Statistics and Application 统计学与应用, **2017, 6(5), 516-525**
Published Online December 2017 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/sa
https://doi.org/10.12677/sa.2017.65058

Optimal Dividend in the Two-Dimensional Dual Model

Mi Han, Shixia Ma, Tong Li

Hebei University of Technology, Tianjin
Email: ffdhanmi99@sina.com

Received: Dec. 1st, 2017; accepted: Dec. 15th, 2017; published: Dec. 22nd, 2017

Abstract

We study the two-dimensional dual model with diffusion under a threshold dividend strategy. We obtain a group of integro-differential equations satisfied by the expected total sum of discount dividends until ruin. And explicit results when the gains of the two projects are exponentially distributed are derived. By applying the method of the Laplace transform, we solve the case where gains follow general distributions. We also illustrate how to calculate the optimal dividend threshold.

Keywords

Two-Dimensional Dual Model, Threshold Strategy, Diffusion, Proportional Transaction Costs, Laplace Transform

二维对偶模型的最优分红

韩　咪，马世霞，李　桐

河北工业大学，天津
Email: ffdhanmi99@sina.com

收稿日期：2017年12月1日；录用日期：2017年12月15日；发布日期：2017年12月22日

摘　要

研究阈值分红策略下带扩散的二维对偶模型，得到分红现值的期望所满足的积分微分方程组，并用此方程组解得收入服从指数分布时的分红折现的期望具体表达式，应用拉普拉斯变换求得收益服从任意分布时的解，最后解得了此模型下的最优边界。

文章引用: 韩咪, 马世霞, 李桐. 二维对偶模型的最优分红[J]. 统计学与应用, 2017, 6(5): 516-525.
DOI: 10.12677/sa.2017.65058

关键词

二维对偶模型，阈值策略，扩散，比例交易费用，拉普拉斯变换

1. 引言

在风险理论研究中分红问题是一个研究热点，以研究经典风险模型和对偶风险模型的分红问题为主。经典的风险模型主要适用于有长时间持续收入和随机支出的公司，在保险公司中的表现最为明显。对偶模型则适用于有长时间持续花费和随机收入的公司，在研发公司中的表现尤为明显。

近些年，有许多学者对二维的模型进行了研究。在2003年Chan等[1]首次就二维风险模型关于破产概率问题进行了研究。随后，文献[2] [3]对二维风险模型的破产问题做了进一步的研究。Czarna等[4]研究了脉冲控制下二维复合泊松风险模型的分红问题，当索赔服从指数时解得了值函数的确切表达式。Zhang等[5]建立了两类索赔相关联的风险模型并求得了最优边界分红策略。受以上文章的启发，我们考虑阈值策略下的二维对偶模型。此模型可适用于投资两种项目的企业，例如一个企业同时投资石油产业和制药产业。两种项目的初始准备金来自于同一企业，且有长时间的连续消费和各自随机的收入。考虑到比例交易费用和经济波动因素，我们研究的是带比例交易费用和扩散的二维对偶模型。目标是使得到破产时刻分红现值的期望最大化。

2. 模型的建立

设定一个完备的概率空间$\left(\Omega,F,\{F_t\}_{t\ge0},P\right)$。$\left\{X_1(t);t\ge0\right\}$和$\left\{X_2(t);t\ge0\right\}$分别表示投资公司在$t$时刻两种项目的盈余且它们关于$\{F_t\}_{t\ge0}$是适应的。两种项目盈余过程为

$$X_1(t)=x_1-c_{11}t+\sum_{n=1}^{N_1(t)}U_n,\quad X_2(t)=x_2-c_{12}t+\sum_{n=1}^{N_2(t)}V_n,$$

其中，$x_1\ge0$，$x_2\ge0$为两种项目的初始准备金，$c_{11}\ge0$和$c_{12}\ge0$是对应的固定花费率。$\left\{N_1(t);t\ge0\right\}$，$\left\{N_2(t);t\ge0\right\}$是两个参数分别为$\lambda_1$，$\lambda_2$的相互独立的泊松过程。$\{U_n;n\ge1\}$是第一种项目的收益额，$\{V_n;n\ge1\}$是第二种项目的收益额。我们设定$U_1,U_2,U_3,\cdots$是相互独立且同分布的正随机变量，其分布函数为$F_U(x)$。$V_1,V_2,V_3,\cdots$是相互独立且同分布的正随机变量，其分布函数为$F_V(x)$。

因主要考虑公司总的盈余情况，即

$$X(t)=x-c_1t+S_1(t)+S_2(t)+\sigma W(t),\ t\ge0$$

此处，$x=x_1+x_2$，$c_1=c_{11}+c_{12}$，$S_1(t)=\sum_{n=1}^{N_1(t)}U_n$，$S_2(t)=\sum_{n=1}^{N_2(t)}V_n$，$\left\{W(t);t\ge0\right\}$为标准的布朗运动，$\sigma$是$\left\{W(t);t\ge0\right\}$的扩散系数。此外，$\left\{N_1(t);t\ge0\right\}$，$\left\{N_2(t);t\ge0\right\}$，$\{U_n;n\ge1\}$，$\{V_n;n\ge1\}$和$\left\{W(t);t\ge0\right\}$是相互独立的。

公司执行以b为边界的阈值分红策略来控制公司盈余。当盈余超过b时，公司以速率c_2-c_1进行分红，即盈余下降速率为c_2（$c_2>c_1$）；盈余未达b时，没有分红，盈余下降速率为c_1。可表示为

$$\mathrm{d}X(t) = -C(X(t))\mathrm{d}t + \mathrm{d}S_1(t) + \mathrm{d}S_2(t) + \sigma \mathrm{d}W(t),\ X(0) = x,$$

