Pure Mathematics 理论数学, 2024, 14(4), 229-239
Published Online April 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.144130

非线性一阶半正周期边值问题正解的存在性

王晶璇

西北师范大学数学与统计学院，甘肃 兰州

收稿日期：2024年3月5日；录用日期：2024年3月28日；发布日期：2024年4月26日

摘 要

本文研究了一类半正周期边值问题

$$\begin{cases} -u'(t)+a(t)g(u(t))u(t)=\lambda b(t)f(u(t-\tau(t)))-\varepsilon, \quad t\in(0,1), \\ u(0)=u(1) \end{cases} \tag{P}$$

正解的存在性，其中 λ 为正参数，ε 是一个正数，$a,b\in C(\mathbb{R},[0,\infty))$ 是 1-周期函数且 $\int_0^1 a(t)dt>0$，$\int_0^1 b(t)dt>0$，$f,g\in C([0,\infty),[0,\infty))$，$\tau(t)$ 是连续 1-周期函数。运用上下解方法和拓扑度理论，得到存在常数 $\lambda_*>0$，使得当 $\lambda\in(0,\lambda_*)$ 时，问题 (P) 存在两个正解。

关键词

正解，半正，周期边界条件，上下解方法，拓扑度理论

Existence of Positive Solutions for Nonlinear First-Order Semi-Positive Periodic Boundary Problems

Jingxuan Wang

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu

文章引用: 王晶璇. 非线性一阶半正周期边值问题正解的存在性[J]. 理论数学, 2024, 14(4): 229-239.
DOI: 10.12677/pm.2024.144130

Received: Mar. 5^{th}, 2024; accepted: Mar. 28^{th}, 2024; published: Apr. 26^{th}, 2024

Abstract

We are concerned with the existence of positive solutions for a class of semi-positive periodic boundary problems

$$\begin{cases} -u'(t) + a(t)g(u(t))u(t) = \lambda b(t)f(u(t-\tau(t))) - \varepsilon, \quad t \in (0,1), \\ u(0) = u(1), \end{cases} \tag{P}$$

where λ is a positive parameter, ε is a positive constant, $a, b \in C(\mathbb{R}, [0,\infty))$ is a 1-periodic function, $\int_0^1 a(t)dt > 0$, $\int_0^1 b(t)dt > 0$. $f, g \in C([0,\infty), [0,\infty))$, $\tau(t)$ is a continuous 1-periodic function. By using the method of upper and lower solutions and topological degree theory, we show that there exists a constant $\lambda_* > 0$, such that the problem (P) has two positive solutions for $\lambda \in (0, \lambda_*)$.

Keywords

Positive Solutions, Semi-Positive, Periodic Boundary Conditions, Upper and Lower Solutions, Topological Degree

1. 引言及主要结果

常微分方程周期边值问题在经济学, 生态学, 生物学等领域中有着广泛应用. 因此, 常微分方程周期边值问题受到学者们的广泛研究 [1–12]. 例如, Cheng 等 [1] 研究了一阶周期边值问题

$$\begin{cases} -u'(t) + a(t)u(t) = \lambda b(t)f(u(t-\tau(t))), \quad t \in (0,T), \\ u(0) = u(T), \end{cases} \tag{1.1}$$

正解的存在性, 其中 λ 是正参数. 他们运用 Krasnoselskii 不动点定理, 得到如下结果:

定理 A ([1], 定理 2.10) 设条件

(A1) $a, b \in C(\mathbb{R}, [0, \infty))$ 是 T-周期函数且当 $t_0 \in [0, T]$ 时 $a(t_0) > 0$, $\tau(t)$ 是连续 T-周期函数;

(A2) $f \in C([0, \infty), [0, \infty))$. 当 $u_n \to 0$ 时 $f(u_n) > 0, n = 1, 2, ...$

成立. 若

$$f_0 = \lim_{u \to 0} \frac{f(u)}{u} = \infty,\ f_\infty = \lim_{u \to +\infty} \frac{f(u)}{u} = \infty,$$

则存在 $\overline{\lambda}$ 使得对任意 $\lambda \in (0, \overline{\lambda})$ 时, 问题 (1.1) 至少有两个正解.

