

# Two Dimensional $\gamma_1 - \gamma_2$ Plots of Weibull Distribution for Random Life Data Sets

Guijin Wang

Central Iron & Steel Research Institute, Beijing  
Email: [meiwg6234@gmail.com](mailto:meiwg6234@gmail.com)

Received: Feb. 9<sup>th</sup>, 2015; accepted: Feb. 22<sup>nd</sup>, 2015; published: Feb. 28<sup>th</sup>, 2015

Copyright © 2015 by author and Hans Publishers Inc.  
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

---

## Abstract

First, the two dimensional  $\gamma_1 - \gamma_2$  Plot of Weibull distribution is drawn by calculating skewness and excess kurtosis defined by the shape parameter, then one set of 100 random life data and two sets of bearing life data are used to evaluate skewness and excess kurtosis when they are right censored from 10 up to full sample size. It is found that random life dataset and lab-test datasets both are able to gradually approach to the expected two dimensional  $\gamma_1 - \gamma_2$  plot of Weibull distribution.

## Keywords

Weibull Distribution, Skewness, Excess Kurtosis

---

# 随机寿命数据威布尔分布的二维 $\gamma_1 - \gamma_2$ 图

王桂金

钢铁研究总院, 北京  
Email: [meiwg6234@gmail.com](mailto:meiwg6234@gmail.com)

收稿日期: 2015年2月9日; 录用日期: 2015年2月22日; 发布日期: 2015年2月28日

---

## 摘要

本文首先根据形状参数计算威布尔分布的斜度和过剩峭度的理论值, 再画出相应的二维 $\gamma_1 - \gamma_2$ 图。然后

对一组100个随机数产生的寿命及两组实测轴承寿命数据计算截尾数10到全样本的实际斜度和过剩峭度。结果表明，实验数据随斜度的增加逐步逼近威布尔理论分布。

## 关键词

威布尔分布，斜度，过剩峭度

## 1. 引言

自从 Pearson 提出三参数微分方程解多种分布函数在  $\beta_1$  (斜度  $\gamma_1$  平方)- $\beta_2$  (峭度)二维平面区域划分后, 非正态分布函数的研究取得很大进展[1] [2]。在失效分析及保险理赔理论中有广泛应用的威布尔分布后来也作为重要成员以一条曲线加入其中[3]。然而，威布尔分布参数估计诸方法多局限于平均值(一次距)和标准差(二次距)及其组合。而斜度(含三次距)和峭度(含四次距)并未被采用。其原因是多方面的，计算能力不足是其中之一。近几年文献[4] [5]开始把原始数据的统计量：斜度  $\gamma_1$  和过剩峭度  $\gamma_2$  对应的形状参数和用极大似然法(MLE)得到的形状参数加以比较，发现它们之间可以相当接近。这样，实测寿命不仅与 MLE 得到的威布尔分布具有最小方差而且分布形状也正确。本文的主要目的就是研究随机及实测失效数据组的  $\gamma_1 - \gamma_2$  曲线如何分布。

## 2. 计算过程

### 2.1. 威布尔分布的 $\gamma_1 - \gamma_2$ 曲线

若已知威布尔分布的形状参数  $\kappa$ ，则它唯一确定的斜度  $\gamma_1$  和过剩峭度  $\gamma_2$  的理论值(期望值)可由下式获得[3]：

$$\gamma_1 = (\Gamma_3 - 3\Gamma_2\Gamma_1 + 2\Gamma_1^3) / (\Gamma_2 - \Gamma_1^2)^{3/2} \tag{1}$$

$$\gamma_2 = \left\{ (\Gamma_4 - 4\Gamma_3\Gamma_1 + 6\Gamma_2\Gamma_1^2 - 3\Gamma_1^4) / (\Gamma_2 - \Gamma_1^2)^2 \right\} - 3 \tag{2}$$

式中， $\Gamma_i = \Gamma(1+i/\kappa)$ ，其中  $\Gamma$  是 gamma 函数，下标  $i = 1, 2, 3, 4$ 。

