Statistical and Application 统计学与应用, 2013, 2, 136-140
http://dx.doi.org/10.12677/sa.2013.24020 Published Online December 2013 (http://www.hanspub.org/journal/sa.html)

The Expectation and Variance of Annuity under Exponential Distributed Interest Force*

Dongqiong Zhou[1], Yi Zhang[2], Limin Wen[1,3]

[1]College of Mathematics and Information, Jiangxi Normal University, Nanchang
[2]College of Computer, Jiangxi Normal University, Nanchang
[3]School of Information Management, Jiangxi University of Finance and Economics, Nanchang
Email: 493078509@qq.com

Received: Nov. 25th, 2013; revised: Dec. 16th, 2013; accepted: Dec. 20th, 2013

Abstract: An annuity is a series of cash flow within a certain period of time. The present value of the annuity is closely related to interest rates. In the traditional actuarial theory, the interest rate is usually assumed to be fixed and known in advance in the calculation of the annuity. This assumption basically is mathematically treated easily and hypothetical. However, the actual interest rate is dependent on investment income, exchange rate, financial market and other factors. Therefore, it is more reasonable to assume that the interest rate is a random variable. In this paper, the interest force is assumed to be exponentially distributed, and correspondingly, the expectation and variance of the various fixed annuities and life annuities are hence derived.

Keywords: Annuity; Interest Force; Exponential Distribution; Expectation; Variance

指数分布利息力下年金的期望和方差*

周东琼[1]，章　溢[2]，温利民[1,3]

[1]江西师范大学数信学院，南昌
[2]江西师范大学计算机学院，南昌
[3]江西财经大学信息管理学院，南昌
Email: 493078509@qq.com

收稿日期：2013年11月25日；修回日期：2013年12月16日；录用日期：2013年12月20日

摘　要：年金是指在一定期限内的系列现金流量。年金的现值与利率密切相关。在传统的精算理论中，在年金的计算中，常常假定利息率为已知的非随机变量，这主要是数学上处理的方便而假设的。然而，实际中的利息率与投资收益、汇率、金融市场等多种因素有关，假定利息率是随机变量更加合理。本文在利息力指数分布的模型子下，研究了各种固定年金和生存年金的期望和方差。

关键词：年金；利息力；指数分布；期望；方差

1. 引言

年金(annuity)，是定期或不定期的时间内一系列的现金流入或流出。年金额是指每次发生收支的金额。年金期间是指相邻两次年金额间隔时间，年金时期是指整个年金收支的持续期，一般有若干个期间。由于金钱是有时间价值的，为了比较两个年金，需要

*项目基金：国家自然科学基金(71001046，71361015)，江西省教育厅基金(GJJ13217)，中国博士后科学基金(2013M540534)以及江西省博士后择优项目。

计算该年金在某时刻折现和的价值。年金在支付期初的价值称为现值，在期末的价值称为终值，年金的价值。在传统的精算理论中，年金现值的计算是一项重要的任务。

在精算学中，对年金的相关研究许多的学者作了相关的讨论。在国外，如Zaks[1]在随机利率相互独立的条件下，首次给出了期初付年金累积值的递推关系，得到了某些年内一类期初付年金累积值的期望和方差。Krzysztof Burnecki[2]修正了文献[1]的不足之处，并且发展了文献[1]的结果等等；在国内，许多专家对年金也作了专门的讨论。近20年大多数情况下研究者对随机利率选择了维纳过程即纯布朗运动的理论来建立利息力函数模型：如Beekman[3](1991)给出了一种确定年金的期望和方差，De Schepper[4-6](1992)则给出了同种确定年金的矩母函数、分布函数和Laplace变换；田青山与刘裔宏[7](2000)利用标准维纳过程进行研究；欧阳资生与鄂茵[8](2003)采用维纳过程以及O-U过程建模得到结果。一些研究者对随机利率则采用Gauss过程或Poisson过程建模：何文炯与蒋庆荣[9](1998)和刘凌云与汪荣明[10](2001)研究即时给付增额寿险的现值及其各阶矩。David Perry[11](2001)将随机利率采用反射Brownian运动(RBM)建模，得到年金的期望值公式。上述工作都是给出一种年金的矩，在计算上较为困难。因此在利息率随机的情况下，我们需要探索符合实际且计算较为简单的结果。

