W}} = \|A^{-\frac{1}{4}}\overline{v}(t)\|^2 + \|\overline{u}(t)\|^2 + \|A^{\frac{1}{4}}\overline{u}(t)\|^2 \leq K, \tag{3.39}$$

即

$$\sup_{z_0 \in \mathcal{V}} \|z_t(t)\|_{\mathcal{W}} \leq K.$$

故引理 3.6 得证.

下面, 将证明吸引子的存在性. 定义集合 $\mathcal{X}_0 = B_1 \cap B_2$ 作为 $\mathcal{W}$ 中的不变紧集, 则 $\mathcal{X}_0$ 在 $\mathcal{W}$ 中是紧的, 在 $\mathcal{V}$ 中是有界的, 在 $\mathcal{X}_0$ 上定义半群 $\{S(t)\}_{t\geq 0}$, 有$S(t)\mathcal{X}_0 \subset \mathcal{X}_0$.

定理 3.7 对任意的 $T > 0$, 映射 $(t, z_0) \mapsto S(t)z_0$, 即 $[0, T] \times \mathcal{X}_0 \to \mathcal{X}_0$ 是 Lipschitz 连续的.

证明: 对任意的 $z_1, z_2 \in \mathcal{X}_0$ 以及 $t_1, t_2 \in [0, T]$, 则有

$$\|S(t_1)z_1 - S(t_2)z_2\|_{\mathcal{W}} \leq \|S(t_1)z_1 - S(t_1)z_2\|_{\mathcal{W}} + \|S(t_1)z_2 - S(t_2)z_2\|_{\mathcal{W}}. \tag{3.40}$$

对于 (3.40) 式的第二项, 由引理 3.6 可得

$$\|S(t_1)z_2 - S(t_2)z_2\|_{\mathcal{W}} = \|z(t_1) - z(t_2)\|_{\mathcal{W}} \leq \int_{t_1}^{t_2} \|z_t(\tau)\|_{\mathcal{W}} d\tau \leq C|t_1 - t_2|,$$

并且再由引理 3.5 , 代入 (3.40) 式, 可得

$$\|S(t_1)z_1 - S(t_2)z_2\|_{\mathcal{W}} \leq \mathcal{K}(|t_1 - t_2| + \|z_1 - z_2\|_{\mathcal{W}}),$$

其中常数 $\mathcal{K} = \mathcal{K}(T) \geq 0$. $\square$

定理 3.8 设 $\mathcal{X}_0 \subset \mathcal{W}$ 是一不变紧子集, 且 $\mathcal{V}$ 是紧嵌入到 $\mathcal{W}$. 则存在 $t_* > 0$ 和 $C_* > 0$, 使得映射 $S(t_*) : \mathcal{X}_0 \mapsto \mathcal{X}_0$ 有如下分解

$$S(t_*) = S_0 + S_1, \quad S_0 : \mathcal{X}_0 \mapsto \mathcal{W}, \quad S_1 : \mathcal{X}_0 \mapsto \mathcal{V},$$

其中 S_0 满足如下条件

$$\|\widehat{z}_d(t_*)\| = \|S_0(z_1) - S_0(z_2)\|_{\mathcal{W}} \leq \frac{1}{8}\|z_1 - z_2\|_{\mathcal{W}}, \quad \forall z_1, z_2 \in \mathcal{X}_0, \tag{3.41}$$

S_1 满足

$$\|\widehat{z}_c(t_*)\| = \|S_1(z_1) - S_1(z_2)\|_{\mathcal{V}} \leq C_*\|z_1 - z_2\|_{\mathcal{W}}, \quad \forall z_1, z_2 \in \mathcal{X}_0, \tag{3.42}$$

DOI: 10.12677/pm.2024.144105

证明: 设 $z^1=(u^1,u_t^1), z^2=(u^2,u_t^2)$ 分别是以 $z_1,z_2\in\mathcal{X}_0$ 为初值的解. 令

$$\widehat{z}=z^1-z^2=(\widehat{u},\widehat{u}_t),$$

将 $\widehat{z}$ 分解成

$$\widehat{z}=\widehat{z}_d+\widehat{z}_c=(\widehat{v},\widehat{v}_t)+(\widehat{\omega},\widehat{\omega}_t),$$