其中，

$$C(x) = \begin{cases} c_1, & 0 < x \le b, \\ c_2, & x > b. \end{cases} \tag{1}$$

定义 $T = inf\{t : X(t) < 0\}$ (任意 $t \ge 0$，$X(t) > 0$ 则 $T = \infty$)为公司的破产时刻。$I(A)$表示：事件 A 发生，则 $I(A)$ 取值为 1，A 事件未发生，则 $I(A)$ 取值为 0。设定交易比例为 $\eta \in (0,1]$，即若公司分红为 ϑ，则股东实际可以得到 $\eta\vartheta$。故到破产时刻公司分红现值的期望表达式为

$$V(x,b) = E\left[\int_0^T \eta(c_2 - c_1)\mathrm{e}^{-\delta t} I(X(t) > b)\mathrm{d}t\right],$$

其中，$\delta > 0$ 为折现因子。

3. 积分－微分方程

定理 1：$V(x,b)$ 满足以下的积分微分方程组，

当 $0 \le x < b$ 时，

$$\begin{aligned} &\frac{\sigma^2}{2} V_{xx}(x,b) - c_1 V_x(x,b) - (\lambda_1 + \lambda_2 + \delta) V(x,b) \\ &+ \lambda_1 \int_0^\infty V(x+u,b)\mathrm{d}F_U(u) + \lambda_2 \int_0^\infty V(x+v,b)\mathrm{d}F_V(v) = 0, \end{aligned} \tag{2}$$

当 $x > b$ 时，

$$\begin{aligned} &\frac{\sigma^2}{2} V_{xx}(x,b) - c_2 V_x(x,b) - (\lambda_1 + \lambda_2 + \delta) V(x,b) \\ &+ \lambda_1 \int_0^\infty V(x+u,b)\mathrm{d}F_U(u) + \lambda_2 \int_0^\infty V(x+v,b)\mathrm{d}F_V(v) + \eta(c_2 - c_1) = 0, \end{aligned} \tag{3}$$

初始条件为 $V(0,b) = 0$，连续条件为 $V(b-,b) = V(b+,b)$ 且 $V_x(b-,b) = V_x(b+,b)$。

证明：首先我们考虑 $x > b$ 时的情况，取一个足够小的时间 h 使得 $x - c_2 h > b$，则在区间 $(0,h)$ 内发生的时间分为以下四种情况：

(1) 在到时刻 h 前，两类项目均无收益；

(2) 在到时刻 h 前，第一类项目有收益第二类项目无收益；

(3) 在到时刻 h 前，第一类项目无收益第二类项目有收益；

(4) 在到时刻 h 前，两类项目都有收益；

$$\begin{aligned} V(x,b) = {} & \eta(c_2 - c_1)\int_0^h \mathrm{e}^{-\delta t}\mathrm{d}t + (1-\delta h)\Big\{(1-\lambda_1 h)(1-\lambda_2 h)E\big[V(x - c_2 h + \sigma W(h), b)\big] \\ & + \lambda_1 h(1-\lambda_2 h)\int_0^\infty E\big[V(x + u - c_2 h + \sigma W(h), b)\big]\mathrm{d}F_U(u) \\ & + (1-\lambda_1 h)\lambda_2 h \int_0^\infty E\big[V(x + v - c_2 h + \sigma W(h), b)\big]\mathrm{d}F_V(v)\Big\} + o(h). \end{aligned} \tag{4}$$

用泰勒公式展开 $V(x - c_2 h + \sigma W(h), b)$，得到

$$V(x - c_2 h + \sigma W(h), b) = V(x,b) + V_x(x,b)(-c_2 h + \sigma W(h)) + V_{xx}(x,b)\frac{(-c_2 h + \sigma W(h))^2}{2} + o(h).$$

由布朗运动的性质，对上式取期望可得

$$E\left[V\left(x-c_2h+\sigma W\left(h\right),b\right)\right]=V\left(x,b\right)-c_2hV_x\left(x,b\right)+\frac{\sigma^2}{2}hV_{xx}\left(x,b\right)+o\left(h\right). \tag{5}$$

将(5)代入(4)可得

$$\begin{aligned}&\frac{\sigma^2}{2}hV_{xx}\left(x,b\right)+\eta h\left(c_2-c_1\right)-c_2hV_x\left(x,b\right)-\left(\lambda_1+\lambda_2+\delta\right)hV\left(x,b\right)\\&+\lambda_1h\int_0^\infty V\left(x+u,b\right)\mathrm{d}F_U\left(u\right)+\lambda_2h\int_0^\infty V\left(x+v,b\right)\mathrm{d}F_V\left(v\right)+o\left(h\right)=0.\end{aligned} \tag{6}$$

然后对(6)式两侧关于 h 求导并令 $h\to0$ 可得(3)。利用类似的讨论方式可以得到积分微分方程(2)。当公司的初始准备金为零时，公司立即破产，即分红现值的期望为零。故初始条件满足。

注 1：① 尽管 $V\left(x,b\right)$ 和 $V_x\left(x,b\right)$ 在点 b 是连续的，但 $V_{xx}\left(x,b\right)$ 未必是连续的。而由(2)可得

$$\begin{aligned}&\frac{\sigma^2}{2}V_{xx}\left(b-,b\right)-c_1V_x\left(b-,b\right)-\left(\lambda_1+\lambda_2+\delta\right)V\left(b-,b\right)\\&+\lambda_1\int_0^\infty V\left(b+u,b\right)\mathrm{d}F_U\left(u\right)+\lambda_2\int_0^\infty V\left(b+v,b\right)\mathrm{d}F_V\left(v\right)=0,\end{aligned}$$