由此得到的威布尔分布的  $\gamma_1 - \gamma_2$  以及形状参数  $\kappa$  曲线见图 1。其  $\kappa$  曲线的点间隔为 0.1，并从左向右逐渐减小。在  $\gamma_1 = 2$  时  $\kappa = 1$ ， $\gamma_2 = 6$ ，即指数函数分布。而在  $\gamma_1 = 0$  时有  $\gamma_2 = -0.28314$ ， $\kappa = 3.6023$ 。但在  $\gamma_1 = 0.48012$  时  $\gamma_2 = 0$ ， $\kappa = 2.252$ 。在图 1 之后的行文中，把威布尔分布的  $\kappa$ ， $\gamma_2$  记为  $\kappa_0$ ， $\gamma_{20}$ 。

### 2.2. 模拟和实测寿命数据威布尔分布的 $\gamma_1 - \gamma_2$ 曲线

#### 2.2.1. 含 100 随机数的数组

从文献[6]表中第二列按序取出 100 个在(0,1)准均匀分布的随机数  $\alpha$ 。设形状参数  $\kappa =$  尺寸参数  $\lambda = 1$ ，根据下式可计算 100 个随机数  $\alpha$  对应的威布尔准随机寿命  $L_1 \cdots L_{100}$

$$L = \lambda \{ \ln(\alpha) \}^{1/\kappa} \tag{3}$$

然后用极大似然法重新计算截尾数  $r = 10$  到 100 的无序或有序数组的实际形状参数  $\kappa$ 。

(1) 100 个无序准随机失效寿命的  $\gamma_1 - \gamma_2$  曲线

从上述无序准随机失效寿命组采用通用统计软件计算截尾数  $r$  分别为 10 到 100 的统计量  $\gamma_1$ ， $\gamma_2$ ，然后以  $\gamma_1$  为横坐标，画出  $\gamma_2$ ， $\gamma_{20}$  及  $\kappa$ ， $\kappa_0$  诸曲线，见图 2。其中  $\gamma_1$ ， $\gamma_2$ ， $\kappa$  分别是数组的斜度，过剩峭度和实际形状参数； $\gamma_{20}$ ， $\kappa_0$  是和  $\gamma_1$  对应的威布尔分布过剩峭度和形状参数期望值。为了便于区分，图

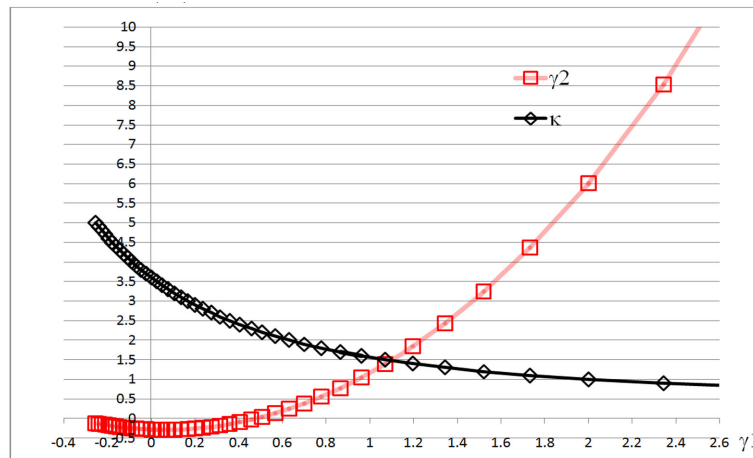


Figure 1. The  $\gamma_1 - \gamma_2$  plot of Weibull distribution  
图 1. 威布尔分布的  $\gamma_1 - \gamma_2$  曲线

