

Robust Portfolio Selection with GARCH-EVT-Copula

Jiatao Lu

School of Mathematics and Statistics, Beijing Institute of Technology, Beijing
Email: 995817247@qq.com

Received: Feb. 5th, 2018; accepted: Feb. 20th, 2018; published: Feb. 28th, 2018

Abstract

In this paper, a robust portfolio model is established under the assumption that the underlying distribution is mixed and uncertain. Firstly, we use the GARCH-EVT model to describe the fat tail and heteroscedasticity characteristics of single financial asset return. Then we use Copula to describe the dependence structure between the yields, and establish the GARCH-EVT-Copula model. Finally, a mixture of uncertain multivariate distributions of returns is constructed using different Copula functions, and a robust portfolio model of GARCH-EVT-Copula-WCVaR is established on the basis of WCVaR-Copula robust model. Compared to the Normal-Copula-WCVaR robust model and the classical mean variance model in the experimental study, the return of GARCH-EVT-Copula-WCVaR robust model is higher than that of Normal-Copula-WCVaR robust model and mean variance model during the stock market crisis and the period when the volatility of return fluctuates.

Keywords

CVaR, GARCH, EVT, Copula, Robust Portfolio

基于GARCH-EVT-Copula的WCVaR鲁棒投资组合模型

陆家涛

北京理工大学数学与统计学院, 北京
Email: 995817247@qq.com

收稿日期: 2018年2月5日; 录用日期: 2018年2月20日; 发布日期: 2018年2月28日

摘要

本文在多种金融资产的收益率服从混合不确定多元分布的假设下, 建立鲁棒投资组合模型。首先, 使用

GARCH-EVT模型描述单一金融资产收益率分布的厚尾、异方差特征,然后运用Copula理论描述多个收益率之间的相依结构,建立了描述多种金融资产收益率分布的GARCH-EVT-Copula模型。最后,运用不同的Copula函数构建了收益率的混合不确定多元分布集合,并在WCVaR-Copula鲁棒投资组合模型基础上,建立了GARCH-EVT-Copula-WCVaR鲁棒投资组合模型。通过与经典的均值方差模型、以正态分布刻画边缘分布的Normal-Copula-WCVaR鲁棒模型的实证比较,可以发现,在股价出现极端情况的股灾期间和收益率大幅波动期间,GARCH-EVT-Copula-WCVaR鲁棒模型所建立的投资组合的回报都要高于均值方差模型和Normal-Copula-WCVaR鲁棒模型。

关键词

CVaR, GARCH, EVT, Copula理论, 鲁棒投资组合

Copyright © 2018 by author and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

1952年Markowitz提出的均值方差模型奠定了现代投资组合理论的基础,在资产配置领域取得了广泛的应用。但是,该模型存在对参数估计非常敏感的不足,Black与Litterman(1992)[1]指出在使用均值方差投资组合模型时,投资组合策略对收益率均值十分敏感。为了降低投资组合模型对参数估计的敏感性,鲁棒优化被引入到投资组合理论中。鲁棒优化是解决带有不确定参数决策问题的一种有效方法,通过构建参数分布的不确定集合,将未来的各种不确定性在预先指定的置信水平下加以定量描述,使得决策结果更平稳,从而降低模型对输入参数扰动的敏感性[2]。

在鲁棒投资组合领域,往往通过构建资产收益率的不确定分布来建立鲁棒投资组合模型。Zhu和Fukushima(2009)[3]在资产收益率服从混合不确定分布的假设下,通过对不确定参数给出箱型与椭球型不确定集合,建立了使得最坏情形下的CVaR(worst case CVaR)取最优的鲁棒投资组合模型。Kakouris和Rustem(2014)[4]研究了混合Copula分布不确定集下的CVaR及WCVaR,并建立了相应的鲁棒投资组合模型,但是该模型没有考虑金融资产收益的厚尾、异方差的特征,建立的收益率混合不确定分布并不能有效地对收益率进行描述。

本文在多种金融资产收益率服从混合不确定多元分布的假设下建立鲁棒投资组合模型。首先,运用GARCH-EVT模型描述单一金融资产收益率分布的厚尾、异方差特征。极值理论主要研究金融资产收益的尾部分布,可以很好的描述收益分布的非正态厚尾特征。同时,GARCH模型在刻画金融资产收益率的异方差方面得到了广泛应用。利用极值理论处理极端情形的优势,并结合GARCH模型描述单个金融资产收益率的异方差特征,可以实现对单一金融资产收益率分布的有效描述。Bali和Neftci(2003)[5]运用GARCH-EVT模型研究短期利率,表明此模型得到的VaR值比GARCH-t分布得到的VaR更精确。刘志东(2007)[6]运用极值理论和GARCH模型对金融资产收益的厚尾及随时间序列动态变化特点进行描述,建立了基于EVT-GARCH的VaR度量方法。

其次,运用Copula理论描述多种金融资产收益率之间的非对称性和尾部非线性相关性。基于Copula理论构建的多元分布函数,可以有效描述随机变量之间的相关程度,并且能够反映它们之间的相依结构。Jondeau和Rockinger[7]把GARCH模型和Copula结合,动态地对金融变量间的相依性和风险加以研究。

将 GARCH 模型、EVT 以及 Copula 理论结合起来，建立 Copula-GARCH-EVT 模型可以有效捕捉金融资产收益率的厚尾、异方差以及收益率之间的非对称、非线性相关的特点。李秀敏、史道济(2007) [8] 构建了 Copula-GARCH-EVT 模型，刻画上海、深圳股票市场收益率序列的厚尾、波动聚集特点以及序列间的相依结构。张进滔(2007) [9] 基于 GARCH-EVT 方法和 Copula 函数用参数法与非参数法对上证四大板块指数进行了实证分析，并计算了投资组合的 VaR 和 CVaR。

