Pure Mathematics 理论数学, 2024, 14(4), 164-169
Published Online April 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.144122

Hans汉斯

带有移民的上临界Markov分支过程的下偏差概率

彭　超[*]，王　娟

上海理工大学理学院，上海

收稿日期：2024年3月4日；录用日期：2024年3月24日；发布日期：2024年4月23日

摘　要

设$\{Z(t);t\geq 0\}$为具有迁移的连续时间上临界分支过程(MBPI)，其子代均值为$m(t)$。本文主要研究当$t\to\infty$时，$\frac{k_t}{m(t)}\to\infty$的下偏差概率，具体包括局部下偏差概率$P(Z(t)=k_t)$和总体下偏差概率$P(0\leq Z(t)\leq k_t)$。此外，我们还给出了局部极限定理和一些相关的估计。对于我们的证明，我们使用了著名Cramer方法来证明自变量和的大偏差，以满足我们的需要。

关键词

下偏差，上临界，分支过程，移民

Lower Deviation Probabilities for Supercritical Markov Branching Processes with Immigration

Chao Peng[*], Juan Wang

College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai

Received: Mar. 4th, 2024; accepted: Mar. 24th, 2024; published: Apr. 23rd, 2024

Abstract

Let $\{Z(t);t\geq 0\}$ be a continuous-time supercritical branching process with immigration (MBPI)

[*]通讯作者。

文章引用: 彭超, 王娟. 带有移民的上临界 Markov 分支过程的下偏差概率[J]. 理论数学, 2024, 14(4): 164-169.
DOI: 10.12677/pm.2024.144122

with offspring mean $m(t)$. In this paper, we mainly research the local lower deviation probabilities $P(Z(t)=k_t)$ and overall lower deviation probabilities $P(0\le Z(t)\le k_t)$ with $k_t/m(t)\to\infty$ as $t\to\infty$. Moreover, we present the local limit theorem and some related estimates of this MBPIs. For our proofs, we use the well-known Cramer method to prove the large deviation of the sum of independent variables to satisfy our needs.

Keywords

Lower Deviation, Supercritical, Branching Process, Immigration

1. 引言

假设$\{Z(t);t\ge 0\}$是一个连续时间马尔可夫分支迁移过程(MBPI)，该过程由系统内部现有个体和外部迁移组成。这两个部分相互独立，并且具有相同的分布，并服从分支率$\{b_j;j\ge 0\}$，移民率$\{a_j;j\ge 0\}$，

$$\begin{cases} b_j\ge 0(j\ne 1), 0<-b_1=\sum_{j\ne 1}b_j<\infty \\ a_j\ge 0(j\ne 0), 0<-a_0=\sum_{j\ne 0}a_j<\infty \end{cases}$$

对应的 Q-矩阵$Q=\{q_{ij};i,j\in\mathbb{Z}_+\}$定义如下：

$$\begin{cases} ib_{j-i+1}+a_{j-i} & \text{if } i\ge 0, j\ge i \\ ib_0 & \text{if } i\ge 0, j=i-1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

本文查阅了过去大量文献，发现对于大偏差的研究引起了各国学者们广泛的关注。Athreya [1]讨论了 Galton-Watson 过程大偏差的衰减速率。刘和张[2]研究了带有移民的超临界分支过程中$P\left(\left|\frac{Y_{n+1}}{Y_n}-m>\varepsilon\right|\right)$的衰减速率。孙和张[3]考虑了带有移民的超临界分支过程的调和矩的收敛率。李[4]研究了马尔可夫分支过程的大偏差速率。在文献[4]的基础上，刘等人[5]研究了带移民的马尔可夫分支系统的长期行为。Fleischmann 和 Wachtel [6]研究了上临界 GW 过程的低偏差概率。