其中 $\widehat{v}$ 满足

$$\begin{cases} A^{-\frac{1}{2}}\hat{v}_{tt}+\hat{v}+A^{\frac{1}{2}}\hat{v}+A^{\frac{1}{2}}\hat{v}_t+\hat{v}_t=0,\\ \hat{z}_d(0)=z_1-z_2. \end{cases} \tag{3.43}$$

而 $\widehat{\omega}$ 满足

$$\begin{cases} A^{-\frac{1}{2}}\hat{\omega}_{tt}+\hat{\omega}+A^{\frac{1}{2}}\hat{\omega}+A^{\frac{1}{2}}\hat{\omega}_t+\hat{\omega}_t+g(u^1)-g(u^2)=0,\\ \hat{z}_c(0)=0. \end{cases} \tag{3.44}$$

显然, $\widehat{z}_d(t)=S_0(t)z_1-S_0(t)z_2$, $\widehat{z}_c(t)=S_1(t)z_1-S_1(t)z_2$. 用 $\widehat{v}_t+\sigma\widehat{v}$ 与 (3.43) 式做内积, 可得

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{2}\tfrac{d}{dt}\left(\left\|A^{-\frac{1}{4}}\widehat{v}_t\right\|^2+(1+\sigma)\left\|\widehat{v}\right\|^2+(1+\sigma)\left\|A^{\frac{1}{4}}\widehat{v}\right\|^2+2\sigma(A^{-\frac{1}{2}}\widehat{v}_t,\widehat{v})\right)\\ &-\sigma\left\|A^{-\frac{1}{4}}\widehat{v}_t\right\|^2+\sigma\|\widehat{v}\|^2+\sigma\left\|A^{\frac{1}{4}}\widehat{v}\right\|^2+\left\|A^{\frac{1}{4}}\widehat{v}_t\right\|^2+\|\widehat{v}_t\|^2=0. \end{aligned} \tag{3.45}$$

结合 Poincaré 不等式, 可得

$$\begin{aligned} &-\sigma\left\|A^{-\frac{1}{4}}\widehat{v}_t\right\|^2+\sigma\|\widehat{v}\|^2+\left\|A^{\frac{1}{4}}\widehat{v}_t\right\|^2+\|\widehat{v}_t\|^2\\ &\geq\left(\lambda_1+\sqrt{\lambda_1}-\sigma\right)\left\|A^{-\frac{1}{4}}\widehat{v}_t\right\|^2+\sigma\|\widehat{v}\|^2. \end{aligned} \tag{3.46}$$

整理 (3.45)-(3.46) 式, 可得

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{2}\tfrac{d}{dt}\left(\left\|A^{-\frac{1}{4}}\widehat{v}_t\right\|^2+(1+\sigma)\left\|\widehat{v}\right\|^2+(1+\sigma)\left\|A^{\frac{1}{4}}\widehat{v}\right\|^2+2\sigma(A^{-\frac{1}{2}}\widehat{v}_t,\widehat{v})\right)\\ &+\sigma\left\|A^{\frac{1}{4}}\widehat{v}\right\|^2+\left(\lambda_1+\sqrt{\lambda_1}-\sigma\right)\left\|A^{-\frac{1}{4}}\widehat{v}_t\right\|^2\leq 0, \end{aligned} \tag{3.47}$$

令

$$\Upsilon(t)=\left\|A^{-\frac{1}{4}}\widehat{v}_t\right\|^2+(1+\sigma)\left\|\widehat{v}\right\|^2+(1+\sigma)\left\|A^{\frac{1}{4}}\widehat{v}\right\|^2+2\sigma(A^{-\frac{1}{2}}\widehat{v}_t,\widehat{v}).$$

结合上式, 取 σ 充分小, 且 $b>0$ 时, 有

$$\frac{1}{2}\|(\widehat{v},\widehat{v}_t)\|^2_{\mathcal{W}}\leq\Upsilon(t)\leq 2b\|(\widehat{v},\widehat{v}_t)\|^2_{\mathcal{W}}, \tag{3.48}$$

令 $\Pi_1=\min\{\sigma,\ \lambda_1+\sqrt{\lambda_1}-\sigma\}$, 则由 (3.47) 有

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Upsilon(t)+\Pi_1\|(\widehat{v},\widehat{v}_t)\|^2_{\mathcal{W}}\leq 0,$$