综上，本文将运用 GARCH-EVT 模型刻画单一金融资产的收益率分布，捕捉金融资产收益分布的厚尾、异方差特征；同时通过 Copula 理论建立金融资产收益率的多元分布，捕捉金融资产收益率之间的非对称、非线性特征。最后，通过使用不同的 Copula 函数构建收益率的混合不确定多元分布集合，并在 WCVaR 理论框架下使得最坏情况下的 CVaR 达到最小来建立鲁棒投资组合模型。

2. 单一金融资产收益率分布的 GARCH-EVT 模型

2.1. GARCH 模型

GARCH 模型由条件均值方程和条件方差方程组成。GARCH(p,q)模型的一般结构如下：

$$\begin{cases} r_t = \mu_t + \varepsilon_t \\ \varepsilon_t = \sigma_t \cdot z_t \\ \sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i \sigma_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \varepsilon_{t-j}^2 \\ \alpha_0 > 0, \alpha_i \geq 0, \beta_j \geq 0, \sum \alpha_i + \beta_j < 1 \end{cases} \quad (1)$$

其中， μ_t 为 t 时刻的均值方程，一般采用 ARMA(m,n)模型， z_t 是独立同分布变量，表示新息过程。各种 GARCH 模型的区别通常在于条件方差方程采取的形式不同或者是对 z_t 的分布假设不同，通常假设 z_t 服从正态分布或学生 t 分布。为了刻画金融资产收益的厚尾特征，本文采用极值分布来描述 z_t 。

2.2. EVT 模型

假设随机变量序列 x_1, x_2, \dots, x_n 独立同分布，来自于同一个未知分布 F ，用 u 表示某一充分大的阈值。假定大于 u 的样本个数为 N_u ， X_1, X_2, \dots, X_n 表示大于阈值 u 的样本观测值， Y_1, Y_2, \dots, Y_n 表示相应的超额差值， $Y_i = X_i - u (i=1, 2, \dots, N_u)$ ，定义 F_u 为大于阈值 u 的随机变量的差额损失分布，则

$$F_u(y) = Pr(X - u < y | X > u) = \frac{F(u+y) - F(u)}{1 - F(u)} = \frac{F(x) - F(u)}{1 - F(u)}$$

由 Pickands 定理，对于充分大的阈值 u ，令 $y = x - u$ ，则超额损失分布函数 $F_u(y)$ 收敛于如下的广义 Pareto 分布：

$$G_{\xi, \beta}(y) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \frac{\xi}{\beta} y\right)^{-\frac{1}{\xi}}, & \xi \neq 0 \\ 1 - \exp\left(-\frac{y}{\beta}\right), & \xi = 0 \end{cases}$$

其中， ξ 是形状参数， β 是尺度参数。

2.3. GARCH-EVT 模型

本文使用对数收益率来表示金融资产的收益， $R_{i,t} = \ln P_{i,t} - \ln P_{i,t-1}$ ，其中 $P_{i,t}$ 和 $R_{i,t}$ 分别表示第 i 种资产在 t 时刻的价格和收益率。

使用 GARCH-EVT 模型刻画第 i 种资产的收益率分布，首先，根据对数收益率序列 $(R_{i,t-m+1}, \dots, R_{i,t-1}, R_{i,t})$ 建立 ARMA-GARCH 模型，得到条件均值序列的估计值 $(\hat{\mu}_{i,t-m+1}, \dots, \hat{\mu}_{i,t-1}, \hat{\mu}_{i,t})$ 和条件标准差序列的估计值 $(\hat{\sigma}_{i,t-m+1}, \dots, \hat{\sigma}_{i,t-1}, \hat{\sigma}_{i,t})$ 。由 GARCH 模型(1)可以得到新息序列：

$$(z_{i,t-m+1}, \dots, z_{i,t-1}, z_{i,t}) = \left(\frac{R_{i,t-m+1} - \hat{\mu}_{i,t-m+1}}{\hat{\sigma}_{i,t-m+1}}, \dots, \frac{R_{i,t-1} - \hat{\mu}_{i,t-1}}{\hat{\sigma}_{i,t-1}}, \frac{R_{i,t} - \hat{\mu}_{i,t}}{\hat{\sigma}_{i,t}} \right)$$

其次，采用两端服从 GDP 分布，中间服从标准正态分布的形式来拟合新息序列。

$$F(z) = \begin{cases} \frac{T_{u^L}}{T} \left\{ 1 + \xi^L \frac{u^L - z}{\beta^L} \right\}^{-\frac{1}{\xi^L}}, & z < u^L \\ \Phi(z), & u^L \leq z \leq u^R \\ 1 - \frac{T_{u^R}}{T} \left\{ 1 + \xi^R \frac{z - u^R}{\beta^R} \right\}^{-\frac{1}{\xi^R}}, & z > u^R \end{cases} \quad (2)$$

其中， ξ^L 是左尾形状参数， β^L 是左尾尺度参数， u^L 是左尾阈值， T_{u^L} 为低于左尾阈值的样本数， ξ^R 是右尾形状参数， β^R 是右尾尺度参数， u^R 是右尾阈值， T_{u^R} 为高于右尾阈值的样本数， $\Phi(z)$ 表示标准正态分布的分布函数。