近年来，连续时间状态下的马尔可夫分支过程引起了国内外学者的广泛关注。例如李等人[7]研究了带迁移的 Markov 分支过程的渐进性质。Asmussen 和 Hering [8]研究了分支行为的一些性质以及偏差。Athreya 和 Ney [9]研究了上临界分支过程的局部极限定理。Dubuc 和 Seneta [10]研究了 Galton-Watson 过程的局部极限定理。Pakes 等人[11]研究了带有移民的上临界 Galton-Watson 过程。Petrov 等人[12]研究了独立随机变量之和。Royden 等人[13]分析了 Markov 过程。Seneta 等人[14]研究了关于移民状态下的上临界 Galton-Watson 过程各种性质。受上述文献的启发，我们在$E[Z(1)\log Z(1)]<\infty$的假设下，处理了全局下偏差概率$P(Z(t)=k_t)$和局部下偏差概率$P(0<Z(t)<k_t)$的渐进行为。此外，我们还应用 Cramer 方法来分析自变量和的大偏差。

本文的其余部分组织如下。在第 2 节中，我们陈述了一些必要的准备工作，将 Cramer 方法应用于 MBPIs，并给出了一些相关的估计。第三节对主要结果进行了具体和详细的证明。

2. 主要定理以及证明

定义 $\{Z^0(t);t\ge 0\}$ 为没有迁移的纯分支过程，$P^0(t)=\left(p_{ij}^0(t);i\ge 1,j\ge 1\right)$ 为 $\{Z^0(t);t\ge 0\}$ 的转移概率函数，$F^0(s,t)=\sum_{j=0}^{\infty}p_{1j}^0(t)s^j$ 为 $\{Z^0(t);t\ge 0\}$ 的概率母函数，其中初始状态 $Z^0(0)=1$。

令 $P(t)=\left(p_{ij}(t);i\ge 1,j\ge 1\right)$ 为带迁移的分支过程 $\{Z(t);t\ge 0\}$ (MBPI)的概率母函数，定义 $G_l(s,t):=E\left[s^{Z(t)}\,|\,Z(0)=l\right]=\sum_{j=0}^{\infty}p_{lj}(t)s^j$，其中对于所有的 $0\le s<1$，$G_l(s,0)=s^l$ 成立。

因此我们有如下结果，

定理 2.1 对任意的 $0\le s<1$ 和 $t\ge 0$，

$$G_l(s,t)=H(s,t)\left[F^0(s,t)\right]^l,\ l\in\mathbb{Z}_+$$

其中

$$H(s,t):=E\left[s^{Y(t)}\,|\,Y(0)=0\right]=\sum_{j=0}^{\infty}h_{lj}(t)s^j,$$

$$F_l^0(s,t):=E\left[s^{X(t)}\,|\,X(0)=l\right]=\sum_{j=0}^{\infty}q_{lj}(t)s^j$$

$$\begin{aligned}G_l(s,t)&:=E\left[s^{Z(t)}\,|\,Z(0)=l\right]=E\left[s^{X(t)+Y(t)}\,|\,X(0)+Y(0)=l\right]\\&=E\left[s^{X(t)}\,|\,X(0)=l\right]E\left[s^{Y(t)}\,|\,Y(0)=0\right]=H(s,t)F_l(s,t)\end{aligned}。$$

故成立。

定理 2.2 定义函数 $Q(u)=\sum_{j=1}^{\infty}q_ju^j$，则 $Q(u)$ 是以下等式

$$B(u)Q'(u)+\left[A(u)-a_0-b_1\right]Q(u)=0,\quad 0\le u<1$$

的唯一解。其中 $Q(u)$ 满足 $Q(0)=0$，$Q'(0)=1$，$Q(1)=\infty$ 且对于所有的 $0\le u<1$，$Q(u)<\infty$。

这里的 q_j 满足

$$q_j:=\begin{cases}p_{11}(t)\mathrm{e}^{-(b_1+a_0)t} & \text{if}\ \ j=1\\ \lim\limits_{t\to\infty}p_{1j}(t)\mathrm{e}^{-(b_1+a_0)t} & \text{if}\ \ j\ge 2\end{cases}$$