由(3)可得

$$\begin{aligned}&\frac{\sigma^2}{2}V_{xx}\left(b+,b\right)-c_2V_x\left(b+,b\right)-\left(\lambda_1+\lambda_2+\delta\right)V\left(b+,b\right)\\&+\lambda_1\int_0^\infty V\left(b+u,b\right)\mathrm{d}F_U\left(u\right)+\lambda_2\int_0^\infty V\left(b+v,b\right)\mathrm{d}F_V\left(v\right)+\eta\left(c_2-c_1\right)=0.\end{aligned}$$

将以上两式相减可得

$$\frac{\sigma^2}{2}\left[V_{xx}\left(b-,b\right)-V_{xx}\left(b+,b\right)\right]+c_2V_x\left(b+,b\right)-c_1V_x\left(b-,b\right)=\eta\left(c_2-c_1\right),$$

上式说明当 $V_{xx}\left(b-,b\right)=V_{xx}\left(b+,b\right)$ 时，若 $V_x\left(b+,b\right)=V_x\left(b-,b\right)=\eta$ 则上式成立。这一结论在后面确定最优分红边界时会用到。

② $V\left(x,b\right)$ 是有界的。

因为 $\left(c_2-c_1\right)\int_0^T\mathrm{e}^{-\delta t}\eta I\left(X\left(t\right)>b\right)\mathrm{d}t\le\left(c_2-c_1\right)\int_0^\infty\mathrm{e}^{-\delta t}\eta I\left(X\left(t\right)>b\right)\mathrm{d}t$,

易得 $0\le V\left(x,b\right)\le\dfrac{\eta\left(c_2-c_1\right)}{\delta}$ 。

注 2：为方便起见，我们做如下定义：

$$V\left(x,b\right)=\begin{cases}V_1\left(x\right), & 0<x<b,\\V_2\left(x\right), & x>b.\end{cases} \tag{7}$$

则(2)和(3)可重新改写成如下方程组

当 $0\le x<b$ 时，

$$\begin{aligned}&\frac{\sigma^2}{2}V_1''\left(x\right)-c_1V_1'\left(x\right)-\left(\lambda+\delta\right)V_1\left(x\right)+\lambda_1\int_0^{b-x}V_1\left(x+u\right)\mathrm{d}F_U\left(u\right)\\&+\lambda_1\int_{b-x}^\infty V_2\left(x+u\right)\mathrm{d}F_U\left(u\right)+\lambda_2\int_0^{b-x}V_2\left(x+v\right)\mathrm{d}F_V\left(v\right)+\lambda_2\int_{b-x}^\infty V_2\left(x+v\right)\mathrm{d}F_V\left(v\right)=0,\end{aligned} \tag{8}$$

当 $x>b$ 时，

$$\begin{aligned}&\frac{\sigma^2}{2}V_2''\left(x\right)-c_2V_2'\left(x\right)-\left(\lambda+\delta\right)V_2\left(x\right)+\lambda_1\int_0^\infty V_2\left(x+u\right)\mathrm{d}F_U\left(u\right)\\&+\lambda_2\int_0^\infty V_2\left(x+v\right)\mathrm{d}F_V\left(v\right)+\eta\left(c_2-c_1\right)=0,\end{aligned} \tag{9}$$

其中，$\lambda=\lambda_1+\lambda_1$，初始条件为$V_1(0)=0$，连续条件为$V_1(b-)=V_2(b+)$且$V_1'(b-)=V_2'(b+)$。

3.1. 收益服从指数分布

第一类项目的收益分布为$\mathrm{d}F_U(u)=\alpha\mathrm{e}^{-\alpha u}$，第二类项目的收益分布为$\mathrm{d}F_V(v)=\beta\mathrm{e}^{-\beta v}$。不失一般性，我们给定$\alpha>\beta$。将分布函数代入到(9)式，变量替换后得到

当$x>b$时，

$$\begin{aligned}&\frac{\sigma^2}{2}V_2''(x)-c_2V_2'(x)-(\lambda+\delta)V_2(x)+\lambda_1\int_x^\infty V_2(u)\alpha\mathrm{e}^{-\alpha(u-x)}\mathrm{d}u\\&+\lambda_2\int_x^\infty V_2(v)\beta\mathrm{e}^{-\beta(v-x)}\mathrm{d}v+\eta(c_2-c_1)=0.\end{aligned}\tag{10}$$

令$\mathcal{I}$表示值函数$V_2(x)$的恒等算子，$\mathcal{Q}$表示值函数$V_2(x)$的微分算子。对(10)两侧进行$\mathcal{Q}(\mathcal{Q}-\alpha\mathcal{I})-\beta(\mathcal{Q}-\alpha\mathcal{I})$运算得到

$$\begin{aligned}&\frac{\sigma^2}{2}V_2^{(4)}(x)-\left[\frac{\sigma^2}{2}(\alpha+\beta)+c_2\right]V_2^{(3)}(x)+\left[c_2(\alpha+\beta)-(\lambda+\delta)+\alpha\beta\frac{\sigma^2}{2}\right]V_2^{(2)}(x)\\&+\left[(\alpha+\beta)(\delta+\lambda)-\lambda_1\alpha-\lambda_2\beta-\alpha\beta c_2\right]V_2'(x)-\alpha\beta\delta V_2(x)+\alpha\beta\eta(c_2-c_1)=0.\end{aligned}$$