在计算年金的现值过程中，常常假定利率为一个固定的常数，在这个假定下，年金的研究显得相当方便，例如薛欣，赵成龙[12](2003)。然而，这个假定只是数学上处理的方便。在实际运用中，影响利息率的因素较为复杂，利息率也是不可预测的变量。在概率统计中，对不可预测的变量常用随机变量来刻画。本文假定利息力服从指数分布，在这个模型下计算各种年金的现值和终值。

本文的结构安排如下，第二节介绍年金和利息的相关概念。第三节在利息力服从指数分布下讨论固定年金的现值的期望和方差。第四节引入生存年金，并讨论生存年金的期望和方差的计算。

2. 利息和年金的相关概念

众所周知，金钱是有时间价值的，一年以后的100元与现在的100元并不等价。这中间的差别就体现在利息上。为了处理的方便，一般假设一年的年利率为i，现在的100元在一年后产生$100i$的利息，因此这100元在一年后的累积值为$100(1+i)$。一年以后的100元只相当于现在的$100(1+i)^{-1}$元，这个价值称为现值。

年金是指一系列支付的款项，假定从第一年年初开始每年年初支付$C_n\,(n=0,1,2,\cdots)$元，则该款项(年金)在现在的价值为

$$a=C_0+C_1(1+i)^{-1}+C_2(1+i)^{-2}+\cdots+C_n(1+i)^{-n}+\cdots \tag{1}$$

若记$\delta=\ln(1+i)$，称为利息力。则有

$$a=C_0+C_1\mathrm{e}^{-\delta}+C_2\mathrm{e}^{-2\delta}+\cdots+C_n\mathrm{e}^{-n\delta}+\cdots \tag{2}$$

在精算学中，对年金有多种分类方法。根据年金支付的期限是否固定分为固定年金和生存年金。根据年金的支付方式分为标准年金、递增年金、递减年金和一般年金等。

3. 利息力指数分布下固定年金的计算

在实际运用中，由于利息率(或利息力)受金融市场多种因素的影响，在实际中是无法预测的。本文假定利息力δ服从指数分布，具有密度函数：

$$f(\delta)=\begin{cases}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda\delta} & \delta\ge 0\\ 0 & \delta<0\end{cases}, \tag{3}$$

其中$\lambda>0$是已知参数。这时有

$$E(\delta)=\frac{1}{\lambda},\quad Var(\delta)=\frac{1}{\lambda^2}。$$

矩母函数为：

$$M_\delta(t)=E\left(\mathrm{e}^{t\delta}\right)=\frac{\lambda}{\lambda-t}。 \tag{4}$$

根据各种年金的定义得到下面的定理。

定理 3.1：在利息服从指数分布的假设下，由(2)给出的年金现值的期望和方差分别为：

$$E(a)=\sum_{k=0}^{\infty}C_k\frac{\lambda}{\lambda+k} \tag{5}$$

以及

$$Var(a)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}C_kC_m\left(\frac{\lambda}{\lambda+k+m}-\frac{\lambda^2}{(\lambda+k)(\lambda+m)}\right) \tag{6}$$

证明：首先证期望，由(2)得

$$E(a)=E\left(C_0+C_1\mathrm{e}^{-\delta}+C_2\mathrm{e}^{-2\delta}+\cdots+C_n\mathrm{e}^{-n\delta}+\cdots\right)$$
$$=E\left(\sum_{k=0}^{\infty}C_k\mathrm{e}^{-k\delta}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}C_kE\left(\mathrm{e}^{-k\delta}\right)$$

又 δ 服从指数分布，得：

$$E(a)=\sum_{k=0}^{\infty}C_k\frac{\lambda}{\lambda+k};$$

接下来证方差，由(2)得

$$Var(a)=Var\left(C_0+C_1\mathrm{e}^{-\delta}+C_2\mathrm{e}^{-2\delta}+\cdots+C_n\mathrm{e}^{-n\delta}+\cdots\right)$$
$$=Var\left(\sum_{k=0}^{\infty}C_k\mathrm{e}^{-k\delta}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}C_kC_m\cdot Cov\left(\mathrm{e}^{-k\delta},\mathrm{e}^{-m\delta}\right)$$

