

# 带有移民的上临界Galton-Watson过程的Cramer中偏差

彭超\*, 王娟

上海理工大学理学院, 上海

收稿日期: 2024年3月15日; 录用日期: 2024年4月5日; 发布日期: 2024年5月16日

## 摘要

我们令  $\{X_n; n \geq 0\}$  是一个后代平均值为  $m$  的带有移民的上临界分支过程。Lotka-Nagaev估计量  $X_{n+1}/X_n$  是用来估计后代均值的常用估计量。在本论文中, 我们通过构造鞅得到了带有移民的Galton-Watson过程的Cramer中偏差结果。对于我们的证明, 我们使用了著名的Cramer方法来证明自变量和的中偏差以满足我们的需要。

## 关键词

中偏差, 上临界, Galton-Watson过程, Cramer方法

# Cramer Moderate Deviations for a Supercritical Galton-Watson Process with Immigration

Chao Peng\*, Juan Wang

College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai

Received: Mar. 15<sup>th</sup>, 2024; accepted: Apr. 5<sup>th</sup>, 2024; published: May 16<sup>th</sup>, 2024

## Abstract

Let  $\{X_n; n \geq 0\}$  be a supercritical branching process with immigration and offspring mean  $m$ . The Lotka-Nagaev estimator  $X_{n+1}/X_n$  is a common estimator for the offspring mean. In this paper, we establish some kinds of Cramer moderate deviation results for the Lotka-Nagaev estimator via

\*通讯作者。

a martingale method. For our proofs, we use the well-known Cramer method to prove the moderate deviation of the sum of independent variables to satisfy our needs.

## Keywords

Moderate Deviation, Supercritical, Galton-Watson Process, Cramer Method

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

定义  $(Z_i)_{i \geq 1}$  是一列均值为 0, 方差为  $\sigma^2$  的独立同分布随机变量序列。我们用  $L_n = \sum_{i=1}^n Z_i$  来表示  $(Z_i)_{i \geq 1}$  的部分和。假设  $E \exp[C_0 |Z_1|] < \infty$  对于所有的常数  $C_0 > 0$  都成立, 对于所有满足条件  $0 \leq x = o(n^{1/2})$  的  $x$ , Cramer 建立了如下渐近中偏差结果

$$\left| \ln \frac{P(L_n > x\sigma\sqrt{n})}{1 - \phi(x)} \right| = O\left(\frac{1+x^3}{\sqrt{n}}\right) \quad (1.1)$$

其中  $n \rightarrow \infty$ ,  $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp(-t^2/2) dt$  是一个标准的正态分布。上式结果通常被称为 Cramer 中偏差。

我们如下定义带有移民的 Galton-Watson 过程:

$$X_0 = 1, X_{n+1} = \sum_{i=1}^{X_n} Z_i^n + Y_n, \text{ 对于所有的 } n \geq 0. \quad (1.2)$$

若用  $m$  来表示个体的后代均值, 则

$$m = EX_1. \quad (1.3)$$

若用  $v$  来表示  $X_1$  的标准方差, 则

$$v^2 = E(X_1 - m)^2 = \text{Var}(X_1). \quad (1.4)$$

为了方便讨论, 本文中所有的  $v$  都是正的。Lotka-Nagaev 估计量  $X_{n+1}/X_n$  是用来估计后代均值  $m$  的常用估计量。在本论文中, 我们假设  $p_0 = 0$ , 则 Lotka-Nagaev 估计量是定义良好的 P-a.s.

从各国相关的文献中来看, 中偏差是研究 Galton-Watson 过程的重要方向之一, 引起了各国学者的广泛关注。孙和张[1]研究了带有移民的上临界分支过程的调和矩的收敛速率。刘和张[2]研究了带有移民的上临界分支过程的大偏差, 改进了之前学者对于不带移民的上临界分支过程的研究结果。刘和张[3]研究了随机环境下的上临界多型分支过程的 Kesten-Stigum 型定理。