随后, Wang 在 [1] 的基础上研究了一阶周期边值问题

$$\begin{cases} -u'(t) + a(t)g(u(t))u(t) = \lambda b(t)f(u(t - \tau(t))), & t \in (0, \omega), \\ u(0) = u(\omega), \end{cases} \tag{1.2}$$

正解的存在性, 其中 λ 是正参数. 他运用不动点指数理论, 得到如下结果:

定理 B ([2], 定理 1.1) 设条件

(B1) $a, b \in C(\mathbb{R}, [0, \infty))$ 是 ω-周期函数且 $\int_0^\omega a(t)dt > 0$, $\int_0^\omega b(t)dt > 0$, $\tau(t)$ 是连续 ω-周期函数;

(B2) $f, g \in C([0, \infty), [0, \infty))$. 当 $u > 0$ 时 $f(u) > 0$. 当 $u \geq 0$ 时 $l \leq g(u) < L$, 其中 l, L 为正常数

成立. 若

$$f_0 = \lim_{u \to 0} \frac{f(u)}{u} = \infty,\ f_\infty = \lim_{u \to +\infty} \frac{f(u)}{u} = \infty,$$

则当 $0 < \lambda < \frac{1-\sigma^l}{M(1)\int_0^\omega b(s)ds}$ 时, 问题 (1.2) 有两个 ω-正周期解. 其中 $\sigma = e^{-\int_0^\omega a(t)dt}$, $M(r) = \max\limits_{0 \leq t \leq r}\{f(t)\}$.

值得注意的是, 问题 (1.1) 是问题 (1.2) 中 $g(u(t)) \equiv 1$ 的特殊情况. 此外, 文献 [1,2] 都是在非线性项非负的情况下得到问题 (1.1) 及问题 (1.2) 正解的存在性. 那么, 当引入正常数 ε 时, 能否运用 Krasnoselskii 不动点定理, 不动点指数理论获得一阶周期边值问题正解的存在性? 事实上, 引入正常数 ε, 既增加了问题的难度, 又将问题推广至半正情形, 从而锥上的理论不能直接使用. 基于此, 本文采用上下解方法和拓扑度理论考虑一阶周期边值问题

$$\begin{cases} -u'(t) + a(t)g(u(t))u(t) = \lambda b(t)f(u(t - \tau(t))) - \varepsilon, & t \in (0, 1), \\ u(0) = u(1) \end{cases} \tag{1.3}$$

正解的存在性, 其中 λ 是正参数且 ε 是一个充分小的正数.

本文总假定:

(H1) $a, b \in C(\mathbb{R}, (0, \infty))$ 是 1-周期函数且 $\int_0^1 a(t)dt > 0$, $\int_0^1 b(t)dt > 0$. τ 是连续 1-周期函数;

(H2) $g \in C([0, \infty), [0, \infty))$. 当 $u \geq 0$ 时, $l \leq g(u) < L$, $l, L > 0$ 是常数;

(H3) $f \in C([0, \infty), [0, \infty))$. 当 $u > 0$ 时, $f(u) > 0$ 且满足 $\lim\limits_{u \to 0^+} \frac{f(u)}{u} = \infty$, $\lim\limits_{u \to +\infty} \frac{f(u)}{u} = \infty$.

本文主要结果如下:

定理 1.1 假设 (H1)-(H3) 成立, 则存在 $\Lambda > 0,\ \lambda_* > 0$ 使得当 $\varepsilon \in (0, \Lambda),\ \lambda \in (0, \lambda_*)$ 时, 问题 (1.3) 有两个正解.

2. 预备知识

令空间 $X := C[0,1]$, 其在范数 $\|u\| = \max\limits_{t\in[0,1]} |u(t)|$ 下构成 Banach 空间.