结合 (3.48) 式, 可得

$$\frac{d}{dt}\Upsilon(t)+\frac{\Pi_1}{b}\Upsilon(t)\leq 0,$$

再利用 Gronwall 引理和 (3.48) 式, 可得

$$\|(\widehat{v},\widehat{v}_t)\|_{\mathcal{W}}^2\leq\Upsilon(t)\leq e^{-\frac{\Pi_1}{b}t}\Upsilon(0)\leq 2be^{-\frac{\Pi_1}{b}t}\|(\widehat{v}(0),\widehat{v}_t(0))\|_{\mathcal{W}}^2,$$

即

$$\|\widehat{z}_d(t_*)\|_{\mathcal{W}}=\|(\widehat{v},\widehat{v}_t)\|_{\mathcal{W}}\leq\sqrt{2be^{-\frac{\Pi_1}{b}t_*}}\|(\widehat{v}(0),\widehat{v}_t(0))\|_{\mathcal{W}},$$

则 (3.41) 式成立, 其中 $t_*=\frac{b}{\Pi_1}ln128b$.

同理, 用 $A^{\frac{1}{2}}\widehat{\omega}_t$ 与 (3.44) 式做内积, 可得

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|\widehat{\omega}_t\|^2+\|A^{\frac{1}{2}}\widehat{\omega}\|^2+\|A^{\frac{1}{4}}\widehat{\omega}\|^2\right)+\|A^{\frac{1}{2}}\widehat{\omega}_t\|^2+\|A^{\frac{1}{4}}\widehat{\omega}_t\|^2+\left(g(u^1)-g(u^2),A^{\frac{1}{2}}\widehat{\omega}_t\right)=0. \tag{3.49}$$

运用定理 3.2 和 (3.16) 式, 从而有

$$\left(g(u^1)-g(u^2),A^{\frac{1}{2}}\widehat{\omega}_t\right)\geq-\frac{l^2}{2}\|A^{\frac{1}{4}}\widehat{\omega}\|^2-\frac{1}{2}\|A^{\frac{1}{4}}\widehat{\omega}_t\|^2, \tag{3.50}$$

通过 (3.49)-(3.50) 式, 可得

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|\widehat{\omega}_t\|^2+\|A^{\frac{1}{2}}\widehat{\omega}\|^2+\|A^{\frac{1}{4}}\widehat{\omega}\|^2\right)+\|A^{\frac{1}{2}}\widehat{\omega}_t\|^2+\frac{1}{2}\|A^{\frac{1}{4}}\widehat{\omega}_t\|^2\leq\frac{l^2}{2}\|A^{\frac{1}{4}}\widehat{\omega}\|^2, \tag{3.51}$$

则进一步通过放缩和引理 3.5 有

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\|\widehat{\omega}_t\|^2+\|A^{\frac{1}{2}}\widehat{\omega}\|^2+\|A^{\frac{1}{4}}\widehat{\omega}\|^2\right)&\leq\Theta_1\left(\|A^{-\frac{1}{4}}\widehat{u}_t\|^2+\|\widehat{u}\|^2+\|A^{\frac{1}{4}}\widehat{u}\|^2\right)\\&\leq\Theta_1e^{\mathcal{K}t}\|z_1-z_2\|_{\mathcal{W}}^2.\end{aligned} \tag{3.52}$$

其中 Θ_1 是与 l, λ_1 有关的常数.

将 (3.52) 式结合初始条件并在 $(0,t_*)$ 上积分, 可得

$$\begin{aligned}\|\widehat{\omega}_t\|^2+\|A^{\frac{1}{2}}\widehat{\omega}\|^2+\|A^{\frac{1}{4}}\widehat{\omega}\|^2&\leq\int_0^{t_*}\Theta_1e^{\mathcal{K}t}\|z_1-z_2\|_{\mathcal{W}}^2dt\\&\leq\frac{\Theta_1}{\mathcal{K}}e^{\mathcal{K}t_*}\|z_1-z_2\|_{\mathcal{W}}^2\\&=C_*\|z_1-z_2\|_{\mathcal{W}}^2,\end{aligned} \tag{3.53}$$

其中 $C_*=\frac{\Theta_1}{\mathcal{K}}e^{\mathcal{K}t_*}$, 故

$$\|S_1(z_1)-S_1(z_2)\|_{\mathcal{V}}\leq C_*\|z_1-z_2\|_{\mathcal{W}}.$$

即 (3.42) 式成立.