3. 多种金融资产收益率分布的 GARCH-EVT-Copula 模型

3.1. Copula 函数

Copula 函数可以分为椭圆族 Copula 和阿基米德族 Copula。椭圆族 Copula 包括正态 Copula 函数以及 t-Copula 函数。椭圆 Copula 适合描述具有对称相依结构的数据，但是在金融领域，许多金融数据表现出非对称、非线性相关的特点。Genest 和 Mackay (1986) [10] 提出的阿基米德 Copula 函数可以有有效的捕捉多元分布中的非对称非线性相依结构。阿基米德 Copula 函数包括 Frank Copula、Gumbel Copula 以及 Clayton Copula。Frank Copula 函数具有对称性，它无法捕捉到随机变量间的非对称相关；Gumbel Copula 对变量在分布上尾部的变化十分敏感，能够快速捕捉到上尾相关的变化，但对在下尾部的变化不敏感；Clayton Copula 对变量在分布下尾部的变化十分敏感，能够快速捕捉到下尾相关的变化。

3.2. GARCH-EVT-Copula 模型

利用 GARCH-EVT 模型(1)、(2)对投资组合中各金融资产的对数收益率分别构建边缘分布 $F_i(z_i)$ ，然后根据金融资产的相依结构，选择合适的 Copula 函数 $c(\cdot)$ ，构建多种资产收益率的联合分布 $F(z_1, \dots, z_n) = c(F_1(z_1), \dots, F_n(z_n))$ 。

4. GARCH-EVT-Copula 下的鲁棒投资组合模型

本文通过 GARCH-EVT-Copula 模型刻画多种金融资产收益率的多元分布，然后运用不同的 Copula 函数构建资产收益分布的混合不确定集合，在 WCVAR 鲁棒投资组合模型基础上建立稳健的投资组合模型。

令 $\mathbf{x} \in R^n$ 表示随机收益率向量， $\mathbf{w} \in R^n$ 表示决策向量， $f(\mathbf{w}, \mathbf{x})$ 表示相应的损失函数。假设 \mathbf{x} 服从密度函数为 $p(\cdot)$ 的连续分布。

给定决策向量 $\mathbf{w} \in \mathbf{W}$ ，损失 $f(\mathbf{w}, \mathbf{x})$ 不超过阈值 α 的概率为

$$\Psi(\mathbf{w}, \alpha) \triangleq \int_{f(\mathbf{w}, \mathbf{x}) \leq \alpha} p(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

对于固定的决策向量 $\mathbf{w} \in \mathbf{W}$ 及置信水平 β ，用 $VaR_\beta(\mathbf{w})$ 及 $CVaR_\beta(\mathbf{w})$ 表示相应的风险度量 VaR 与 CVaR，则

$$VaR_\beta(\mathbf{w}) \triangleq \min \{ \alpha \in R : \Psi(\mathbf{w}, \alpha) \geq \beta \}$$

$$CVaR_\beta(\mathbf{w}) \triangleq \frac{1}{1-\beta} \int_{f(\mathbf{w}, \mathbf{x}) \geq VaR_\beta(\mathbf{w})} f(\mathbf{w}, \mathbf{x}) p(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

Rockafellar 和 Uryasev (2003) [11]证明了对于 CVaR 的计算可以由如下公式代替：

$$F_\beta(\mathbf{w}, \alpha) \triangleq \alpha + \frac{1}{1-\beta} \int_{x \in R^n} [f(\mathbf{w}, \mathbf{x}) - \alpha]^+ p(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \tag{3}$$

$$CVaR_\beta(\mathbf{w}) = \min_{\alpha \in R} F_\beta(\mathbf{w}, \alpha)$$

Kakouris 和 Rustem (2014) [4]研究了用 Coupla 理论构建的多元分布下的 VaR 和 CVaR，有如下结论：

结论 1: 设随机向量 $\mathbf{u} \in [0,1]^n$ ， $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (F_1(x_1), \dots, F_n(x_n))$ 表示边缘累计分布的集合，令 $\mathbf{u} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ ，损失函数为 $\tilde{f}(\mathbf{w}, \mathbf{u})$ ，假设 \mathbf{u} 服从 Copula 密度函数为 $c(\cdot)$ 的连续分布。则对于置信度为 β 的 VaR 及 CVaR 定义为

$$VaR_\beta(\mathbf{w}) \triangleq \min \{ \alpha \in R : c(\mathbf{u} | \tilde{f}(\mathbf{w}, \mathbf{u}) \leq \alpha) \geq \beta \}$$

$$CVaR_\beta(\mathbf{w}) \triangleq \frac{1}{1-\beta} \int_{\tilde{f}(\mathbf{w}, \mathbf{u}) \geq VaR_\beta(\mathbf{w})} \tilde{f}(\mathbf{w}, \mathbf{u}) c(\mathbf{u}) d\mathbf{u}$$

所以，根据(3)式，求 $CVaR_\beta(\mathbf{w})$ 可简化为求解如下最小化问题：

$$Y_\beta(\mathbf{w}, \alpha) = \alpha + \frac{1}{1-\beta} \int_{\mathbf{u} \in I^n} [\tilde{f}(\mathbf{w}, \mathbf{u}) - \alpha]^+ c(\mathbf{u}) d\mathbf{u}$$

$$CVaR_\beta(\mathbf{w}) = \min_{\alpha \in R} Y_\beta(\mathbf{w}, \alpha)$$

本文使用 GARCH-EVT 模型来刻画收益率的边缘分布， $\mathbf{u} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) = (F_1(x_1), \dots, F_n(x_n))$ ，其中 $F_i(x_i)$ 表示由 GARCH-EVT 模型(2)描述的第 i 种资产的收益率分布；然后假设 Copula 函数 $c(\mathbf{u})$ 属于一个 Copula 函数集合 $C = (c_1(\mathbf{u}), \dots, c_l(\mathbf{u}))$ ，通过不同的 Copula 函数 $c_i(\mathbf{u})$ 建立相应的 GARCH-EVT-Copula 模型得到刻画收益率的混合不确定多元分布集合 $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ 。通过使此不确定集合下的风险度量 CVaR 在最坏情况 (worst-case CVaR) 下达到最优，建立鲁棒投资组合模型。