以及

$$Cov\left(\mathrm{e}^{-k\delta},\mathrm{e}^{-m\delta}\right)=E\left(\mathrm{e}^{-k\delta},\mathrm{e}^{-m\delta}\right)-E\left(\mathrm{e}^{-k\delta}\right)E\left(\mathrm{e}^{-m\delta}\right)$$
$$=\frac{\lambda}{\lambda+k+m}-\frac{\lambda^2}{(\lambda+k)(\lambda+m)}$$

又 δ 服从指数分布，得：

$$Var(a)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}C_kC_m\left(\frac{\lambda}{\lambda+k+m}-\frac{\lambda^2}{(\lambda+k)(\lambda+m)}\right),$$

得证。

当各期支付款项 C_k 取一些特殊值的时候上面的年金可以退化到精算学中常用的一些固定年金的计算公式。

推论 3.2：当 $C_0=C_1=\cdots=C_{n-1}$，$C_k=0,k\ge n$，即为期初付的固定年金现值

$$\ddot{a}_{\overline{n}|}=1+\mathrm{e}^{-\delta}+\mathrm{e}^{-2\delta}+\mathrm{e}^{-3\delta}+\cdots+\mathrm{e}^{-(n-1)\delta},$$

则 $\ddot{a}_{\overline{n}|}$ 的期望和方差分别为

$$E\left(\ddot{a}_{\overline{n}|}\right)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\lambda}{\lambda+k} \tag{7}$$

以及

$$Var\left(\ddot{a}_{\overline{n}|}\right)=\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{m=0}^{n-1}\left(\frac{\lambda}{\lambda+k+m}-\frac{\lambda^2}{(\lambda+k)(\lambda+m)}\right) \tag{8}$$

推论 3.3：当 $C_0=1,C_1=2,\cdots,C_k=k+1,\cdots,C_{n-1}=n$，且 $C_k=0,k\ge n$，即为期初付的递增型年金现值

$$I\ddot{a}_{\overline{n}|}=1+2\mathrm{e}^{-\delta}+3\mathrm{e}^{-2\delta}+4\mathrm{e}^{-3\delta}+\cdots+n\mathrm{e}^{-(n-1)\delta},$$

则 $I\ddot{a}_{\overline{n}|}$ 的期望和方差分别为

$$E(a)=\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\frac{\lambda}{\lambda+k} \tag{9}$$

以及

$$Var(a)=\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{m=0}^{n-1}(k+1)(m+1)\left(\frac{\lambda}{\lambda+k+m}-\frac{\lambda^2}{(\lambda+k)(\lambda+m)}\right) \tag{10}$$

推论 3.4：当 $C_0=n,C_1=n-1,\cdots,C_k=n-k,\cdots,C_{n-1}=1$，且 $C_k=0,k\ge n$，即为期初付的递减型年金现值

$$D\ddot{a}_{\overline{n}|}=n+(n-1)\mathrm{e}^{-\delta}+(n-2)\mathrm{e}^{-2\delta}+(n-3)\mathrm{e}^{-3\delta}+\cdots+\mathrm{e}^{-(n-1)\delta},$$

则 $D\ddot{a}_{\overline{n}|}$ 的期望和方差分别为

$$E(a)=\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)\frac{\lambda}{\lambda+k} \tag{11}$$

以及

$$Var(a)=\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{m=0}^{n-1}(n-k)(n-m)\left(\frac{\lambda}{\lambda+k+m}-\frac{\lambda^2}{(\lambda+k)(\lambda+m)}\right) \tag{12}$$

4. 生存年金的特征值计算

生存年金是以人的生存作为年金支付的条件，按照预先约定的金额作一连串的给付的保险，一旦年金领取人死亡或预先约定给付期届满，给付就宣告结束。

设 x 岁的被保险人在零时刻签约的一个生存年金，在未来的若干年内，只要被保险人生存，则保险公司在每年的年初支付 $C_k\,(k=0,1,2,\cdots)$，当且仅当被保险人死亡则该保险合同终止。设被保险人未来的剩余寿命为 T，令 $K=[T]$ 为整值剩余寿命。若利息力 δ 为非随机变量，则该年金的支付现值为 $\sum_{k=0}^{K}C_k\mathrm{e}^{-\delta k}$。由于 $P(T>k)=P(K>k)={}_kP_x$，则该年金现值的数学期望为

$$A=\sum_{k=0}^{w-x-1}C_k\mathrm{e}^{-\delta k}\,{}_kP_x \tag{13}$$

在精算学中称上式给出的数学期望称为该生存年金的精算现值。

定理 4.1：在利息力服从指数分布的假设下，生

存年金的精算现值(13)的期望和方差分别为：

$$E\left(A\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_k\lambda}{\lambda+k}{}_kP_x \tag{14}$$