因此, 根据定理 2.2, 定理 3.7 和定理 3.8 即可得到本文的主要结果:

定理 3.9 (指数吸引子) 假设非线性项 $g(u)$ 满足条件 $(Q_1)-(Q_2)$ 和 (3.16) 式, 并且 $f \in V_2^{-1}$, 则问题 (1.1) 所生成的解半群 $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ 在 $\mathcal{W}$ 上存在指数吸引子 $\mathcal{M}$. 显然, 由指数吸引子的定义, $\mathcal{M}$ 具有如下的性质:

(i) $\mathcal{M}$ 在 $\mathcal{W}$ 中是紧的;

(ii) $\mathcal{M}$ 具有有限的分形维数;

(iii) $\mathcal{M}$ 为正不变的, 即 $S(t)\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$;

(iv) $\mathcal{M}$ 为半群 $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ 的指数吸引集, 即对每一个有界集 $B \subset \mathcal{W}$, 存在常数 $k = k(B)$, $l > 0$, 使得

$$dist(S(t)B, \mathcal{M}) \leq ke^{-lt}.$$

定理 3.10 在定理 3.9 成立的条件下, 则可以得到问题 (1.1) 的全局吸引子的分形维数是有限的.

基金项目

国家自然科学基金(11961059)。

参考文献

[1] Boussinesq, J. (1872) Théorie des ondes et des remous qui se propagent le long d'un canal rectangulaire horizontal, en communiquant au liquide contenu dans ce canal des vitesses sensiblement pareilles de la surface au fond. *Journal de Mathématiques Pures et Appliqu*é *es*, **17**, 55-108.

[2] Li, K. and Yang, Z.J. (2015) Asymptotic Behavior for the Singularly Perturbed Damped Boussinesq Equation. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **38**, 1557-1567. https://doi.org/10.1002/mma.3167

[3] Yang, Z.J., Ding, P.Y. and Liu, X.B. (2019) Attractors and Their Stability on Boussinesq Type Equations with Gentle Dissipation. *Communications on Pure and Applied Analysis*, **18**, 911-930. https://doi.org/10.3934/cpaa.2019044

[4] Feng, N. and Yang, Z.J. (2020) Well-Posedness and Attractor on the 2D Kirchhoff-Boussinesq Models. *Nonlinear Analysis*, **196**, 111-139. https://doi.org/10.1016/j.na.2020.111803

[5] Yang, Z.J., Feng, N. and Li, Y.N. (2020) Robust Attractors for a Kirchhoff-Boussinesq Type Equation. *Evolution Equations and Control Theory*, **9**, 469-488. https://doi.org/10.3934/eect.2020020

[6] Di, H.F. and Shang, Y.D. (2016) Cauchy Problem for a Higher Order Generalized Boussinesq-Type Equation with Hydrodynamical Damped Term. *Applicable Analysis*, **95**, 690-714. https://doi.org/10.1080/00036811.2015.1026811

[7] Hang, J.H. and Gao, A.Y. (2020) Blow-Up for Generalized Boussinesq Equation with Double Damping Terms. *Mediterranean Journal of Mathematics*, **17**, 182-191. https://doi.org/10.1007/s00009-020-01604-5

[8] Mohammadi, H.B. and Esfahani, A. (2019) Blowup and Decay Behavior of Solutions to the Generalized Boussinesq-Type Equation with Strong Damping. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **42**, 2854-2876. https://doi.org/10.1002/mma.5556

[9] Zhou, J. and Zhang, H. (2021) Well-Posedness of Solutions for the Sixth-Order Boussinesq Equation with Linear Strong Damping and Nonlinear Source. *Journal of Nonlinear Science*, **31**, 76-131. https://doi.org/10.1007/s00332-021-09730-4

[10] Yang, Z.J. (2013) Longtime Dynamics of the Damped Boussinesq Equation. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **399**, 180-190. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2012.09.042

[11] Geng, F., Li, R.Z., Zhang, X.J. and Ge, X.Y. (2016) Exponential Attractor for the Boussinesq Equation with Strong Damping and Clamped Boundary Condition. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, **2016**, Article ID: 5036048. https://doi.org/10.1155/2016/5036048

[12] Eden, A., Foias, C., Nicolaeko, B., *et al.* (1994) Exponential Attractors for Dissipative Evolution Equations. John Wiley and Sons, Ltd., Chichester.

[13] Miranville, A. and Zelik, S. (2008) Attractors for Dissipative Differential Equations in Bounded and Unbounded Domains. In: *Handbook of Differential Equations: Evolutionary Equations*, Vol. 4, Elsevier, Amsterdam, 103-200. https://doi.org/10.1016/S1874-5717(08)00003-0