描述资产收益率向量 \mathbf{x} 的混合不确定多元分布集合 $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ ：

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}) \triangleq \left\{ \sum_{i=1}^l \lambda_i c_i(\mathbf{F}(\mathbf{x})) : \boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_l) \in \boldsymbol{\Lambda}, c_i \in C, i = 1, \dots, l \right\}$$

其中 $\boldsymbol{\Lambda} = \{ \boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_l) | \sum_{i=1}^l \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0 \}$ 。

所以，在混合不确定多元分布集合 $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ 下的风险度量 CVaR 有如下形式：

$$CVaR_\beta(\mathbf{w}) = \min_{\alpha \in R} Y_\beta(\mathbf{w}, \alpha)$$

$$Y_\beta(\mathbf{w}, \alpha) = \alpha + \frac{1}{1-\beta} \int_{\mathbf{u} \in I^n} [\tilde{f}(\mathbf{w}, \mathbf{u}) - \alpha]^+ \sum_{i=1}^l \lambda_i c_i(\mathbf{u}) d\mathbf{u} = \sum_{i=1}^l \lambda_i Y_\beta^i(\mathbf{w}, \alpha)$$

当收益率的分布是不确定的，可以通过定义不确定分布下最坏的 CVaR (worst-case CVaR) 来建立鲁

棒投资组合模型。根据 Zhu 和 Fukushima (2009) [3]及 Kakouris 和 Rustem (2014) [4]的研究, 有如下定义及结论。

定义: 对于 Copula 函数集合 C 、置信度 β 及固定的决策向量 $\mathbf{w} \in W$, 定义 WCVaR:

$$WCVaR_{\beta}(\mathbf{w}) \triangleq \sup_{c(\cdot) \in C} CVaR_{\beta}(\mathbf{w})$$

结论 2: 对于任意的 \mathbf{w} 及不确定分布集合 $H(\mathbf{x})$,

$$WCVaR_{\beta}(\mathbf{w}) = \min_{a \in R} \max_{\lambda \in \Lambda} Y_{\beta}(\mathbf{w}, \alpha)$$

所以, 在混合不确定集合 $H(\mathbf{x})$ 下最小化 $WCVaR_{\beta}(\mathbf{w})$ 的鲁棒投资组合模型为:

$$\min_{\mathbf{w} \in W} WCVaR_{\beta}(\mathbf{w}) = \min_{\mathbf{w} \in W} \min_{a \in R} \max_{\lambda \in \Lambda} Y_{\beta}(\mathbf{w}, \alpha)$$

该模型可以简化成如下形式:

$$\min_{(\mathbf{w}, \alpha, \theta) \in W \times R \times R} \left\{ \theta : \sum_{i=1}^l \lambda_i Y_{\beta}^i(\mathbf{w}, \alpha) \leq \theta, \lambda \in \Lambda \right\}$$

Zhu 和 Fukushima (2009) [3]证明了上述模型可以进一步简化为如下形式:

$$\min_{(\mathbf{w}, \alpha, \theta) \in W \times R \times R} \left\{ \theta : Y_{\beta}^i(\mathbf{w}, \alpha) \leq \theta, i = 1, \dots, l \right\} \quad (4)$$

综上, 在 Zhu 和 Fukushima (2009) [3]建立的 WCVaR 下的鲁棒投资组合模型框架下, 本文由 GARCH-EVT 模型刻画边缘分布, 在 Copula 函数属于一个不确定集合的 C 时, 由模型(4)并运用蒙特卡洛方法可得到在混合不确定多元分布集合 $H(\mathbf{x})$ 下的 GARCH-EVT-Copula-WCVaR 鲁棒模型:

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{w} \in R^n, \mathbf{v} \in R^l, \alpha \in R, \theta \in R} \theta \\ & s.t. \mathbf{w} \in W, \mathbf{v} \in R^m, \alpha \in R, \theta \in R \\ & \alpha + \frac{1}{S^i(1-\beta)} (\mathbf{1}^i)^T \mathbf{v}^i \leq \theta, i = 1, \dots, l \\ & v_k^i \geq \tilde{f}(\mathbf{w}, \mathbf{u}_k^i) - \alpha, k = 1, \dots, S^i, i = 1, \dots, l \\ & v_k^i \geq 0, k = 1, \dots, S^i, i = 1, \dots, l \end{aligned}$$

其中 \mathbf{u}_k^i 表示从第 i 个 Copula 函数 c_i 建立的多元分布中抽取的第 k 个样本, $\mathbf{v} = (\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^l) \in R^m$, $m = \sum_{i=1}^l S^i$, $\mathbf{1}^i = (1, \dots, 1) \in R^{S^i}$, W 表示决策向量的限制集合, $W = \{ \mathbf{e}^T \mathbf{w} = 1, w_i \geq 0, \mathbf{E}(\mathbf{u}^T \mathbf{w}) \geq \gamma \}$, 其中 γ 表示最小的要求回报。

5. 实证研究

5.1. 数据

本文从 Wind 数据库中提取 2004/1/1 至 2016/12/30 共 3158 个交易日的上证 180 指数的能源行业指数和工业行业指数数据, 构建二元投资组合, 图 1 为两种指数在样本期的走势图。使用 2004/1/2 至 2014/12/31 的对数收益率数据作为训练样本, 使用 2015/1/5 至 2016/12/30 的对数收益率数据作为验证样本。训练样本数据包括 2008 年上证综指从 5272 点跌至 1850 点的股灾时期, 验证样本数据中包含 2015 年下半年上证综指从 5178 点跌至 3539 点的股灾时期。从图 2 中可以发现, 在 2008 年和 2015 年日对数收益率序列