定义算子 $L : D(L) \subset X \to X$ 为

$$Lu = -u'(t) + a(t)g(u(t))u(t), \quad u \in D(L),$$

其中

$$D(L) = \{u \in C^1[0,1] \mid u(0) = u(1)\}.$$

引理 2.1 [13] 设 E 是一个 Banach 空间, 且 K 是 E 中的一个锥. 对于 $p > 0$, 定义 $K_p = \{x \in K \mid |x| \le p\}$. 假设 $F : K_p \to K$ 是一个紧算子且满足对 $x \in \partial K_p = \{x \in K \mid |x| = p\}$ 有 $Fx \ne x$.

(i) 如果 $x \in \partial K_p$, 有 $\|x\| \le \|Fx\|$, 则

$$i(F, K_p, K) = 0;$$

(ii) 如果 $x \in \partial K_p$, 有 $\|x\| \ge \|Fx\|$, 则

$$i(F, K_p, K) = 1.$$

引理 2.2 假设 h 为非负连续函数, 则问题

$$\begin{cases} -u' + a(t)g(u(t))u(t) = h(t), & t \in (0,1), \\ u(0) = u(1), \end{cases} \tag{2.1}$$

等价于积分方程

$$u(t) = \int_0^1 G_u(t,s)h(s)ds, \tag{2.2}$$

其中

$$G_u(t,s) = \begin{cases} \frac{\exp(-\int_0^1 a(\theta)g(u(\theta))d\theta)\exp(-\int_t^s a(\theta)g(u(\theta))d\theta)}{1-\exp(-\int_0^1 a(\theta)g(u(\theta))d\theta)}, & 0 \le s \le t \le 1, \\ \frac{\exp(-\int_t^s a(\theta)g(u(\theta))d\theta)}{1-\exp(-\int_0^1 a(\theta)g(u(\theta))d\theta)}, & 0 \le t \le s \le 1, \end{cases}$$

且 $G_u(t,s) > 0,\ t,\ s \in [0,1]$.

证明 (充分性) 问题 (2.1) 第一个方程两边同乘 $e^{-\int_0^t a(\theta)g(u(\theta))d\theta}$, 整理得

$$(-u(t)e^{-\int_0^t a(\theta)g(u(\theta))d\theta})' = h(t)e^{-\int_0^t a(\theta)g(u(\theta))d\theta}. \tag{2.3}$$

对 (2.3) 从 0 到 t 上积分得

$$u(0) = \int_0^t h(s)\exp(-\int_0^s a(\theta)g(u(\theta))d\theta)ds + u(t)\exp(-\int_0^t a(\theta)g(u(\theta))d\theta),$$

对 (2.3) 从 t 到 1 上积分得

$$u(1) = \frac{u(t)\exp(-\int_0^t a(\theta)g(u(\theta))d\theta) - \int_t^1 h(s)\exp(-\int_0^s a(\theta)g(u(\theta))d\theta)ds}{\exp(-\int_0^1 a(\theta)g(u(\theta))d\theta)}.$$

于是有

$$u(t)=\int_0^t \frac{\exp(-\int_0^1 a(\theta)g(u(\theta))d\theta)\exp(-\int_t^s a(\theta)g(u(\theta))d\theta)}{1-\exp(-\int_0^1 a(\theta)g(u(\theta))d\theta)}h(s)ds+\int_t^1 \frac{\exp(-\int_t^s a(\theta)g(u(\theta))d\theta)}{1-\exp(-\int_0^1 a(\theta)g(u(\theta))d\theta)}h(s)ds,$$

则 (2.2) 式成立.