以及

$$Var\left(A\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}C_kC_m{}_kP_x{}_mP_x\left(\frac{\lambda}{\lambda+k+m}-\frac{\lambda^2}{\left(\lambda+k\right)\left(\lambda+m\right)}\right) \tag{15}$$

证明： 首先证期望，由(13)得

$$E\left(A\right)=E\left(\sum_{k=0}^{\infty}C_k\mathrm{e}^{-k\delta}{}_kP_x\right)=\sum_{k=0}^{\infty}C_k{}_kP_xE\left(\mathrm{e}^{-k\delta}\right).$$

又δ服从指数分布，得：

$$E\left(A\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_k\lambda}{\lambda+k}{}_kP_x;$$

又由(13)得

$$\begin{aligned}Var\left(A\right)&=Var\left(\sum_{k=0}^{\infty}C_ke^{-k\delta}{}_kP_x\right)\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}C_kC_m{}_kP{}_mP_{xx}Var\left(\mathrm{e}^{-k\delta}\right)\end{aligned}$$

而δ服从指数分布，因此有：

$$Var\left(A\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}C_kC_m{}_kP{}_mP_x\left(\frac{\lambda}{\lambda+k+m}-\frac{\lambda^2}{\left(\lambda+k\right)\left(\lambda+m\right)}\right)。$$

当生存年金支付款项C_k取一些特殊值的时候(14)及(15)式给出的生存年金的期望和方差公式可以退化到精算学中常用的生存年金期望和方差的计算公式。

推论 4.2: 当$C_0=C_1=\cdots=C_k\cdots=1$，$k=0,1,2,\cdots$，即为期初付的标准型生存年金的精算现值$A=\sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-\delta k}{}_kP_x$，则$\ddot{a}_{\overline{n}|}$的期望和方差分别为

$$E\left(A\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda}{\lambda+k}{}_kP_x \tag{16}$$

以及

$$Var\left(A\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}{}_kP_x{}_mP_x\left(\frac{\lambda}{\lambda+k+m}-\frac{\lambda^2}{\left(\lambda+k\right)\left(\lambda+m\right)}\right) \tag{17}$$

推论 4.3： 当$C_0=1,C_1=2,\cdots,C_k=k+1,\cdots$，即为期初付的递增型生存年金现值

$$\begin{aligned}IA&=\sum_{k=0}^{\infty}C_k\mathrm{e}^{-\delta k}{}_kP_x\\&={}_0P_x+2\mathrm{e}^{-\delta}{}_1P_x+\cdots+\left(k+1\right)\mathrm{e}^{-\delta k}{}_kP_x+\cdots\end{aligned},$$

则IA的期望和方差分别为

$$E\left(IA\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(k+1\right)\frac{\lambda}{\lambda+k}{}_kP_x \tag{18}$$

以及

$$Var\left(IA\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\left(k+1\right)\left(m+1\right){}_kP_x{}_mP_x\left(\frac{\lambda}{\lambda+k+m}-\frac{\lambda^2}{\left(\lambda+k\right)\left(\lambda+m\right)}\right) \tag{19}$$

推论 4.4： 当$C_0=n,\cdots,C_k=n-k,\cdots$，即为期初付的递减型生存年金现值

$$\begin{aligned}DA&=\sum_{k=0}^{\infty}C_k\mathrm{e}^{-\delta k}{}_kP_x\\&=n{}_0P_x+\left(n-1\right)\mathrm{e}^{-\delta}{}_1P_x+\cdots+\left(n-k\right)\mathrm{e}^{-\delta k}{}_kP_x+\cdots\end{aligned},$$

则DA的期望和方差分别为

$$E\left(DA\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(n-k\right)\frac{\lambda}{\lambda+k}{}_kP_x \tag{20}$$