易见上面的四阶非齐次微分方程有一个特解$\dfrac{\eta(c_2-c_1)}{\delta}$。其所对应的特征微分方程为

$$\begin{aligned}&\frac{\sigma^2}{2}r^4-\left[\frac{\sigma^2}{2}(\alpha+\beta)+c_2\right]r^3+\left[c_2(\alpha+\beta)-(\lambda+\delta)+\alpha\beta\frac{\sigma^2}{2}\right]r^2\\&+\left[(\alpha+\beta)(\delta+\lambda)-\lambda_1\alpha-\lambda_2\beta-\alpha\beta c_2\right]r-\alpha\beta\delta=0,\end{aligned}$$

其有一个负根r_1和三个正根r_2,r_3,r_4（$r_1<0<r_2<\beta<r_3<\alpha<r_4$），故

$$V_2(x)=D_1\mathrm{e}^{r_1x}+D_2\mathrm{e}^{r_2x}+D_3\mathrm{e}^{r_3x}+D_4\mathrm{e}^{r_4x}+\frac{\eta(c_2-c_1)}{\delta},\tag{11}$$

其中，D_1,D_2,D_3和D_4是待定的系数。

由注2可推知$D_4\le0$。为证$D_4=0$，我们需研究$V_2(x)$的微分

$$V_2'(x)=D_1r_1\mathrm{e}^{r_1x}+D_2r_2\mathrm{e}^{r_2x}+D_3r_3\mathrm{e}^{r_3x}+D_4r_4\mathrm{e}^{r_4x}.$$

若$D_4<0$，当x足够大时有$V_2'(x)<0$，这与$V_2(x)$是递增的事实相矛盾，所以$D_4=0$。同样可证得$D_3=D_2=0$且$D_1<0$，故

$$V_2(x)=D_1\mathrm{e}^{r_1x}+\frac{\eta(c_2-c_1)}{\delta}.$$

为求解$V_1(x)$，需将V_1和V_2代入(8)得

当$0\le x\le b$时，

$$\begin{aligned}&\frac{\sigma^2}{2}V_1''(x)-c_1V_1'(x)-(\lambda+\delta)V_1(x)\\&+\alpha\lambda_1\mathrm{e}^{\alpha x}\left[\int_x^bV_1(u)\mathrm{e}^{-\alpha u}\mathrm{d}u+D_1\int_b^\infty\mathrm{e}^{(r_1-\alpha)u}\mathrm{d}u+\eta\frac{c_2-c_1}{\delta}\int_b^\infty\mathrm{e}^{-\alpha u}\mathrm{d}u\right]\\&+\beta\lambda_2\mathrm{e}^{\beta x}\left[\int_x^bV_1(v)\mathrm{e}^{-\beta v}\mathrm{d}v+D_1\int_b^\infty\mathrm{e}^{(r_1-\beta)v}\mathrm{d}v+\eta\frac{c_2-c_1}{\delta}\int_b^\infty\mathrm{e}^{-\beta v}\mathrm{d}v\right]=0,\end{aligned}\tag{12}$$

对上式两侧进行 $\mathcal{Q}(\mathcal{Q}-\alpha\mathcal{I})-\beta(\mathcal{Q}-\alpha\mathcal{I})$ 运算可得

$$\begin{aligned}&\frac{\sigma^2}{2}V_1^{(4)}(x)-\left[\frac{\sigma^2}{2}(\alpha+\beta)+c_1\right]V_1^{(3)}(x)+\left[c_1(\alpha+\beta)-(\lambda+\delta)+\alpha\beta\frac{\sigma^2}{2}\right]V_1^{(2)}(x)\\&+\left[(\alpha+\beta)(\delta+\lambda)-\lambda_1\alpha-\lambda_2\beta-\alpha\beta c_1\right]V_1'(x)-\alpha\beta\delta V_1(x)=0.\end{aligned}$$

因此 $V_1(x)=E_1\mathrm{e}^{s_1x}+E_2\mathrm{e}^{s_2x}+E_3\mathrm{e}^{s_3x}+E_4\mathrm{e}^{s_4x}$，

其中，E_1,E_2,E_3 和 E_4 是待定的系数。s_1,s_2,s_3 和 s_4 （$s_1<0<s_2<\beta<s_3<\alpha<s_4$）是对应特征方程的解，特征方程如下

$$\begin{aligned}&\frac{\sigma^2}{2}s^4-\left[\frac{\sigma^2}{2}(\alpha+\beta)+c_2\right]s^3+\left[c_1(\alpha+\beta)-(\lambda+\delta)+\alpha\beta\frac{\sigma^2}{2}\right]s^2\\&+\left[(\alpha+\beta)(\delta+\lambda)-\lambda_1\alpha-\lambda_2\beta-\alpha\beta c_1\right]s-\alpha\beta\delta=0.\end{aligned}$$

因初始条件为 $V_1(0)=0$，即

$$E_1+E_2+E_3+E_4=0 \tag{13}$$

又由连续条件 $V_1(b-)=V_2(b+)$ 得

$$D_1\mathrm{e}^{r_1b}+\frac{\eta(c_2-c_1)}{\delta}=E_1\mathrm{e}^{s_1b}+E_2\mathrm{e}^{s_2b}+E_3\mathrm{e}^{s_3b}+E_4\mathrm{e}^{s_4b}. \tag{14}$$

此外，由一阶连续性 $V_1'(b-)=V_2'(b+)$ 可得

$$D_1r_1\mathrm{e}^{r_1b}=E_1s_1\mathrm{e}^{s_1b}+E_2s_2\mathrm{e}^{s_2b}+E_3s_3\mathrm{e}^{s_3b}+E_4s_4\mathrm{e}^{s_4b}. \tag{15}$$