(必要性) 对式 (2.2) 两端求导得

$$\begin{aligned} u'(t) =& \frac{\exp(-\int_0^t a(\theta)g(u(\theta))d\theta)h(t) - h(t)}{1-\exp(-\int_0^1 a(\theta)g(u(\theta))d\theta)} + \frac{a(t)g(u(t))\int_t^1 h(t)\exp(-\int_t^s a(\theta)g(u(\theta))d\theta)ds}{1-\exp(-\int_0^1 a(\theta)g(u(\theta))d\theta)} \\ &+ \frac{a(t)g(u(t))\exp(-\int_0^1 a(\theta)g(u(\theta))d\theta)\int_0^t h(t)\exp(-\int_t^s a(\theta)g(u(\theta))d\theta)ds}{1-\exp(-\int_0^1 a(\theta)g(u(\theta))d\theta)}. \end{aligned}$$

则有

$$-u' + a(t)g(u(t))u(t) = h(t),$$

且有

$$u(0) = \int_0^1 \frac{\exp(-\int_0^s a(\theta)g(u(\theta))d\theta)}{1-\exp(-\int_0^1 a(\theta)g(u(\theta))d\theta)}h(s)ds = u(1).$$

从而 (2.1) 式成立. □

记 $\sigma = \exp(-\int_0^1 a(\theta)g(u(\theta))d\theta)$, 则

$$\frac{\sigma}{1-\sigma} \le G_u(t,s) \le \frac{1}{1-\sigma}, \quad (t,s) \in [0,1]\times[0,1]. \tag{2.4}$$

3. 正问题正解的存在性

本节考虑问题

$$\begin{cases} -u'(t) + a(t)g(u(t))u(t) = \lambda b(t)f(u(t-\tau(t))), & t\in(0,1), \\ u(0) = u(1) \end{cases} \tag{3.1}$$

正解的存在性, 其中 $a(t)$, $b(t)$, $\tau(t)$ 满足 (H1), g 满足 (H2), f 满足 (H3) 且 λ 是正参数.

定理 3.1 假设 (H1)-(H3) 成立, 则存在 $\lambda_*>0$, 使得当 $0<\lambda<\lambda_*$ 时, 问题 (3.1) 有两个正解.

证明 问题 (3.1) 等价于:

$$u(t)=\lambda\int_0^1 G_u(t,s)b(s)f(u(s-\tau(s)))ds\triangleq Tu. \tag{3.2}$$

定义

$$K=\{u\in X\mid u(t)\geq 0,\ u(t)\geq\sigma\|u\|,\ t\in[0,1]\}, \tag{3.3}$$

则 K 是 X 中的锥. 对任意的 $u\in K$, 由式 (2.4) 和 (3.2) 知,

$$\begin{aligned}
Tu(t)&=\lambda\int_0^1 G_u(t,s)b(s)f(u(s-\tau(s)))ds\\
&\geq\frac{\sigma}{1-\sigma}\lambda\int_0^1\frac{G_u(t,s)}{G_u(t,s)}b(s)f(u(s-\tau(s)))ds\\
&\geq\sigma\lambda\int_0^1 G_u(t,s)b(s)f(u(s-\tau(s)))ds\\
&=\sigma\|Tu\|.
\end{aligned}$$

因此 $T(K)\subset K$. 此外, 由 Arzèla-Ascoli 定理可得, $T:K\to K$ 是全连续的.

由于 $b(t)$ 是 1-周期函数, 则存在 $m_b\leq M_b$ 使得 $m_b\leq b(t)\leq M_b$. 由 $\lim\limits_{u\to0^+}\frac{f(u)}{u}=\infty$, 则 $\exists\, r>0$, 使得当 $0\leq u\leq r$ 时, 有

$$f(u(t-\tau(t)))\geq Mu, \tag{3.4}$$

其中 $M>0$ 且满足 $\lambda\frac{m_b\sigma^2}{1-\sigma}M>1$.