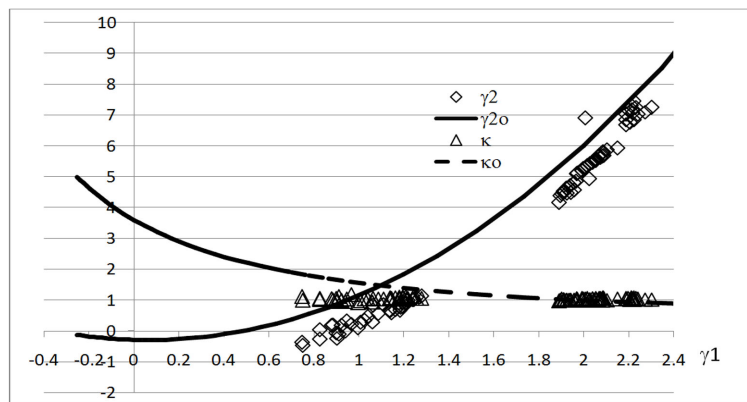


Figure 2. The  $\gamma_1 - \gamma_2$  plot of 100 random life data, right censored from 10 to 100  
图 2. 100 个无序准随机失效寿命的  $\gamma_1 - \gamma_2$  曲线, 右截尾数从 10 至 100

中分别用实线和虚线表示威布尔分布的期望值  $\gamma_{2o}$ ,  $\kappa_o$ 。而数据组的实测  $\gamma_2$ ,  $\kappa$  点则只用菱形和三角符号标出。从图中可看出, 随着  $\gamma_1$  增大,  $\gamma_2$  越来越接近但小于期望值  $\gamma_{2o}$ , 只有一个  $\gamma_2$  高于对应的  $\gamma_{2o}$ 。而且在  $\gamma_1$  的有值范围, 实际形状参数  $\kappa$  只在 1 附近小幅波动, 并在高  $\gamma_1$  处和  $\kappa_o$  相交。显然, 在讨论的截尾  $r$  范围内数据组均保持良好的随机性。

### (2) 100 个有序准随机失效寿命的 $\gamma_1 - \gamma_2$ 曲线

把上述 100 个准随机寿命由小到大排列, 计算它在截尾数 10 到 100 的统计量  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$ 。然后以  $\gamma_1$  为横坐标, 画出  $\gamma_2$ ,  $\gamma_{2o}$  及  $\kappa$ ,  $\kappa_o$  诸曲线, 见图 3。数据从无序变成有序后使得密集分布  $\gamma_2$  推向更低的  $\gamma_1$ 。随后只有三个点分散于高  $\gamma_1$ , 但未和  $\gamma_{2o}$  相吻合。数据点  $\gamma_1$  的最大值也从 2.3 降到略小于 2.0。至于  $\kappa$ , 它随  $\gamma_1$  增加从 2 减少到略低于设定值 1, 几乎和  $\kappa_o$  相交。

### 2.2.2. 一组 60 个 7208 轴承失效数据的 $\gamma_1 - \gamma_2$ 曲线

这组由小到大排列的 60 个寿命数据取自文献[7]。用 2.1 节的前 60 个随机数把它打乱成无序数组, 然后分别计算截尾数  $r$  由 10 到 60 的无序和有序数组的统计量  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  及  $\kappa$ 。并以  $\gamma_1$  为横坐标, 分别画出  $\gamma_2$ ,  $\gamma_{2o}$  及  $\kappa$ ,  $\kappa_o$  诸曲线, 见图 4 和图 5。

#### (1) 60 个 7208 轴承无序准随机失效寿命的 $\gamma_1 - \gamma_2$ 曲线

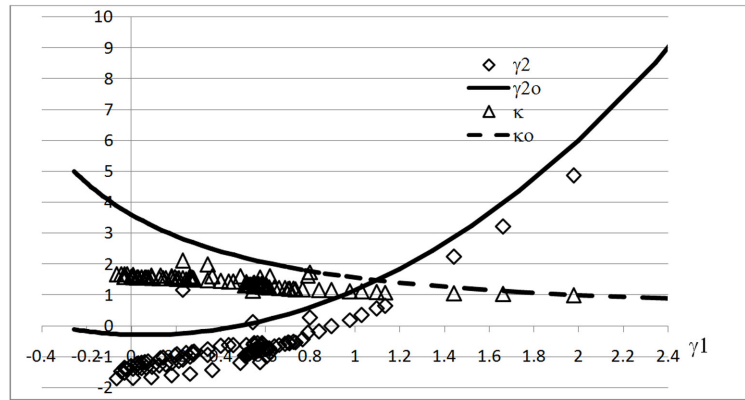


Figure 3. The  $\gamma_1 - \gamma_2$  plot of 100 ascent random life data, right censored from 10 to 100