近些年来, Lotka-Nagaev 估计量也引起了各国学者的广泛关注。例如, Paul Doukhan Fan 和 Gao [4] 利用鞅方法得到了 Lotka-Nagaev 估计量的 Cramer 中偏差结果。Bercu 和 Touati [5] 通过自归一化鞅方法得到了 Lotka-Nagaev 估计量的指数不等式。Fleischmann 和 Wachtel [6] 考虑了 Lotka-Nagaev 估计量的  $S_{Z_n}/Z_n$  的推广, 并且还在文献[7]研究了上临界 GW 过程的低偏差概率。朱和高[8]研究了简单分支过程的 Lotka-Nagaev 估计量的中偏差, 得到了经典分支过程的 Lotka-Nagaev 估计量的中偏差呈指数衰减。范和邵[9]研究了自归一化 Cramer 中偏差。Ney 和 Vidyashanka [10] 研究了 Lotka-Nagaev 估计量的大偏差衰减速率。Athreya [11] 研究了 Galton-Watson 过程的 Lotka-Nagaev 估计量的大偏差。

本论文在下一节中介绍得到的带有移民的上临界 Galton-Watson 过程的 Cramer 中偏差结果。

## 2. 主要定理以及证明

引理 4.2.1 对于 GWI 过程, 我们有

$$P(X_n \leq n) \leq C_1 \exp(-C_0 n). \tag{2.1}$$

其中  $C_0 > 0$ 。

证明:

$$\begin{aligned} P(X_n \leq n) &= P\left(\sum_{i=1}^{X_{n-1}} Z_i + Y_{n-1} \leq n\right) = P\left(\sum_{i=1}^{X_{n-1}} Z_i \leq n - Y_{n-1}\right) \\ &\leq P\left(\sum_{i=1}^{X_{n-1}} Z_i \leq n\right) \leq C_1 \exp(-C_0 n) \end{aligned} \tag{2.2}$$

定理 4.2.2 假设有  $E \exp[C_0 |X_1|] < \infty$  成立, 其中对于所有的常数  $C_0 > 0$ , 对于所有的  $x$ , 都有  $0 \leq x = o(n^{1/2})$ , 则以下等式成立

$$\left| \ln \frac{P(S_n > x\sigma\sqrt{n})}{1 - \phi(x)} \right| = O\left(\frac{C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + x^3}{\sqrt{n}}\right). \tag{2.3}$$

其中  $S_n = \sum_{i=1}^n Z_i + Y_n$ ,  $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp(-t^2/2) dt$  是一个标准的正态分布。

证明: 根据全概率公式, 我们有

$$\begin{aligned} P(S_n > x\sigma\sqrt{n}) &= P\left(\sum_{i=1}^n Z_i + Y_n > x\sigma\sqrt{n}\right) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} P(Y_n = j) P\left(\sum_{i=1}^n Z_i > x\sigma\sqrt{n} - j\right) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} P(Y_n = j) P\left[\sum_{i=1}^n Z_i > \sigma\sqrt{n} \left(\frac{x\sigma\sqrt{n} - j}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right] \\ &=: \sum_{j=1}^{\infty} P(Y_n = j) P_n\left(x - \frac{j}{\sigma\sqrt{n}}\right) \end{aligned} \tag{2.4}$$

根据文献[4]中的(1.1)式, 我们可以得到以下两个不等式

$$P_n\left(x - \frac{j}{\sigma\sqrt{n}}\right) < C_1 \left[1 - \phi\left(x - \frac{j}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right] \exp\left[\frac{1 + \left(x - \frac{j}{\sigma\sqrt{n}}\right)^3}{\sqrt{n}}\right], \tag{2.5}$$

$$P_n\left(x - \frac{j}{\sigma\sqrt{n}}\right) > C_2 \left[1 - \phi\left(x - \frac{j}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right] \exp\left[-\frac{1 + \left(x - \frac{j}{\sigma\sqrt{n}}\right)^3}{\sqrt{n}}\right], \tag{2.6}$$

再结合下面的不等式

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}(1+x)} e^{-\frac{x^2}{2}} \leq 1 - \phi(x) \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}(1+x)} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x \geq 0 \tag{2.7}$$

我们可以得到

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2\pi}\left(1+x-\frac{j}{\sigma\sqrt{n}}\right)} \exp\left[\frac{-\left(x-\frac{j}{\sigma\sqrt{n}}\right)^2}{2}\right] \\ & \leq 1-\phi\left(x-\frac{j}{\sigma\sqrt{n}}\right) \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}\left(1+x-\frac{j}{\sigma\sqrt{n}}\right)} \exp\left[\frac{-\left(x-\frac{j}{\sigma\sqrt{n}}\right)^2}{2}\right], x \geq 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