将 V_1 和 V_2 的表达式代入(12)，可得

$$\begin{aligned}&\frac{\sigma^2}{2}\left(E_1s_1^2\mathrm{e}^{s_1b}+E_2s_2^2\mathrm{e}^{s_2b}+E_3s_3^2\mathrm{e}^{s_3b}+E_4s_4^2\mathrm{e}^{s_4b}\right)-c_1\left(E_1s_1\mathrm{e}^{s_1b}+E_2s_2\mathrm{e}^{s_2b}+E_3s_3\mathrm{e}^{s_3b}+E_4s_4\mathrm{e}^{s_4b}\right)\\&-(\lambda+\delta)\left(E_1\mathrm{e}^{s_1x}+E_2\mathrm{e}^{s_2x}+E_3\mathrm{e}^{s_3x}+E_4\mathrm{e}^{s_4x}\right)+\alpha\lambda_1\mathrm{e}^{\alpha x}\left[\int_x^b\left(E_1\mathrm{e}^{s_1x}+E_2\mathrm{e}^{s_2x}+E_3\mathrm{e}^{s_3x}+E_4\mathrm{e}^{s_4x}\right)\mathrm{e}^{-\alpha u}\mathrm{d}u\right.\\&\left.+D_1\int_b^\infty\mathrm{e}^{(r_1-\alpha)u}\mathrm{d}u+\eta\frac{c_2-c_1}{\delta}\int_b^\infty\mathrm{e}^{-\alpha u}\mathrm{d}u\right]+\beta\lambda_2\mathrm{e}^{\beta x}\left[\int_x^b\left(E_1\mathrm{e}^{s_1x}+E_2\mathrm{e}^{s_2x}+E_3\mathrm{e}^{s_3x}+E_4\mathrm{e}^{s_4x}\right)\mathrm{e}^{-\beta v}\mathrm{d}v\right.\\&\left.+D_1\int_b^\infty\mathrm{e}^{(r_1-\beta)v}\mathrm{d}v+\eta\frac{c_2-c_1}{\delta}\int_b^\infty\mathrm{e}^{-\beta v}\mathrm{d}v\right]=0.\end{aligned}$$

然后将 $\mathrm{e}^{\alpha x}$ 和 $\mathrm{e}^{\beta x}$ 的系数化为零，得到

$$\frac{E_1}{s_1-\alpha}\mathrm{e}^{s_1b}+\frac{E_2}{s_2-\alpha}\mathrm{e}^{s_2b}+\frac{E_3}{s_3-\alpha}\mathrm{e}^{s_3b}+\frac{E_4}{s_4-\alpha}\mathrm{e}^{s_4b}-\frac{D_1}{r_1-\alpha}\mathrm{e}^{r_1b}+\frac{\eta(c_2-c_1)}{\alpha\delta}=0, \tag{16}$$

$$\frac{E_1}{s_1-\beta}\mathrm{e}^{s_1b}+\frac{E_2}{s_2-\beta}\mathrm{e}^{s_2b}+\frac{E_3}{s_3-\beta}\mathrm{e}^{s_3b}+\frac{E_4}{s_4-\beta}\mathrm{e}^{s_4b}-\frac{D_1}{r_1-\beta}\mathrm{e}^{r_1b}+\frac{\eta(c_2-c_1)}{\beta\delta}=0. \tag{17}$$

联立(13)~(17)可解得 $E_i\ (i=1,2,3,4)$ 和 D_1。故 $V(x,b)$ 的表达式为

$$V(x,b)=\begin{cases}E_1\mathrm{e}^{s_1x}+E_2\mathrm{e}^{s_2x}+E_3\mathrm{e}^{s_3x}+E_4\mathrm{e}^{s_4x}, & 0\le x\le b,\\ D_1\mathrm{e}^{r_1x}+\dfrac{\eta(c_2-c_1)}{\delta}, & x>b.\end{cases} \tag{18}$$

3.2. 用 $V_1(x)$ 求解 $V(x,b)$

当收益服从指数分布时，我们得到

$$V_2(x)=D_1\mathrm{e}^{r_1 x}+\frac{\eta(c_2-c_1)}{\delta}, \tag{19}$$

本节证明当收益服从任何分布时 $V(x,b)$ 可以用 $V_1(x)$ 来表示，因此只需求解 $V_1(x)$ 就可以得到值函数。

引理 1：考虑没有分红的二维复合泊松模型，其以 c 速率进行花费，

$$\tilde{X}(t)=x-ct+S_1(t)+S_2(t)+\sigma W(t).$$

破产时刻的 Laplace 变换 ψ 满足

$$\psi(x)=E\left[\mathrm{e}^{-\delta\tilde{T}}\mid\tilde{X}(0)=x\right]=\mathrm{e}^{R_\delta x} \tag{20}$$

其中，$\tilde{T}=inf\left\{t:\tilde{X}(t)<0\right\}$ (任意 $t\ge 0$ 有 $\tilde{X}(t)>0$ 则 $\tilde{T}=\infty$)是破产时刻。R_δ 是以下拓展的 Lundberg 基本方程的非正根

$$-\delta-c\theta+\lambda_1\left(M_U(\theta)-1\right)+\lambda_2\left(M_V(\theta)-1\right)+\frac{\sigma^2\theta^2}{2}=0,$$

其中，$M_U(\theta)$ 是 $\{U_i,i\ge 1\}$ 的矩母生成函数，$M_V(\theta)$ 是 $\{V_i,i\ge 1\}$ 的矩母生成函数。