对 $\forall\, u\in\partial K_r$, 由式 (3.2)-(3.4) 有

$$\begin{aligned}
\|Tu\|&=\max_{0\leq t\leq 1}\lambda\int_0^1 G_u(t,s)b(s)f(u(s-\tau(s)))ds\\
&\geq\lambda\frac{\sigma}{1-\sigma}\int_0^1 m_bMuds\\
&\geq\lambda\frac{m_b\sigma^2}{1-\sigma}M\|u\|\\
&>\|u\|.
\end{aligned}$$

根据引理 2.1 知

$$i(T,K_r,K)=0. \tag{3.5}$$

如果 $\lim\limits_{u\to+\infty}\frac{f(u)}{u}=\infty$, 则 $\exists\, N>0$, 使得 $u\geq N$ 时有 $f(u(t-\tau(t)))\geq Mu$. 令 $R=\max\{2r,\frac{N}{\sigma}\}$. 对 $u\in\partial K_R$, 有 $u(t)\geq\sigma\|u\|\geq N$. 则有

$$\begin{aligned}\|Tu\| &= \max_{0\le t\le 1}\lambda\int_0^1 G_u(t,s)b(s)f(u(s-\tau(s)))ds\\ &\ge \lambda\frac{\sigma}{1-\sigma}\int_0^1 m_b M u ds\\ &\ge \lambda\frac{m_b\sigma^2}{1-\sigma}M\|u\|\\ &> \|u\|.\end{aligned}$$

于是

$$i(T,K_R,K)=0. \tag{3.6}$$

另一方面, 由 $f(u(t-\tau(t)))$ 的连续性知, 对 $\forall\, u(t-\tau(t))\in[r,R]$, $\exists\, M_f>0$, 有 $|f(u(t-\tau(t)))|<M_f$. 取 $p\in(r,R)$, 满足

$$\frac{\lambda}{1-\sigma}M_bM_f\le p,$$

即 $\lambda\le\frac{p(1-\sigma)}{M_bM_f}\triangleq\lambda_*$. 则对任意的 $u\in\partial K_p$

$$\begin{aligned}\|Tu\| &= \max_{0\le t\le 1}\lambda\int_0^1 G_u(t,s)b(s)f(u(s-\tau(s)))ds\\ &\le \lambda\frac{1}{1-\sigma}\int_0^1 b(s)f(u(s-\tau(s)))ds\\ &< \frac{\lambda}{1-\sigma}M_bM_f\\ &\le p\\ &= \|u\|.\end{aligned}$$

由引理 2.1 可知

$$i(T,K_p,K)=1. \tag{3.7}$$

由不动点指数的可加性和 (3.5)–(3.7) 有

$$i(T,K_R\backslash K_p,K)=i(T,K_R,K)-i(T,K_p,K)=-1$$

和

$$i(T,K_p\backslash K_r,K)=i(T,K_p,K)-i(T,K_r,K)=1.$$

因此, T 在 $K_R\backslash K_p$ 上有一个不动点 u_1, 在 $K_p\backslash K_r$ 上有一个不动点 u_2. □

4. 主要结果的证明

首先, 定义问题 (3.1) 的上下解.

定义 4.1 [10] 如果 $\alpha \in C^1[0,1]$ 且满足

$$\begin{cases} \alpha'(t)+\lambda b(t)f(\alpha(t-\tau(t)))-a(t)g(\alpha(t))\alpha(t)\geq 0, \quad t\in(0,1), \\ \alpha(0)\geq\alpha(1), \end{cases}$$

则称 α 是问题 (3.1) 的下解.

定义 4.2 [10] 如果 $\beta \in C^1[0,1]$ 且满足

$$\begin{cases} \beta'(t)+\lambda b(t)f(\beta(t-\tau(t)))-a(t)g(\beta(t))\beta(t)\leq 0, \quad t\in(0,1), \\ \beta(0)\leq\beta(1), \end{cases}$$

则称 β 是问题 (3.1) 的上解.

下构造问题 (3.1) 的两对上下解.