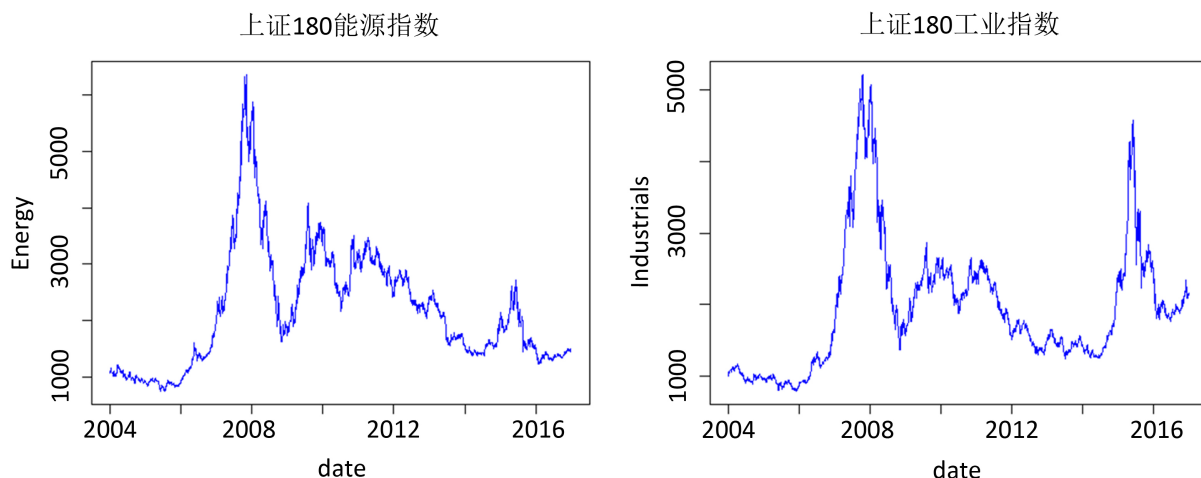


Figure 1. SSE 180's energy and industrial industry index data
图 1. 上证 180 的能源和工业行业指数数据

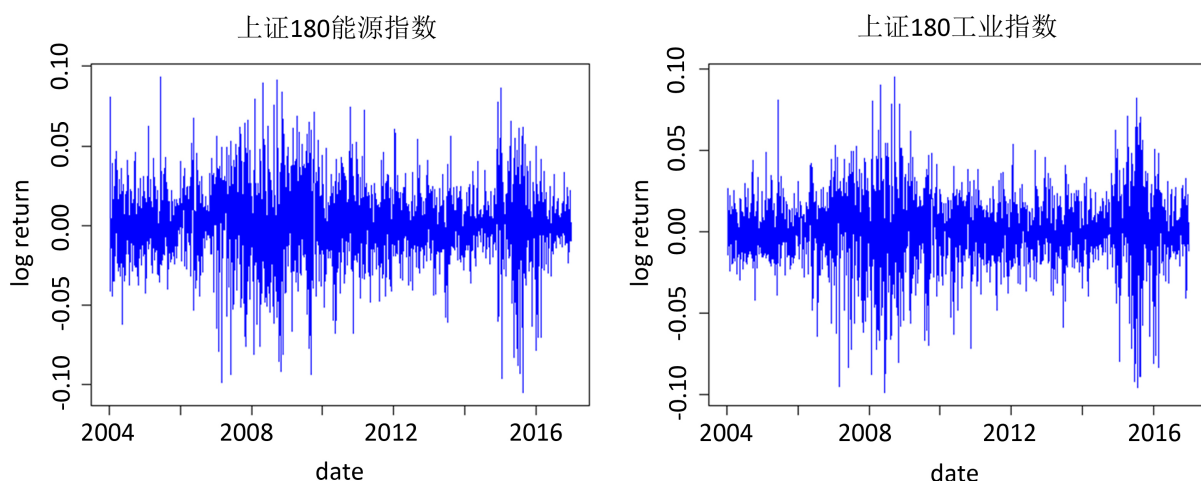


Figure 2. The log-return on the energy and industry index of SSE 180
图 2. 上证 180 的能源和工业行业指数日对数收益率

波动明显增大，展现出了异方差的特点。

表 1 列出了能源和工业行业指数日对数收益率的描述统计量以及正态分布的 Jarque-Bera 检验结果。从表中的数据可知，对于全样本、训练样本以及验证样本，两种行业指数的日对数收益率都是尖峰的，而且 Jarque-Bera 检验拒绝了序列服从正态分布的假设。

5.2. 实证结果

为了检验本文建立的以 GARCH-EVT 为边际分布的 GARCH-EVT-Copula MCVaR 鲁棒模型 (G-E-Copula-WCVaR) 的效果，我们使用经典的均值方差模型 (MV-Model) 和以正态分布为边际分布的 Normal-Copula WCVaR 鲁棒模型 (N-Copula-WCVaR) 作为对照，比较三种模型的累计对数收益率。在两种鲁棒投资组合模型中，本文使用 t-Copula、Gumbel Copula 以及 Clayton Copula 来构建资产收益率的混合不确定二元分布集合，并进行 2000 次模拟实验。关于权重向量的限制集合 W ，本文不允许卖空。

5.2.1. 静态投资组合策略

静态投资组合策略以训练样本 (2004/1/2~2014/12/31) 建立投资组合模型，得到相应的投资组合权重，

Table 1. The descriptive statistics and JB test of the diurnal log-yield
表 1. 日对数收益率序列的描述统计量及 JB 检验