其中 $q_1=1$，$q_j\le\prod_{k=1}^{j-1}\left(1+\frac{a_0}{kb_1}\right)(j\ge 2)$

定理 2.3 对任意的 $0\le s<1$ 和 $t\ge 0$，定义

$$R(s,t):=\frac{H(s,t)}{\mathrm{e}^{a_0t}},\quad Q^0(s,t):=\frac{F^0(s,t)}{\mathrm{e}^{b_1t}}$$

所以有

$$Q_l(s,t):=\frac{G_l(s,t)}{\mathrm{e}^{(a_0+b_1l)t}}=R(s,t)Q_l^0(s,t)\nearrow R(s)Q_l^0(s),\quad t\to\infty$$

证明：

$$Q_l(s,t):=\frac{G_l(s,t)}{\mathrm{e}^{(a_0+b_1l)t}}=\frac{H(s,t)F_l^0(s,t)}{\mathrm{e}^{(a_0+b_1l)t}}=\frac{H(s,t)}{\mathrm{e}^{a_0t}}\left(\frac{F^0(s,t)}{\mathrm{e}^{b_1t}}\right)^l=R(s,t)Q_l^0(s,t)$$

定理 2.4 如果满足 $E\left[\mathrm{e}^{iaX(h)}\right]=\dfrac{E\left[\mathrm{e}^{(h+ia)X}\right]}{E\left[\mathrm{e}^{hX}\right]}$，其中 $a\in\mathbb{R}$，则随机变量 $X(h)$ 被称作实随机变量 X 的 Cramer 变换。

由于分支部分 $Z^0(t)$ 和纯移民部分 $Y(t)$ 是独立的，为了讨论方便，我们分别给出它们的 Cramer 变换。

对于任意的 $h\ge 0$ 和 $t\ge 0$，定义随机变量序列 $\{X_i(h,t);i\ge 1\}$，它们独立同分布于由常数 $-h/\mathrm{e}^{mt}$ 决定的 $Z^0(t)$ 的 Cramer 变换。

$$P\left[X_i(h,t)=k\right]=\frac{\mathrm{e}^{-kh/\mathrm{e}^{mt}}}{F^0\left(\mathrm{e}^{-h/\mathrm{e}^{mt}},t\right)}P^0\left[Z^0(t)=k\right],\ k\ge 1$$

上式可改写为

$$E\left[\mathrm{e}^{iaZ^0\left(-h/\mathrm{e}^{mt}\right)}\right]=E\left[\mathrm{e}^{iaX_1(h,t)}\right]=\frac{F^0\left(\mathrm{e}^{-h/\mathrm{e}^{mt}+ia},t\right)}{F^0\left(\mathrm{e}^{-h/\mathrm{e}^{mt}},t\right)}.$$

同理，对于纯移民部分 $Y(t)$，克拉姆变换由常数 $-h/\mathrm{e}^{mt}$ 决定。我们可以定义一个随机变量 $T(h,t)$，它独立于 $X_i(h,t)$ 和 $Y(t)$，并且服从与 $Y(t)$ 相同的子代分布规律。

$$P\left[T(h,t)=k\right]=\frac{\mathrm{e}^{-kh/\mathrm{e}^{mt}}}{H\left(\mathrm{e}^{-h/\mathrm{e}^{mt}},t\right)}P\left[Y(t)=k\right],\ k\ge 1$$

上式也可以改写为

$$E\left[\mathrm{e}^{iaT\left(-h/\mathrm{e}^{mt}\right)}\right]=E\left[\mathrm{e}^{iaY(h,t)}\right]=\frac{H\left(\mathrm{e}^{-h/\mathrm{e}^{mt}+ia},t\right)}{H\left(\mathrm{e}^{-h/\mathrm{e}^{mt}},t\right)}.$$