对于固定的 $0<\lambda<\lambda_*$, 存在 $\eta>0$, 使得 $0<\lambda-\eta<\lambda_*$, 由定理 3.1 可知

$$\begin{cases} -u'(t)+a(t)g(u(t))u(t)=(\lambda-\eta)b(t)f(u(t-\tau(t))), \quad t\in(0,1), \\ u(0)=u(1) \end{cases}$$

有两个解 α_1,α_2, 不失一般性, 令 $\alpha_1>\alpha_2$ 且 α_1,α_2 是问题 (3.1) 的严格下解. 同理, 存在 $\gamma>0$ 充分小, 使得 $0<\lambda+\gamma<\lambda_*$, 则问题

$$\begin{cases} -u'(t)+a(t)g(u(t))u(t)=(\lambda+\gamma)b(t)f(u(t-\tau(t))), \quad t\in(0,1), \\ u(0)=u(1) \end{cases}$$

有两个解 β_1,β_2, 不失一般性, 令 $\beta_1>\beta_2$ 且 β_1,β_2 是问题 (3.1) 的严格上解. 注意: $\alpha_1\ll\beta_1$ 和 $\beta_2\ll\alpha_2$.

定义算子

$$F(\varepsilon,u)=\int_0^1 G_u(t,s)(\lambda b(s)f(u(s-\tau(s))-\varepsilon)ds.$$

定义 X 的有界开子集:

$$U_{\alpha_1}^{\beta_1}=\{u\in X:\ \alpha_1\ll u\ll\beta_1,\ \|u\|<1\},$$

$$U_{\beta_2}^{\alpha_2}=\{u\in X:\ \beta_2\ll u\ll\alpha_2,\ \|u\|<1\},$$

则

$$\deg(I-F(0,\cdot),U_{\alpha_1}^{\beta_1},0)=1,$$

$$\deg(I - F(0,\cdot), U_{\beta_2}^{\alpha_2}, 0) = -1.$$

令 $\sum := \{(\lambda, u) | (\lambda, u) \in (0, \infty) \times X,\ u$ 是 (3.1) 的解$\}$. 则存在一个连通分支 $\xi \in \sum$, 使得

$$\xi \cap \{(\lambda, u) \in \sum \mid 0 < \lambda < \lambda_*,\ \|u\| = \rho_0\} = \emptyset,$$

其中 λ_*, ρ_0 是两个常数.

引理 4.1 假设 $U_1 = \{u | \ (\lambda, u) \in \xi$ 且 $\|u\| > \rho_0\}$ 和 $U_2 = \{u | \ (\lambda, u) \in \xi\} \backslash U_1$, 那么 U_1, U_2 是有限集.

证明 由 [14] 可知 $U_1,\ U_2 \neq \emptyset$ 且 $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. 首先假设 U_1 是一个有限集. 否则取任意点 $u_1 \in U_1$ 且 $A_1 := \{u_1\}$, $B_1 := U_1 \backslash A_1$. 则 $A_1,\ B_1$ 是 $\sum$ 的闭子集且 $A_1 \cap B_1 = \emptyset$. 由 [15] 可知存在两个非连通紧子集 $\widetilde{A_1},\ \widetilde{B_1} \subset U_1$, 使得 $A_1 \subset \widetilde{A_1},\ B_1 \subset \widetilde{B_1}$ 和 $d(\widetilde{A_1},\ \widetilde{B_1}) > 0$.

然后, 取任意 $u_2 \in \widetilde{B_1}$ 和 $A_2 := \{u_2\}$, $B_2 := \widetilde{B_1} \backslash A_2$. 类似地, 存在两个不相交的紧子集 $\widetilde{A_2},\ \widetilde{B_2} \subset U_1$, 使得 $A_2 \subset \widetilde{A_2},\ B_2 \subset \widetilde{B_2}$ 且 $d(\widetilde{A_2},\ \widetilde{B_2}) > 0$.