	行业	均值	标准差	峰度	Jarque-Bera
全样本期 2004/1/2~2016/12/30	能源	0.0001	0.0213	5.756	0.0000
	工业	0.0002	0.0199	6.461	0.0000
训练样本期 2004/1/2~2014/12/31	能源	0.0002	0.0209	5.366	0.0000
	工业	0.0003	0.0186	6.250	0.0000
验证样本期 2015/1/5~2016/12/30	能源	-0.0006	0.0230	6.955	0.0000
	工业	-0.0002	0.0258	5.483	0.0000

并在整个验证期(2015/1/5~2016/12/30)固定该投资组合权重不变。

上证 180 能源行业指数收益率分布的 GARCH-EVT 模型:

$$\begin{cases} r_{1,t} = -0.0313r_{1,t-1} - 0.0311r_{1,t-2} - 0.0048r_{1,t-3} + 0.0336r_{1,t-4} + 0.0714\epsilon_{1,t-1} + \epsilon_{1,t} \\ \epsilon_{1,t} = \sigma_{1,t} \cdot z_{1,t}, z_{1,t} \sim F_1(z) \\ \sigma_{1,t}^2 = 0.0575\sigma_{1,t-1}^2 + 0.9338\epsilon_{1,t-1}^2 \end{cases}$$

$$F_1(z) = \begin{cases} 0.0959 \cdot \left(1 - 0.1629 \cdot \frac{-1.2076 - z}{0.7225}\right)^{\frac{1}{0.1629}}, & z < -1.2076 \\ \Phi(z), & -1.2076 \leq z \leq 1.2172 \\ 0.9000 \cdot \left(1 + 0.0325 \cdot \frac{z - 1.2172}{0.6157}\right)^{\frac{1}{0.0325}}, & z > 1.2172 \end{cases}$$

上证 180 工业行业指数收益率分布的 GARCH-EVT 模型:

$$\begin{cases} r_{2,t} = -0.6649r_{2,t-1} + 0.0018r_{2,t-2} + 0.7050\epsilon_{2,t-1} + \epsilon_{2,t} \\ \epsilon_{2,t} = \sigma_{2,t} \cdot z_{2,t}, z_{2,t} \sim F_2(z) \\ \sigma_{2,t}^2 = 0.0558\sigma_{2,t-1}^2 + 0.9352\epsilon_{2,t-1}^2 \end{cases}$$

$$F_2(z) = \begin{cases} 0.0997 \cdot \left(1 + 0.0825 \cdot \frac{-1.2190 - z}{0.5814}\right)^{\frac{1}{0.0825}}, & z < -1.2190 \\ \Phi(z), & -1.2190 \leq z \leq 1.2074 \\ 0.9003 \cdot \left(1 + 0.0184 \cdot \frac{z - 1.2074}{0.5169}\right)^{\frac{1}{0.0184}}, & z > 1.2074 \end{cases}$$

从表 2 中三种模型结果的比较来看, 三种模型在收益及夏普比率上没有明显差异, 而且在测试期间发生了股灾的极端情况, 三种模型的日均收益率和累计收益率均为负。考虑到静态投资组合策略没有及时对组合权重进行调整, 不能充分体现出模型间的差异, 下面, 本文将构建动态的投资组合策略对三种不同模型进行比较分析。

5.2.2. 动态投资组合策略

动态投资组合策略在验证期间的每一交易日结束后, 将该日数据加入到训练样本中, 滚动地建立投资组合模型, 共得到 488 个交易日的每日投资组合权重。

图 3 给出了三种不同模型所构建的动态投资组合在验证期 2015~2016 年的累计回报率，GARCH-EVT-Copula-WCVaR 鲁棒模型的累计收益率要明显高于 Normal-Copula-WCVaR 模型和 MV-Model；由于鲁棒模型的保守性，在 2015 上半年的牛市中，两种鲁棒模型的累计收益率均未超过经典的均值方差模型的累计收益率；由于鲁棒模型稳健性，在包含 2015 年下半年股灾的整个测试期间，两种鲁棒模型的回报都高于经典的均值方差模型，且 GARCH-EVT-Copula-WCVaR 模型的累计对数收益率最大。

表 3 给出了三种模型所建立的动态投资组合的收益情况,从平均收益、总收益率、95%的 VaR 及夏普比率比较，GARCH-EVT-Copula-WCVaR 鲁棒模型都是最优的。

图 4 给出了股灾期间 GARCH-EVT-Copula-WCVaR 鲁棒模型和 Normal-Copula-WCVaR 鲁棒模型的累计收益率。从图 4 中可以看出，2015 年下半年股灾期间，GARCH-EVT-Copula-WCVaR 鲁棒模型所建立的投资组合收益率要略高于用正态分布刻画边缘分布的 Normal-Copula-WCVaR 鲁棒模型；GARCH-EVT-Copula-WCVaR 鲁棒模型的平均对数收益率及累计对数收益率分别为-0.0027、-0.3934，Normal-Copula-WCVaR 鲁棒模型的平均对数收益率及累计对数收益率分别为-0.0029、-0.4295。这体现出 GARCH-EVT 模型能够捕捉到收益率分布厚尾特征的优势。

图 5 分别展示了 2016 年 1 月至 2016 年 5 月间，两种指数的对数收益率，可以看出 1 月至 2 月两种指数对数收益率的波动明显高于 3 月至 5 月。能源指数的对数收益率在两个阶段的标准差分别为 0.0318