证明：定义一个过程 $Z_\theta(t)=\mathrm{e}^{-\delta t+\theta\tilde{X}(t)}$，考虑过程 $\left\{Z_\theta(t):t\ge 0\right\}$，因 $\left\{\tilde{X}(t)\right\}$ 具有独立平稳增量性，且 $\left\{Z_\theta(t)\right\}$ 是鞅当且仅当 $E\left(Z_\theta(t)\right)=Z_\theta(0)$，即

$$\mathrm{e}^{-\delta t+\theta x-ct\theta+\lambda_1 t\left(M_U(\theta)-1\right)+\lambda_2 t\left(M_V(\theta)-1\right)+t\frac{\sigma^2\theta^2}{2}}=\mathrm{e}^{\theta x}.$$

于是可以得到拓展的 Lundberg 基本方程

$$-\delta-c\theta+\lambda_1\left(M_U(\theta)-1\right)+\lambda_2\left(M_V(\theta)-1\right)+\frac{\sigma^2\theta^2}{2}=0.$$

令 $\phi(\theta):=-c\theta+\lambda_1\left(M_U(\theta)-1\right)+\lambda_2\left(M_V(\theta)-1\right)+\dfrac{\sigma^2\theta^2}{2}$，可得到

$$\lim_{\theta\to-\infty}\phi(\theta)=+\infty,\ \phi(0)=0,$$

$$\phi''(\theta)=\lambda_1\int_0^\infty u^2\mathrm{e}^{-\theta u}\mathrm{d}F_U(u)+\lambda_2\int_0^\infty v^2\mathrm{e}^{-\theta v}\mathrm{d}F_V(v)+\sigma^2>0,$$

因此 $\phi(\theta)$ 在 $(-\infty,0)$ 是凹函数，$\phi(\theta)-\delta=0\ (\delta>0)$ 有唯一非正根记为 R_δ。当 $0\le t\le\tilde{T}$ 时，有 $0<Z_{R_\delta}(t)\le 1$，故 $\left\{Z_{R_\delta}\left(t\wedge\tilde{T}\right)\right\}$ 为有界鞅。又由最优停时定理得到对任意 t 有 $E\left(Z_{R_\delta}\left(t\wedge\tilde{T}\right)\right)=Z_{R_\delta}(0)$。应用局部收敛定理得 $E\left(Z_{R_\delta}\left(\tilde{T}\right)\right)=Z_{R_\delta}(0)$，也就是(20)。

定理 2：当 $x>b$ 时，

$$V(x,b)=\eta(c_2-c_1)\frac{1-\mathrm{e}^{\bar{R}_\delta(x-b)}}{\delta}+\mathrm{e}^{\bar{R}_\delta(x-b)}V(b,b), \tag{21}$$

$\bar{R}_\delta$ 是以下拓展的 Lundberg 基本方程的唯一非正根

$$\frac{\sigma^2\theta^2}{2}+\lambda_1\left(M_U\left(\theta\right)-1\right)+\lambda_2\left(M_V\left(\theta\right)-1\right)=\delta+c_2\theta.$$

证明：盈余第一次下降χ个单位所用时间记为$\overline{T}_{-\chi}$，其中$\chi=x-b$。以δ为折现率，在$\overline{T}_{-\chi}$时刻支付1个单位的数额折现值的期望表达式为$E\left[\mathrm{e}^{-\delta\overline{T}}\mid X\left(0\right)-b=\chi\right]$，由引理1知其等值于$e^{\overline{R}_\delta\chi}$。在盈余下降到$b$后到破产时的分红现值期望为

$$\begin{aligned}V\left(b+\chi\right)&=V\left(x,b\right)\\&=E\left[\eta\left(c_2-c_1\right)\int_0^{\overline{T}_{-\chi}}\mathrm{e}^{-\delta t}\mid X\left(0\right)-b=\chi\right]+\mathrm{e}^{\overline{R}_\delta\chi}V\left(b,b\right)\\&=-\frac{\eta\left(c_2-c_1\right)}{\delta}\left(\mathrm{e}^{\overline{R}_\delta\chi}-1\right)+\mathrm{e}^{\overline{R}_\delta\chi}V\left(b,b\right)\\&=\eta\left(c_2-c_1\right)\frac{1-\mathrm{e}^{\overline{R}_\delta(x-b)}}{\delta}+\mathrm{e}^{\overline{R}_\delta(x-b)}V\left(b,b\right).\end{aligned}$$

由定理2可知在对$V_2\left(x\right)$求解时可以不用(8)。当$0<x\le b$时，可直接将(21)代入(2)得到一个如下的积分微分方程来求解$V\left(x,b\right)$。

$$\begin{aligned}&\frac{\sigma^2}{2}V_{xx}\left(x,b\right)-c_1V_x\left(x,b\right)-\left(\lambda+\delta\right)V\left(x,b\right)+\lambda_1\int_0^{b-x}V\left(x+u,b\right)\mathrm{d}F_U\left(u\right)\\&+\lambda_1\left\{\int_{b-x}^{\infty}\frac{\eta\left(c_2-c_1\right)}{\delta}\mathrm{d}F_U\left(u\right)+\left[V\left(b,b\right)-\frac{\eta\left(c_2-c_1\right)}{\delta}\right]\int_{b-x}^{\infty}\mathrm{e}^{\overline{R}_\delta(x+u-b)}\mathrm{d}F_U\left(u\right)\right\}\\&+\lambda_2\int_0^{b-x}V\left(x+v,b\right)\mathrm{d}F_V\left(v\right)+\lambda_2\left\{\int_{b-x}^{\infty}\frac{\eta\left(c_2-c_1\right)}{\delta}\mathrm{d}F_V\left(v\right)\right.\\&\left.+\left[V\left(b,b\right)-\frac{\eta\left(c_2-c_1\right)}{\delta}\right]\int_{b-x}^{\infty}\mathrm{e}^{\overline{R}_\delta(x+v-b)}\mathrm{d}F_V\left(v\right)\right\}=0.\end{aligned}\tag{22}$$