重复上述步骤, 存在一个序列 $\{\widetilde{A_n}\}$ 满足 $\widetilde{A_{n+1}} \subset \widetilde{A_n}$ 且 $d(\widetilde{A_n},\ \widetilde{A_{n+1}}) > 0$. 这与 U_1 是一个无限集矛盾. 同理可得, U_2 是一个有限集. □

由引理 4.1 知, 总能找到两个解 $u_1 \in U_1, u_2 \in U_2$ 且由 [15] 可知存在 u_1 的邻域 $\Re_1$ 和 u_2 的邻域 $\Re_2$ 满足 $\Re_1 \in U_{\alpha_1}^{\beta_1}, \Re_2 \in U_{\beta_2}^{\alpha_2}$ 且 $\Re_1 \cap \Re_2 = \emptyset$, 使得

$$\deg(I - F(0,\cdot), \Re_1, 0) = 1,$$

$$\deg(I - F(0,\cdot), \Re_2, 0) = -1,$$

$$\deg(I - F(0,\cdot), \partial\Re_1, 0) = \deg(I - F(0,\cdot), \partial\Re_2, 0) = 0.$$

定理 1.1 的证明 首先证明 $\exists\, \varepsilon_1 > 0$ 使得当 $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_1$ 时 $\deg(I - F(\varepsilon,\cdot), \Re_1, 0) = 1$.

对于 $\forall u \in \partial\Re_1$ 满足 $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_1$, 都有 $(I - F)(\varepsilon, u) \neq 0$. 否则, 存在一个序列 $\{(\varepsilon_j, u_j)\}$ 其中 $\varepsilon_j \to 0$, $u_j \in \partial\Re_1$, 使得 $u_j = F(\varepsilon_j, u_j)$. 根据 Arzèla-Ascoli 定理, 若必要则取子序列并重新标记, $u_j \to u$, $u \in \partial\Re_1$. 因为 $F(\varepsilon,\cdot)$ 是一个紧算子, 所以 $u = F(0, u)$. 这与 $\deg(I - F(0,\cdot), \partial\Re_1, 0) = 0$ 矛盾, 则 $\exists\, \varepsilon_1 > 0$ 使得

$$\deg(I - F(\varepsilon,\cdot), \Re_1, 0) = 1, \quad 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_1.$$

同理可得, $\exists\, \varepsilon_2 > 0$ 使得

$$\deg(I - F(\varepsilon,\cdot), \Re_2, 0) = -1, \quad 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_2.$$

结合 Leray-Schauder 延拓定理可知 $F(\varepsilon, u) = u, \varepsilon > 0$ 的解存在两个连通子集 Γ_1, Γ_2, 使得 $(0, u_1) \in \overline{\Gamma_1}$, $(0, u_2) \in \overline{\Gamma_2}$. 而且, $\exists\, \Lambda := \min\{\varepsilon_1,\ \varepsilon_2\} > 0$ 使得 $0 < \varepsilon \leq \Lambda$ 时解为正. □

5. 应用

例 考虑问题

$$\begin{cases} -u'(t)+u(\sin 2\pi t+1)\cos u=\lambda(\cos 2\pi t+1)e^{u(t-\sin 2\pi t)}-\varepsilon, & t\in(0,1), \\ u(0)=u(1), \end{cases} \tag{5.1}$$

正解的存在性, 其中 λ 是正参数且 ε 是一个正数.

解 取 $a(t)=\sin 2\pi t+1,\ b(t)=\cos 2\pi t+1,\ \tau(t)=\sin 2\pi t,\ g(u)=\cos u,\ f(u)=e^u$.

对于问题 (5.1) 而言, 显然 f 是连续的非负函数, 且有

$$f_0:=\lim_{u\to 0}\frac{f(u)}{u}=\lim_{u\to 0}\frac{e^u}{u}=\infty,\ f_\infty:=\lim_{u\to\infty}\frac{f(u)}{u}=\lim_{u\to\infty}\frac{e^u}{u}=\infty.$$

则 f 满足 (H3). $g(u)=\cos u$ 有界则 g 满足 (H2). $\tau(t)=\sin 2\pi t\in C([0,1],\mathbb{R})$ 是 1-周期函数, $a(t)=\sin 2\pi t+1,\ b(t)=\cos 2\pi t+1\in C([0,1],[0,\infty))$ 是 1-周期的, 且

$$\int_0^1 a(t)dt=\int_0^1(\sin 2\pi t+1)dt=1>0,\ \int_0^1 b(t)dt=\int_0^1(\cos 2\pi t+1)dt=1>0$$