以及

$$Var\left(DA\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\left(n-k\right)\left(n-m\right){}_kP_x{}_mP_x\left(\frac{\lambda}{\lambda+k+m}-\frac{\lambda^2}{\left(\lambda+k\right)\left(\lambda+m\right)}\right) \tag{21}$$

5. 年金特征的敏感性分析

在标准年金和生存年金的期望和方差公式中，都含有参数λ。该参数λ的大小直接是利率因素的特征值，其大小直接影响年金的期望和方差。下面举例分析λ的变动对年金特征值的影响。

定理 5.1： 年金的期望$E\left(a\right)$和$E\left(A\right)$关于λ是递增函数。

证明： 由(5)式得

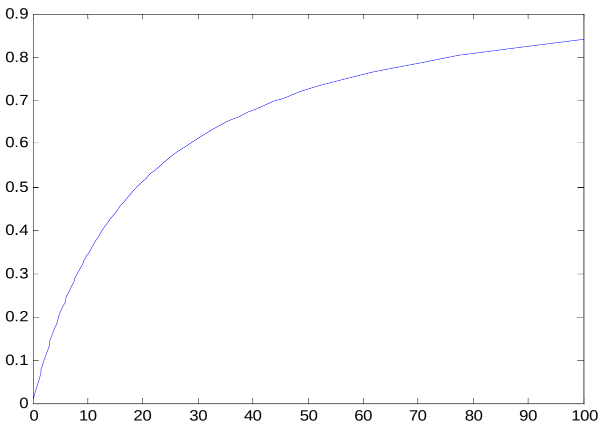
$$E\left(a\right)=\sum_{k=0}^{\infty}C_k\frac{\lambda}{\lambda+k}=\sum_{k=0}^{\infty}C_k\frac{1}{1+\frac{k}{\lambda}},$$

知$E\left(a\right)$是关于λ是递增函数；由(14)式得

$$E(A)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_k\lambda}{\lambda+k}{}_kP_x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_k}{1+\dfrac{k}{\lambda}}{}_kP_x,$$

知 $E(A)$ 关于 λ 是递增函数。

给定不同的 λ 值(不妨取 0~100 之间)，计算年金的期望和方差，得到下面的和图形，



从图中可以看出 $E(a)$ 关于 λ 的变化趋势是随着 λ 的增大而增大，即 $E(a)$ 关于 λ 的递增函数；$E(A)$ 可类似得到。

参考文献 (References)

[1] Zaks, A. (2001) Annuities under random rates of interest. *Insurance*: *Mathematics and Economics*, **28**, 1-111.
[2] Burnecki, K., Marciniuk, A. and Weron, A. (2003) Annuities under random rates of interest-revisited. *Insurance*: *Mathematics and Economics*, **3**, 457-460.
[3] Beekman, J.A. (1991) Clint on P fuelling. Extra randomness in certain annuity models. *Insurance*: *Mathematics and Economics*, **10**, 275-287.
[4] De Schepper, A., De Vylder, F., Goovaerts, M. and Kaas, R. (1992) Interest randomness in annuities certain. *Insurance*: *Mathematics and Economics*, 11, 271-281.
[5] De Schepper, A. and Goovaerts, M. (1992) Some further results on annuities certain with random interest. *Insurance*: *Mathematics and Economics*, **11**, 283-290.
[6] De Schepper, A., Goovaerts, M. and Delbaen, F. (1992) The Laplace transform of annuities certain with exponential time distribution. *Insurance*: *Mathematics and Economics*, **11**, 291-294.
[7] 田青山, 刘裔宏 (2000) 随机利率条件下的寿险模型. *经济数学*, **1**, 41-43.
[8] 欧阳资生, 鄢茵 (2003) 随机利率下增额寿险现值函数矩的一些结果. *经济数学*, **1**, 441-447.
[9] 何文炯, 蒋庆荣 (1998) 随机利率下的增额寿险. *高校应用数学学报*, **2**, 145-152.
[10] 刘凌云, 汪荣明 (2001) 一类随机利率下的增额寿险模型. *应用概率统计*, **3**, 283-290.
[11] Perry, D. and Stadje, W.G. (2001) Function space integration for annuities. *Insurance*: *Mathematics and Economics*, **29**, 73-82.
[12] 薛欣, 赵成龙 (2003) 不同利息力下生存年金的比较. *泰山学院学报*, **3**, 28-30.