图 3. 100 有序准随机失效寿命的  $\gamma_1 - \gamma_2$  曲线, 右截尾数从 10 至 100

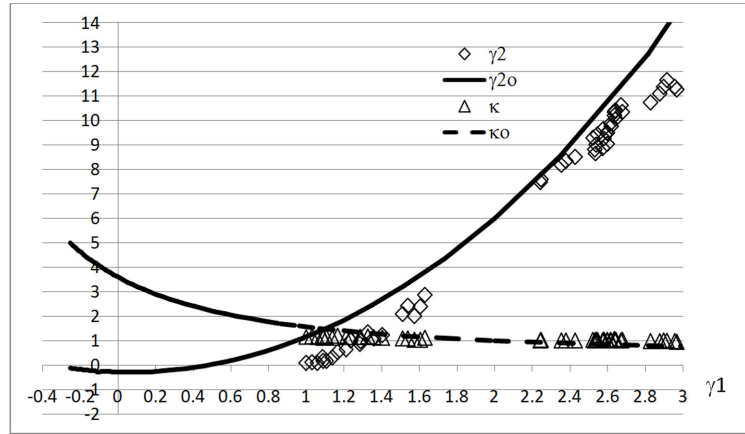


Figure 4. The  $\gamma_1 - \gamma_2$  plot of 60 random life data in 7208 bearing, right censored from 10 to 60

图 4. 60 个 7208 轴承准随机失效寿命的  $\gamma_1 - \gamma_2$  曲线, 右截尾数从 10 至 60

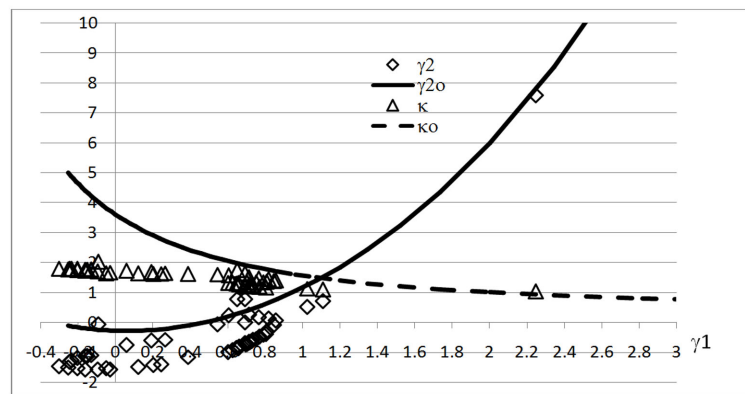


Figure 5. The  $\gamma_1 - \gamma_2$  plot of 60 ascent life data in 7208 bearing, right censored from 10 to 60

图 5. 60 个 7208 轴承有序准随机失效寿命的  $\gamma_1 - \gamma_2$  曲线, 右截尾数从 10 至 60

图 4 中试验点也分别集中在低  $\gamma_1$  和高  $\gamma_1$  两处。数据值  $\gamma_2$  相当接近但略小于期望值, 而且逐渐逼近

$\gamma_{2o}$ ，然后又偏离开。在  $\gamma_1$  的有值范围内，实际形状参数  $\kappa$  也在 1 附近波动并且很快和  $\kappa_o$  相交。显然，这组数据组在讨论的截尾范围内也保持相当良好的随机性。