则满足 (H1). 综上, 根据定理 1.1, 存在 $\Lambda>0,\ \lambda_*>0$ 使得当 $\varepsilon\in(0,\Lambda),\ \lambda\in(0,\lambda_*)$ 时, 问题 (5.1) 存在两个正解. □

基金项目

国家自然科学基金资助项目(批准号: 12061064)。

参考文献

[1] Cheng, S.S. and Zhang, G. (2001) Existence of Positive Periodic Solutions for Non-Autonomous Functional Differential Equations. *Electronic Journal of Differential Equations*, **59**, 1-8.

[2] Wang, H.Y. (2004) Positive Periodic Solutions of Functional Differential Equations. *Journal of Differential Equations*, **202**, 354-366. https://doi.org/10.1016/j.jde.2004.02.018

[3] Ma, R.Y., Chen, R.P. and Chen, T.L. (2011) Existence of Positive Periodic Solutions of Nonlinear First-Order Delayed Differential Equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **384**, 527-535. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2011.06.003

[4] Tisdell, C.C. (2006) Existence of Solutions to First-Order Periodic Boundary Value Problems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **323**, 1325-1332. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2005.11.047

[5] Wang, H.Y. (1994) Multiple Positive Solutions of Some Boundary Value Problems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **184**, 640-648.
https://doi.org/10.1006/jmaa.1994.1227

[6] Ma, R.Y., Xu, J. and Han, X.L. (2011) Global Bifurcation of Positive Solutions of a Second-Order Periodic Boundary Value Problem with Indefinite Weight. *Nonlinear Analysis*, **4**, 3379-3385. https://doi.org/10.1016/j.na.2011.02.013

[7] Peng, S.G. (2004) Positive Solutions for First Order Periodic Boundary Value Problem. *Applied Mathematics and Computation*, **158**, 345-351. https://doi.org/10.1016/j.amc.2003.08.090

[8] Ma, R.Y., Gao, C.H. and Xu, J. (2011) Existence of Positive Solutions for First Order Discrete Periodic Boundary Value Problems with Delay. *Nonlinear Analysis*, **74**, 4186-4191.
https://doi.org/10.1016/j.na.2011.03.053

[9] Graef, J.R. and Kong, L.J. (2011) Periodic Solutions of First Order Functional Differential Equation. *Applied Mathematics Letters*, **24**, 1981-1985.
https://doi.org/10.1016/j.aml.2011.05.020

[10] Zhang, Z.X. and Wang, J.Y. (2003) On Existence and Multiplicity of Positive Solutions to Periodic Boundary Value Problems for Singular Nonlinear Second-Order Differential Equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **281**, 99-107.
https://doi.org/10.1016/S0022-247X(02)00538-3

[11] Graef, J.R. and Kong, L.J. (2011) Existence of Multiple Periodic Solutions for First Order Functional Differential Equations. *Mathematical and Computer Modelling*, **54**, 2962-2968.
https://doi.org/10.1016/j.mcm.2011.07.018

[12] Wang, H.Y. and Jin, Z.L. (2010) A Note on Positive Periodic Solutions of Delayed Differential Equations. *Applied Mathematics Letters*, **23**, 581-584.
https://doi.org/10.1016/j.aml.2010.01.015

[13] Guo, D.J. and Lakshmikanthan, V. (1988) Nonlinear Problems in Abstract Cones. Academic Press, New York.

[14] Zhang, X. and Feng, M. (2019) Bifurcation Diagrams and Exact Multiplicity of Positive Solutions of One-Dimensional Prescribed Mean Curvature Equation in Minkowski Space. *Communications in Contemporary Mathematics*, **21**, Article 1850003.
https://doi.org/10.1142/S0219199718500037

[15] Whyburn, G.T. (1958) Topological Analysis. Princeton University Press, Princeton.