Table 2. Static investment portfolio strategy constructed by three models

表 2. 三种模型构建的静态投资组合策略

	权重 w	日均收益率	累计收益率	夏普比率
MV model	$(0.2404, 0.7596)^T$	-2.98×10^{-4}	-0.1456	-0.0122
Normal-Copula-WCVaR	$(0.4271, 0.5729)^T$	-3.72×10^{-4}	-0.1815	-0.0157
GARCH-EVT-Copula-WCVaR	$(0.3688, 0.6312)^T$	-3.49×10^{-4}	-0.1703	-0.0146

Table 3. Comparison of investment portfolio built by three models

表 3. 三种模型构建的投资组合收益比较

	平均对数收益率	累计收益	VaR _{0.95}	标准差	夏普比率
MV model	-0.30×10^{-3}	-0.142	-0.045	0.0241	-0.0120
Normal-Copula-WCVaR	-0.11×10^{-3}	-0.055	-0.046	0.0246	-0.0046
GARCH-EVT-Copula-WCVaR	0.06×10^{-3}	0.030	-0.041	0.0237	0.0026

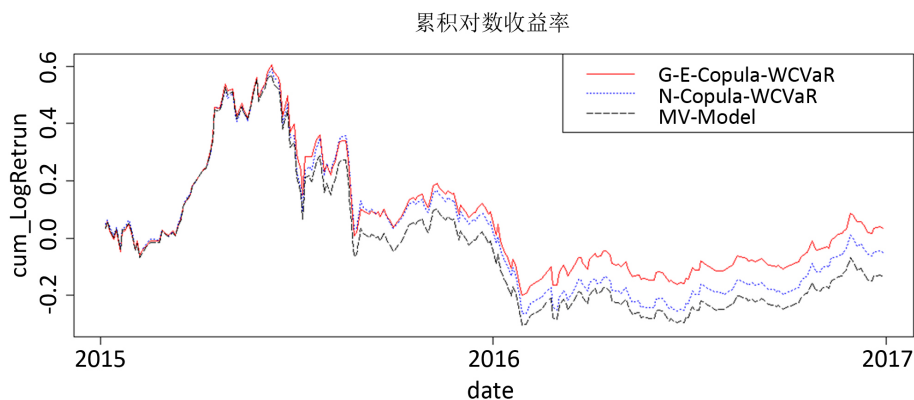


Figure 3. The cumulative log-return of three models

图 3. 三种模型的累计对数收益率

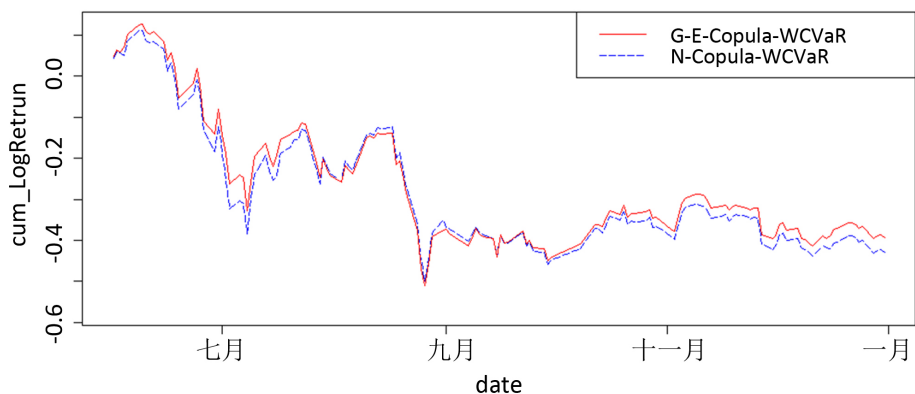


Figure 4. The cumulative log-return of the two robust models during the stock market crash
图 4. 股灾期间两种鲁棒模型的累计对数收益率

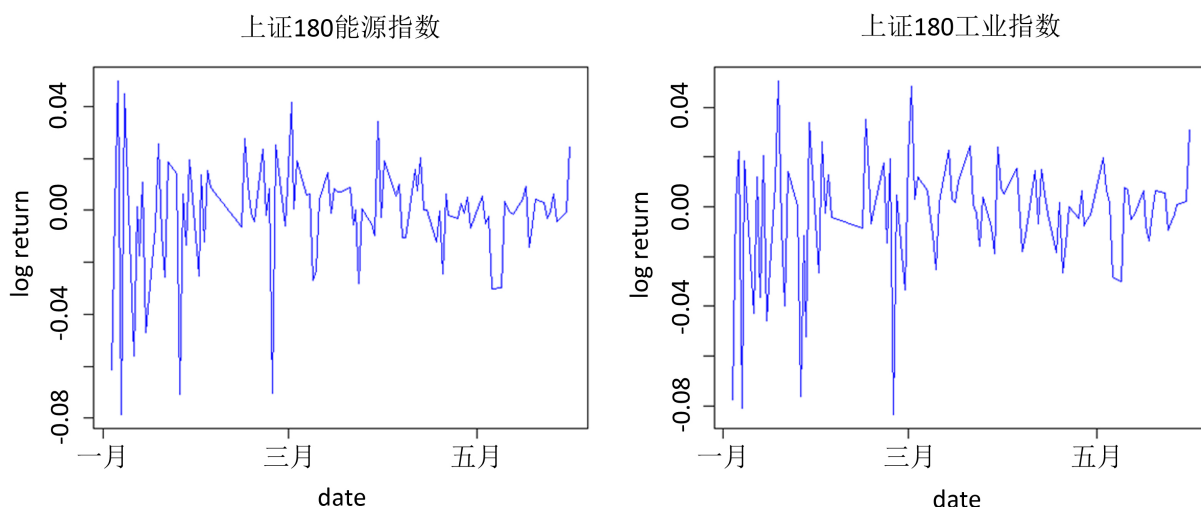


Figure 5. The log-return of SSE 180 energy and industrial index between 2016/1 and 2016/5
图 5. 2016/1~2016/5 上证 180 能源指数及工业指数对数收益率