4. Laplace 变换

在二维的对偶模型中，当$0<x\le b$时，也可以类似于[6]用 Laplace 变换来求解$V\left(x,b\right)$。用变量$z=b-x$来替换x，z表示初始盈余与阈值边界之间的距离，并定义

$$H\left(z,b\right)=V\left(b-z,b\right),\ 0\le z\le b.\tag{23}$$

初始条件为$H\left(0,b\right)=V\left(b,b\right)$，边界条件为$H\left(b,b\right)=0$。(22)式可变为

$$\begin{aligned}&\frac{\sigma^2}{2}H_{zz}\left(z,b\right)-c_1H_z\left(z,b\right)-\left(\lambda+\delta\right)H\left(z,b\right)+\lambda_1\int_0^{z}H\left(y,b\right)P_U\left(z-y\right)\mathrm{d}y\\&+\lambda_1\left\{\frac{\eta\left(c_2-c_1\right)}{\delta}\left(1-F_U\left(u\right)\right)+\left[H\left(0,b\right)-\frac{\eta\left(c_2-c_1\right)}{\delta}\right]\int_z^{\infty}\mathrm{e}^{\overline{R}_\delta(u-z)}\mathrm{d}F_U\left(u\right)\right\}\\&+\lambda_2\int_0^{z}H\left(y,b\right)P_V\left(z-y\right)\mathrm{d}y+\lambda_2\left\{\frac{\eta\left(c_2-c_1\right)}{\delta}\left(1-F_V\left(v\right)\right)\right.\\&\left.+\left[H\left(0,b\right)-\frac{\eta\left(c_2-c_1\right)}{\delta}\right]\int_z^{\infty}\mathrm{e}^{\overline{R}_\delta(u-z)}\mathrm{d}F_V\left(v\right)\right\}=0.\end{aligned}\tag{24}$$

将(24)的定义域扩展为$z\ge 0$，用w来表示的解，则w满足

$$
\begin{aligned}
&\frac{\sigma^2}{2}w''(z)-c_1w'(z)-(\lambda+\delta)w(z)+\lambda_1\int_0^z w(y)P_U(z-y)\mathrm{d}y \\
&+\lambda_1\left\{\frac{\eta(c_2-c_1)}{\delta}\left(1-F_U(u)\right)+\left[w(0)-\frac{\eta(c_2-c_1)}{\delta}\right]\int_z^\infty \mathrm{e}^{\bar{R}_\delta(u-z)}\mathrm{d}F_U(u)\right\} \\
&+\lambda_2\int_0^z w(y)P_V(z-y)\mathrm{d}y+\lambda_2\left\{\frac{\eta(c_2-c_1)}{\delta}\left(1-F_V(v)\right)\right. \\
&\left.+\left[w(0)-\frac{\eta(c_2-c_1)}{\delta}\right]\int_z^\infty \mathrm{e}^{\bar{R}_\delta(u-z)}\mathrm{d}F_V(v)\right\}=0.
\end{aligned} \tag{25}
$$

并且 $w(0)=V(b,b)$， $w(b)=0$ 。

令 $\hat{w}$， $\hat{P}_U$ 和 $\hat{P}_V$ 分别表示 w， P_U 和 P_V 的 Laplace 变换。对上式中 $w(z)$， $P_U(u)$ 和 $P_V(v)$ 均做 Laplace 变换，可得

$$
\begin{aligned}
&\frac{\sigma^2\xi^2}{2}\hat{w}(\xi)-\frac{\sigma^2\xi}{2}w(0)-\frac{\sigma^2}{2}w'(0)-c_1\xi\hat{w}(\xi)+c_1w(0) \\
&-(\lambda+\delta)\hat{w}(z)+\lambda_1\hat{w}(\xi)\hat{P}_U(\xi)+\frac{\lambda_1\eta(c_2-c_1)}{\delta}\frac{1-\hat{P}_U(\xi)}{\xi} \\
&+\lambda_1\left[w(0)-\frac{\eta(c_2-c_1)}{\delta}\right]\frac{\hat{P}_U(-\bar{R}_\delta)-\hat{P}_U(\xi)}{\xi+\bar{R}_\delta}+\lambda_2\hat{w}(\xi)\hat{P}_v(\xi) \\
&+\frac{\lambda_2\eta(c_2-c_1)}{\delta}\frac{1-\hat{P}_v(\xi)}{\xi}+\lambda_2\left[w(0)-\frac{\eta(c_2-c_1)}{\delta}\right]\frac{\hat{P}_v(-\bar{R}_\delta)-\hat{P}_v(\xi)}{\xi+\bar{R}_\delta}=0,
\end{aligned}
$$

其中， ξ 是 Laplace 变换参数。可解得

$$
\hat{w}(\xi)=\frac{f(\xi)}{\frac{\sigma^2\xi^2}{2}-c_1\xi-(\lambda+\delta)+\lambda_1\hat{P}_U+\lambda_2\hat{P}_V}, \tag{26}
$$