根据(2.7)和(2.8), 我们有

$$\frac{1-\phi(x-t)}{1-\phi(x)} < \frac{\sqrt{2}(1+x)}{1+x-t} \exp\left(xt - \frac{t^2}{2}\right), \text{ 其中 } t = \frac{j}{\sigma\sqrt{n}} \quad (2.9)$$

$$\frac{1-\phi(x-t)}{1-\phi(x)} > \frac{1+x}{\sqrt{2}(1+x-t)} \exp\left(xt - \frac{t^2}{2}\right) \quad (2.10)$$

再根据(2.5)和(2.9), 我们可以得到

$$\begin{aligned} P\left(\sum_{i=1}^n Z_i > x\sigma\sqrt{n} - j\right) & < C_1 \frac{\sqrt{2}(1+x)}{1+x-t} [1-\phi(x)] \exp\left[\frac{1+(x-t)^3}{\sqrt{n}} + x\frac{j}{\sigma\sqrt{n}} - \frac{j^2}{2\sigma^2 n}\right] \\ & < C_4 [1-\phi(x)] \exp\left(\frac{C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + x^3}{\sqrt{n}}\right) \end{aligned} \quad (2.11)$$

以及

$$P\left(\sum_{i=1}^n Z_i > x\sigma\sqrt{n} - j\right) > C_5 [1-\phi(x)] \exp\left(\frac{C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + x^3}{\sqrt{n}}\right), \quad (2.12)$$

最终, 我们得到结论,

$$\left| \ln \frac{P(S_n > x\sigma\sqrt{n})}{1-\phi(x)} \right| = O\left(\frac{C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + x^3}{\sqrt{n}}\right).$$

## 参考文献

- [1] Sun, Q. and Zhang, M. (2017) Harmonic Moments and Large Deviations for Supercritical Branching Processes with Immigration. *Frontiers of Mathematics in China*, **12**, 1201-1220. <https://doi.org/10.1007/s11464-017-0642-3>
- [2] Liu, J.N. and Zhang, M. (2016) Large Deviation for Supercritical Branching Processes with Immigration. *Acta Mathematica Sinica, English Series*, **32**, 893-900. <https://doi.org/10.1007/s10114-016-5437-z>
- [3] Grama, I., Liu, Q.S. and Pin, E.W. (2023) A Kesten-Stigum Type Theorem for a Supercritical Multitype Branching Process in a Random Environment. *The Annals of Applied Probability*, **33**, 1213-1251. <https://doi.org/10.1214/22-AAP1840>
- [4] Doukhan, P., Fan, X.Q. and Gao, Z.Q. (2023) Cramér Moderate Deviations for a Supercritical Galton-Watson Process. *Statistics and Probability Letters*, **192**, 109711. <https://doi.org/10.1016/j.spl.2022.109711>
- [5] Bercu, B. and Touati, A. (2008) Exponential Inequalities for Self-Normalized Martingales with Applications. *The Annals of Applied Probability*, **18**, 1848-1869. <https://doi.org/10.1214/07-AAP506>
- [6] Fleischmann, K. and Wachtel, V. (2008) Large Deviations for Sums Indexed by the Generations of a Galton-Watson

- Process. *Probability Theory and Related Fields*, **141**, 445-470. <https://doi.org/10.1007/s00440-007-0090-1>
- [7] Fleischmann, K. and Wachtel, V. (2007) Lower Deviation Probabilities for Supercritical Galton-Watson Processes. *Annales de l'IHP Probabilites et Statistiques*, **43**, 233-255. <https://doi.org/10.1016/j.anihpb.2006.03.001>
- [8] Zhu, Y.J. and Gao, Z.L. (2020) Moderate Deviations for Lotka-Nagaev Estimator of a Simple Branching Process. *Mathematica Applicata*, **33**, 240-245.
- [9] Fan, X.Q. and Shao, Q.M. (2023) Self-Normalized Cramer Moderate Deviation for a Supercritical Galton-Watson Process. *Journal of Applied Probability*, **60**, 1281-1292. <https://doi.org/10.1017/jpr.2022.134>
- [10] Ney, P.E. and Vidyashankar, A.N. (2003) Harmonic Moments and Large Deviation Rates for Supercritical Branching Processes. *The Annals of Applied Probability*, **12**, 314-320. <https://doi.org/10.1214/aoap/1050689589>
- [11] Athreya, K.B. (1994) Large Deviation Rates for Branching Processes—I. Single Type Case. *The Annals of Applied Probability*, **4**, 779-790. <https://doi.org/10.1214/aoap/1177004971>