(2) 60 个 7208 轴承有序准随机失效寿命的  $\gamma_1 - \gamma_2$  曲线

在图 5 中，数据从无序改成有序后使  $\gamma_2$  密集分布区推向更低  $\gamma_1$ 。随后只有一个  $\gamma_2$  点位于高  $\gamma_1$  区，它很接近  $\gamma_{2o}$ 。数据点  $\gamma_1$  的最大值也从 3 降到略小于 2.3。至于  $\kappa$ ，它随  $\gamma_1$  增大很快从 2 附近减少到数值 1 附近，正好和  $\kappa_o$  相交。

2.2.3. 一组 37 个 H208 轴承失效数据的  $\gamma_1 - \gamma_2$  曲线

这组由小到大排列的 37 个轴承寿命数据取自文献[8]。用 2.1 节前 37 个随机数可把它打乱成无序数组，然后分别计算截尾数  $r$  由 10 到 37 的无序和有序数组的统计量  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  及  $\kappa$ 。以  $\gamma_1$  为横坐标，画出  $\gamma_2$ ,  $\gamma_{2o}$  及  $\kappa$ ,  $\kappa_o$  诸曲线，见图 6 和图 7。

(1) 37 个 H208 轴承无序准随机失效寿命的  $\gamma_1 - \gamma_2$  曲线

图 6 中试验点分布在三个  $\gamma_1$  小区。数据值  $\gamma_2$  先是逐渐逼近但略小于期望值  $\gamma_{2o}$ ，然后又离开它。在  $\gamma_1$  的有值范围，实际形状参数  $\kappa$  也在 1 附近波动并且很接近  $\kappa_o$ ，但没有相交。显然，这组数据组在讨论的截尾范围内也保持相当好的随机性。

(2) 37 个 H208 轴承有序准随机失效寿命的  $\gamma_1 - \gamma_2$  曲线

失效数据从无序改成有序后把  $\gamma_2$  密集分布略微推向更低起始  $\gamma_1$ 。随后只有一个点位于高  $\gamma_1$ ，而且和  $\gamma_{2o}$  比较接近。数据点  $\gamma_1$  的最大值也从 2.15 附近降到略小于 1.8。至于  $\kappa$ ，它随  $\gamma_1$  增加很快从 2 减少到 1 附近，但未和  $\kappa_o$  相交。请注意， $\gamma_2$  和  $\kappa$  曲线的跳动范围比较大。

3. 结果讨论

从一组 100 个模拟随机寿命及两组轴承实测寿命(分别为 60 个和 37 个数据)的递增截尾  $\gamma_1 - \gamma_2$  曲线计算表明：

a) 当疲劳寿命数据组足够大，而且呈准随机分布，在它们的  $\gamma_1 - \gamma_2$  图中通常可以在高  $\gamma_1$  低  $\kappa$  处找到数据的过剩峭度  $\gamma_2$  接近 MLE 的威布尔分布的  $\gamma_{2o}$ 。 $\kappa_o$  和  $\kappa$  两条曲线的交点和文献[7] [8]的结果相当接近。这表明， $\gamma_1 - \gamma_2$  图可以作为一种有效的工具和文献[3] [4]一起用来判断威布尔分布形状参数  $\kappa$  估计的合理性。

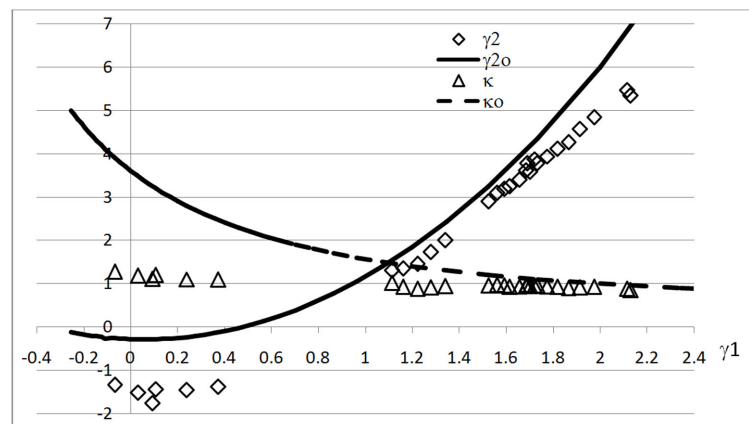


Figure 6. The  $\gamma_1 - \gamma_2$  plot of 37 random life data in H208 bearing, right censored from 10 to 37