其中，

$$
\begin{aligned}
f(\xi)=&-\frac{\lambda_1\eta(c_2-c_1)}{\delta}\frac{1-\hat{P}_U(\xi)}{\xi}-\lambda_1\left[w(0)-\frac{\eta(c_2-c_1)}{\delta}\right]\frac{\hat{P}_U(-\bar{R}_\delta)-\hat{P}_U(\xi)}{\xi+\bar{R}_\delta} \\
&-\frac{\lambda_2\eta(c_2-c_1)}{\delta}\frac{1-\hat{P}_v(\xi)}{\xi}-\lambda_2\left[w(0)-\frac{\eta(c_2-c_1)}{\delta}\right]\frac{\hat{P}_v(-\bar{R}_\delta)-\hat{P}_v(\xi)}{\xi+\bar{R}_\delta} \\
&+\frac{\sigma^2\xi}{2}w(0)+\frac{\sigma^2}{2}w'(0)-c_1w(0).
\end{aligned}
$$

由 $w(0)=V(b,b)$ 和 $w'(0)=V_x(b,b)$ 可解得 $V(x,b)$ 和 b 。过程如下：对(26)式求逆得到 $w(z)$， 由 $w(b)=0$ 可解得 b 值，最后代换得到当 $0\le x\le b$ 时， $V(x,b)=w(b-x)$ 。

5. 求解最优策略

本部分主要是求解阈值策略下的最优边界。在初始准备金为 x 的条件下，我们需要找到最优的边界 b^* 使得到破产时刻分红现值的期望 $V(x,b)$ 最大化。故 $V(x,b)$ 必满足

$$
\left.\frac{\partial V(x,b)}{\partial b}\right|_{b=b^*}=0. \tag{27}
$$

若我们微分 $V_x(b-,b)=V_x(b+,b)$，可以得到另外一个恒等式

$$V_{xx}(b-,b)+\left.\frac{\partial^2 V(x,b)}{\partial x\partial b}\right|_{b=b-}=V_{xx}(b+,b)+\left.\frac{\partial^2 V(x,b)}{\partial x\partial b}\right|_{b=b+}.$$

由(27)可知当 $b=b^*$ 时上式两侧第二部分变为零。得

$$V_{xx}(b^*-,b^*)=V_{xx}(b^*+,b^*).$$

因此 $V_{xx}(x,b^*)$ 在点 b^* 是连续的。由注 1 可得

$$V_x(b^*,b^*)=V_x(b^*-,b^*)=V_x(b^*+,b^*)=\eta.$$

由定理 2 知

$$V_x(x,b)=-\frac{\eta(c_2-c_1)}{\delta}\bar{R}_\delta e^{\bar{R}_\delta(x-b)}+\bar{R}_\delta e^{\bar{R}_\delta(x-b)}V(b,b),$$

所以

$$V_x(b^*,b^*)=-\frac{\eta(c_2-c_1)}{\delta}\bar{R}_\delta+\bar{R}_\delta V(b^*,b^*)=\eta,$$

故

$$V(b^*,b^*)=\eta\left(\frac{c_2-c_1}{\delta}+\frac{1}{\bar{R}_\delta}\right). \tag{28}$$

(28)式是进行 Laplace 变换非常关键的一个条件，它等价于 $H(0,b^*)=\eta\left(\frac{c_2-c_1}{\delta}+\frac{1}{\bar{R}_\delta}\right)$。在(26)式中给出了 $w(0)=\eta\left(\frac{c_2-c_1}{\delta}+\frac{1}{\bar{R}_\delta}\right)$ 和 $w'(0)=\eta$ 这两个条件，进而可由 $\hat{w}(\xi)$ 求逆得 $w(z)$。b^* 由 $w(z)=0$ 可解得，且当 $0\le x\le b^*$ 时有 $V(x,b^*)=w(b^*-x)$，又由定理 2 可求当 $x\ge b$ 时 $V(x,b)$ 的表达式。

基金项目

国家自然科学基金(11301133; 11471218)。

参考文献 (References)

[1] Chan, W., Yang, H. and Zhang, L. (2003) Some Results on Ruin Probabilities in a Two-Dimensional Risk Model with Capital Injection. *Insurance*: *Mathematics and Economics*, **32**, 345-358. https://doi.org/10.1016/S0167-6687(03)00115-X

[2] Avram, F., Palmowski, Z. and Pistorius, M. (2007) A Two-Dimensional Ruin Problem on the Positive Quadrant. *Insurance*: *Mathematics and Economics*, **42**, 227-234. https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2007.02.004

[3] Avram, F., Palmowsk, I.Z. and Pistorius, M. (2008) Exit Problem of a Two-Dimensional Risk Process from the Quadrant: Exact and Asymptotic Results. *Annals of Applied Probability*, **18**, 2421-2449. https://doi.org/10.1214/08-AAP529

[4] Czarna, I. and Palmowski, Z. (2009) De Finetti's Dividend Problem and Impulse Control for a Two-Dimensional Insurance Risk Process. *Stochastic Models*, **27**, 220-250. https://doi.org/10.1080/15326349.2011.567930

[5] Zhang, S. and Liu, G. (2012) Optimal Dividend Payments of the Two-dimensional Compound Poisson Risk Model with Capital Injection. *Operations Research Transactions*, **16**, 119-131.

[6] Avanzi, B. and Gerber, H.U. (2007) Optimal Dividends in the Dual Model. *Insurance*: *Mathematics and Economics*, **41**, 111-123. https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2006.10.002

知网检索的两种方式：

1. 打开知网页面 http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD
   下拉列表框选择：[ISSN]，输入期刊 ISSN：2325-2251，即可查询
2. 打开知网首页 http://cnki.net/
   左侧“国际文献总库”进入，输入文章标题，即可查询

投稿请点击：http://www.hanspub.org/Submission.aspx
期刊邮箱：sa@hanspub.org