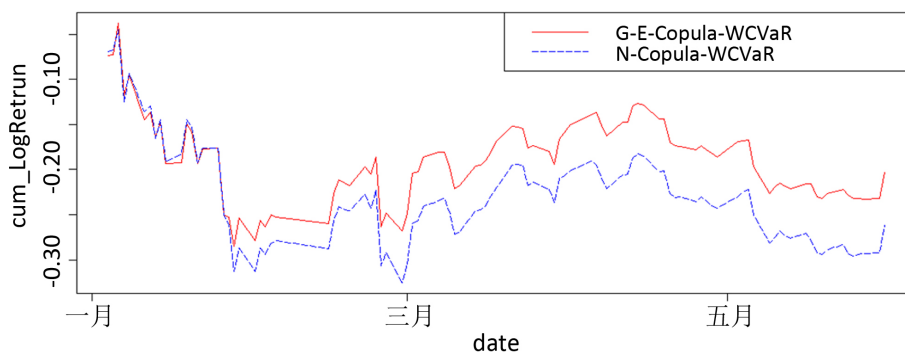


Figure 6. Cumulative log-return of two robust models between 2016/1 and 2016/5
图 6. 2016/1~2016/5 两种鲁棒模型的累计对数收益率

和 0.0135，工业指数的对数收益率在两个阶段的标准差分别为 0.0350 和 0.0143。两种指数的对数收益率在两个阶段都展示出了异方差的特征。

从图 6 中可以看出在 2016/1~2016/5 两种指数对数收益率的波动明显发生变化期间，GARCH-EVT-Copula-WCVaR 模型的累计对数收益率要明显高于仅用正态分布刻画边缘分布的

Normal-Copula -WCVaR 模型。这体现出 GARCH-EVT 模型能够捕捉到收益率异方差特征的优势。

6. 结论

本文先使用 GARCH-EVT 模型来刻画单一金融资产收益率的分布,然后使用 Copula 理论建立多种资产收益率的多元分布,并通过运用三种不同的 Copula 函数构建了金融资产收益率的混合不确定多元分布集合。最后,在该混合不确定多元分布集合上定义 WCVaR 风险度量,建立了鲁棒投资组合模型。通过与均值方差模型和仅用正态分布刻画收益率边缘分布的 Copula-WCVaR 鲁棒模型的实证对比,在资产价格出现极端情况的股灾期间及资产收益率波动发生变化期间,本文建立的 GARCH-EVT-Copula-WCVaR 鲁棒模型都要优于 Normal-Copula-WCVaR 鲁棒模型和均值方差模型。

参考文献 (References)

- [1] Black, F. and Litterman, R. (1992) Global Portfolio Optimization. *Financial Analysts Journal*, **48**, 28-43. <https://doi.org/10.2469/faj.v48.n5.28>
- [2] 梁锡坤, 徐成贤, 郑冬, 等. 鲁棒投资组合选择优化问题的研究进展[J]. 运筹学学报, 2014, 18(2): 87-95.
- [3] Zhu, S. and Fukushima, M. (2009) Worst-Case Conditional Value-at-Risk with Application to Robust Portfolio Management. *Operations Research*, **57**, 1155-1168. <https://doi.org/10.1287/opre.1080.0684>
- [4] Kakouris, I. and Rustem, B. (2014) Robust Portfolio Optimization with Copulas. *European Journal of Operational Research*, **235**, 28-37. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2013.12.022>
- [5] Bali, T.G. and Neftci, S.N. (2003) Disturbing Extremal Behavior of Spot Rate Dynamics. *Journal of Empirical Finance*, **10**, 455-477. [https://doi.org/10.1016/S0927-5398\(02\)00070-1](https://doi.org/10.1016/S0927-5398(02)00070-1)
- [6] 刘志东, 徐淼. 基于 GARCH 和 EVT 的金融资产风险价值度量方法[J]. 统计与决策, 2007(18): 13-16.
- [7] Jondeau, E. and Rockinger, M. (2003) Conditional Dependency of Financial Series: The Copula-GARCH Model. *Social Science Electronic Publishing*, **rp69**, 853. <https://doi.org/10.2139/ssrn.410740>
- [8] 李秀敏, 史道济. 金融市场组合风险的相关性研究[J]. 系统工程理论与实践, 2007, 27(2): 112-117.
- [9] 张进滔. 基于 GARCH-EVT 方法和 Copula 函数的组合风险分析[D]: [硕士学位论文]. 成都: 四川大学, 2007.
- [10] Genest, C. and Mackay, J. (1986) The Joy of Copulas: Bivariate Distributions with Uniform Marginals. *American Statistician*, **40**, 280-283.
- [11] Rockafellar, R.T. and Uryasev, S. (2002) Conditional Value-at-Risk for General Loss Distributions. *Journal of Banking & Finance*, **26**, 1443-1471. [https://doi.org/10.1016/S0378-4266\(02\)00271-6](https://doi.org/10.1016/S0378-4266(02)00271-6)

知网检索的两种方式:

1. 打开知网页面 <http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD>
下拉列表框选择: [ISSN], 输入期刊 ISSN: 2325-2251, 即可查询
2. 打开知网首页 <http://cnki.net/>
左侧“国际文献总库”进入, 输入文章标题, 即可查询

投稿请点击: <http://www.hanspub.org/Submission.aspx>

期刊邮箱: sa@hanspub.org