图 6. 37 个 H208 轴承无序准随机失效寿命的  $\gamma_1 - \gamma_2$  曲线，右截尾数从 10 至 37

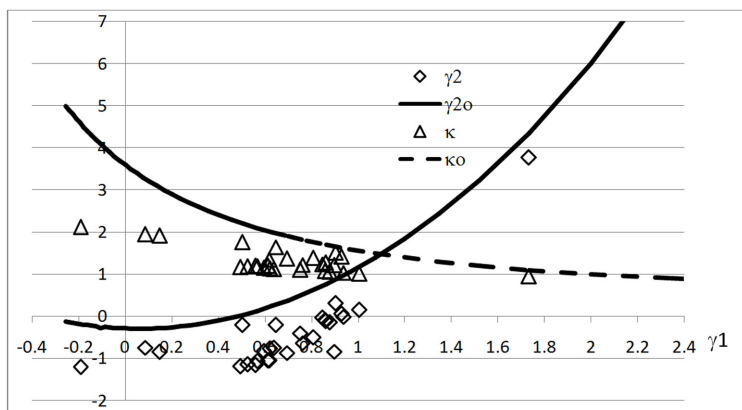


Figure 7. The  $\gamma_1 - \gamma_2$  plot of 37 ascent life data in H208 bearing, right censored from 10 to 37  
 图 7. 37 个 H208 轴承有序准随机失效寿命的  $\gamma_1 - \gamma_2$  曲线, 右截尾数从 10 至 37

b) 一组已知准随机疲劳寿命数据可以分别按有序和无序排列进行 MLE 截尾计算。如果不同截尾无序数组给出平稳收敛的形状参数  $\kappa$ ，则有序数组的  $\kappa$  也有逼近图 1 中  $\kappa_0$  曲线的趋势，然而后者的变化区间较大。

c) 随着全样本尺寸从 100 下降到 37，无序与有序数组的形状参数  $\kappa$  逼近期望值  $\kappa_0$  过程的波动幅度逐步增大。所以，在条件许可时使用较大样本会有更好的统计行为。

d) 当全样本尺寸足够大，经过严格控制试样材料成分，热处理，机械加工，以及寿命试验操作之后如果失效数据还不能得到满意的  $\gamma_1 - \gamma_2$  图，也许应考虑其他分布的可能性。

总之，本文以威布尔分布为例说明 Pearson 及后人的  $\beta_1 - \beta_2$  二维图不仅对非正态分布函数的理论研究极其重要，而且对分布函数的实验数据分析有积极的指导意义。

### 参考文献 (References)

- [1] Pearson, K. (1895) Contributions to the mathematical theory of evolution II: Skew variation in homogeneous material. *Philosophical Transactions of Royal Society*, **186**, 343-414.
- [2] Pearson, E.S. and Hartley, H.O. (1966, 1972) *Biometrika, tables for statisticians*, vol. 1 and 2. Cambridge University Press, Cambridge.
- [3] Rinne, H. (2009) *The Weibull distribution, a handbook*. CRC Press, New York.
- [4] 王桂金 (2012) Weibull 随机寿命的统计量. *轴承*, **3**, 38-42.
- [5] 王桂金 (2012) Weibull 随机寿命的信息熵. *轴承*, **12**, 28-31.
- [6] Samuel, M.S. (1974) *Standard mathematical tables*. 21st Edition, CRC Press, Cleveland.
- [7] 徐人平, 胡志勇, 何复超 (1992) 滚动轴承疲劳寿命的概率分布. *云南工学院学报*, **4**, 67-71.
- [8] 徐跃进 (2007) 滚动轴承的疲劳可靠性计算. *轴承*, **8**, 27-30.