经过以上变换，我们构造出一个独立随机变量序列 $\{S_l(h,t);t\ge 0,k\ge 1\}$ 表示为

$$S_l(h,t):=\sum_{i=1}^{l}X_i(h,t)+T(h,t),\ l\ge 1$$

因此有

$$P\left[S_l(h,t)=k\right]=\frac{\mathrm{e}^{-kh/\mathrm{e}^{mt}}}{G_l\left(\mathrm{e}^{-h/\mathrm{e}^{mt}},t\right)}P\left[Z(t)=k\mid Z(0)=l\right],\ k\ge 1$$

定理 2.4 的证明：其

$$\begin{aligned}
E\mathrm{e}^{iaS_l(h,t)}&=E\mathrm{e}^{ia\left[\sum_{i=1}^{l}X_i(h,t)+T(h,t)\right]}\\
&=E\mathrm{e}^{iaZ^0\left(\frac{-h}{\mathrm{e}^{mt}},t\right)}E\mathrm{e}^{iaY\left(\frac{-h}{\mathrm{e}^{mt}},t\right)}\\
&=\frac{E\left[\mathrm{e}^{\left(\frac{-h}{\mathrm{e}^{mt}+ia}\right)Z^0},t\right]}{E\left[\mathrm{e}^{\left(\frac{-h}{\mathrm{e}^{mt}}\right)Z^0},t\right]}\frac{E\left[\mathrm{e}^{\left(\frac{-h}{\mathrm{e}^{mt}+ia}\right)Y},t\right]}{E\left[\mathrm{e}^{\left(\frac{-h}{\mathrm{e}^{mt}}\right)Y},t\right]}
\end{aligned}$$

它还有另外一个表达式

$$\begin{aligned} E\mathrm{e}^{iaS_l(h,t)} &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{e}^{iak} P\left[S_l(h,t)=k\right] \\ &= \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{e}^{\left(\frac{-h}{\mathrm{e}^{mt}+ia}\right)k} P\left[Z^0=k\right]}{\sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{e}^{\left(\frac{-h}{\mathrm{e}^{mt}}\right)k} P\left[Z^0=k\right]} \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{e}^{\left(\frac{-h}{\mathrm{e}^{mt}+ia}\right)k} P\left[Y=k\right]}{\sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{e}^{\left(\frac{-h}{\mathrm{e}^{mt}}\right)k} P\left[Y=k\right]} \\ &= \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{e}^{\left(\frac{-h}{\mathrm{e}^{mt}+ia}\right)k} P\left[Z(t)=k\right]}{G_l\left(\mathrm{e}^{\frac{-h}{\mathrm{e}^{mt}}}, t\right)}, \end{aligned}$$

对应系数逐项对比，可得

$$P\left[S_l(h,t)=k\right] = \frac{\mathrm{e}^{-kh/\mathrm{e}^{mt}}}{G_l\left(\mathrm{e}^{-h/\mathrm{e}^{mt}}, t\right)} P\left[Z(t)=k \mid Z(0)=l\right]$$

成立。

定理 2.5 对于所有的$h \ge 0$，存在$C(h)$使得

$$\sup_{t,k\ge 0} \mathrm{e}^{mt} P\left[S_l(h,t)=k\right] \le C(h) l^{-1/2}, \quad l \ge l_0 := 1+\left[1/\alpha\right],$$

这里$\alpha = -\dfrac{\log\sigma}{m}$，其中$\sigma := \left.\dfrac{\partial G(u,t)}{\partial u}\right|_{(0,1)} = p_{11}(1)$。

为了便于后续讨论，我们定义自正则随机变量 V，W 和 I 的拉普拉斯变化如下：

$$\phi_V(u) := E\left[\mathrm{e}^{-uV}\right], \quad \phi_W(u) := E\left[\mathrm{e}^{-uW}\right], \quad \phi_I(u) := E\left[\mathrm{e}^{-uI}\right]$$

此外，由于$Z^0(t)$和$Y(t)$是独立的，所以我们有$\phi_V(u) = \phi_W(u)\phi_I(u)$.

定理 2.6 (拉普拉斯变换的迭代泛函方程)设$b_0 = 0$，则下述等式成立：

$$\phi_V\left(\mathrm{e}^{ms}u\right) = G\left[\phi_w(u), s\right], \quad u \in \mathbb{R}$$

$$\phi_W\left(\mathrm{e}^{ms}u\right) = F^0\left[\phi_w(u), s\right], \quad u \in \mathbb{R}$$

$$\phi_I\left(\mathrm{e}^{ms}u\right) = H\left[\phi_w(u), s\right], \quad u \in \mathbb{R}$$

证明：$\phi_V\left(\mathrm{e}^{ms}u\right) = \phi_W\left(\mathrm{e}^{ms}u\right)\phi_I\left(\mathrm{e}^{ms}u\right) = F^0\left[\phi_w(u), s\right]\phi_I\left(\mathrm{e}^{ms}u\right) = G\left[\phi_w(u), s\right]$

故成立。

参考文献

[1] Athreya, K.B. (1994) Large Deviation Rates for Branching Processes—I. Single Type Case. *The Annals of Applied Probability*, **4**, 779-790. https://doi.org/10.1214/aoap/1177004971

[2] Liu, J.N. and Zhang, M. (2016) Large Deviation for Supercritical Branching Processes with Immigration. *Acta Mathematica Sinica, English Series*, **32**, 893-900. https://doi.org/10.1007/s10114-016-5437-z

[3] Sun, Q. and Zhang, M. (2017) Harmonic Moments and Large Deviations for Supercritical Branching Processes with Immigration. *Frontiers of Mathematics in China*, **12**, 1201-1220. https://doi.org/10.1007/s11464-017-0642-3

[4] Li, J., Cheng, L., Pakes, A.G., Chen, A. and Li, L. (2020) Large Deviation Rates for Markov Branching Processes. *Analysis and Applications*, **18**, 447-468. https://doi.org/10.1142/S0219530519500209

[5] Li, J., Cheng, L. and Li, L. (2021) Long Time Behaviour for Markovian Branching-Immigration Systems. *Discrete Event Dynamic Systems*, **31**, 37-57. https://doi.org/10.1007/s10626-020-00323-z

[6] Fleischmann, K. and Wachtel, V. (2007) Lower Deviation Probabilities for Supercritical Galton-Watson Processes. *Annales de l'Institut Henri Poincare* (*B*) *Probability and Statistics*, **43**, 233-255. https://doi.org/10.1016/j.anihpb.2006.03.001

[7] Li, J., Chen, A. and Pakes, A.G. (2012) Asymptotic Properties of the Markov Branching Process with Immigration. *Journal of Theoretical Probability*, **25**, 122-143. https://doi.org/10.1007/s10959-010-0301-z

[8] Asmussen, S. and Hering, H. (1983) Branching Processes. Springer Science and Business Media, New York. https://doi.org/10.1007/978-1-4615-8155-0

[9] Athreya, K.B. and Ney, P. (1970) The Local Limit Theorem and Some Related Aspects of Super-Critical Branching Processes. *Transactions of the American Mathematical Society*, **152**, 233-251. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1970-0268971-X

[10] Dubuc, S. and Seneta, E. (1976) The Local Limit Theorem for the Galton-Watson Process. *The Annals of Probability*, **4**, 490-496. https://doi.org/10.1214/aop/1176996100

[11] Pakes, A. (1974) On Supercritical Galton-Watson Processes Allowing Immigration. *Journal of Applied Probability*, **11**, 814-817. https://doi.org/10.2307/3212564

[12] Petrov, V.V. (1975) Sums of Independent Random Variables. Springer Science & Business Media, Berlin. https://doi.org/10.1515/9783112573006

[13] Royden, H.L. (1968) Real Analysis. Macmillan, Cambridge.

[14] Seneta, E. (1970) On the Supercritical Galton-Watson Process with Immigration. *Mathematical Biosciences*, **7**, 9-14. https://doi.org/10.1016/0025-5564(70)90038-6