

Higher Moment Statistics for Fitting Random Fatigue Life Data to Weibull Distribution Parameters

Guijin Wang

Alloy Steels Department, Central Iron & Steel Research Institute, Beijing
Email: meiwg6234@gmail.com

Received: Feb. 6th, 2018; accepted: Feb. 20th, 2018; published: Feb. 28th, 2018

Abstract

This paper presents a new approach to fitting fatigue datasets to three-parameter Weibull distribution by adjusting location parameter t_0 and maximum accumulated fatigue life rate 99% in order to match the intrinsic higher moment statistics such as skewness and kurtosis from sample fatigue data directly. Thereafter, the parameters κ and λ of the Weibull distribution from various manufacture technology can be well estimated. The expected standard deviation σ , mean μ and accumulated failure life L10 can be calculated and compared as well. This new approach has been justified due to available experimental data of McCool.

Keywords

Weibull Distribution, Skewness, Kurtosis, Fitting Indicator η

用于威布尔参数估计的高阶统计量

王桂金

原钢铁研究总院合金钢室, 北京
Email: meiwg6234@gmail.com

收稿日期: 2018年2月6日; 录用日期: 2018年2月20日; 发布日期: 2018年2月28日

摘要

在材料及机械可靠性工程中, 威布尔分布是常用的数学工具。然而, 不同学者采用的算法通常给出不同的结果。本作者发展一种新算法, 通过调整位置参数和名义最大寿命数据(99%)使得三参数威布尔形状

参数和疲劳数据内禀高阶统计量斜度/峭度的形状参数 κ 一致而得到较好的拟合。本文以McCool的高温轴承钢为例,说明在轴承钢寿命分布的形状参数基本相同情况下材料的额定寿命L10如何受到冶炼工艺的影响。

关键词

威布尔分布, 斜度, 峭度, 拟合指数

Copyright © 2018 by author and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

在材料及机械可靠性工程中,威布尔分布是常用的数学工具。然而,不同学者采用的算法通常给出不同的结果[1]。为了提高随机寿命威布尔参数拟合的准确度,本作者发展一种新算法[2],通过调整位置参数 t_0 和名义最大寿命 t_f (99%)使得拟合的三参数威布尔形状参数 κ 和疲劳数据内禀的高阶统计量斜度/峭度的形状参数相近而得到更好的拟合。本文采用McCool高温轴承钢数据[3]为例说明这种新方法如何用来研究不同冶炼工艺对轴承额定寿命L10的影响。

计算方法

威布尔分布[1]

威布尔累计失效率有如下三种形式:

三参数威布尔分布;

$$f(t) = 1 - \exp\left\{-\left(\frac{t-t_0}{\lambda}\right)^\kappa\right\} \quad (\lambda, t-t_0, \kappa) > 0 \quad (1-1)$$

式中 $f(t)$ 是实测试样在时刻 t 的累计失效率。 t_0 :位置参数, κ :形状参数, λ :尺寸参数,是累计失效率达到63.2%需要的时间,它与形状参数 κ 无关。如果 $t_0 = 0$,它变成两参数威布尔分布:

$$f(t) = 1 - \exp\left\{-\left(\frac{t}{\lambda}\right)^\kappa\right\} \quad (\lambda, t, \kappa) > 0 \quad (1-2)$$

进一步令 t 以 λ 为单位计数,则得到归一化单参数威布尔分布:

$$f(t) = 1 - \exp\{-t^\kappa\} \quad (t, \kappa) > 0 \quad (1-3)$$

威布尔失效率分布函数就是上述诸式对时间 t 的导函数。威布尔分布参数的各种估算方法已经被详细研究过了。本文采用的是极大似然法[1][3]。

2. 两参数威布尔分布的拟合

2.1. 极大似然法

设已知一组失效寿命序列(时间或转数) t_1, t_2, \dots, t_f ,分别对应于累计失效率 $f(t_1), f(t_2), \dots, f(t_f)$ 。采用极大似然法公式(2)进行迭代运算可获得两参数威布尔分布的最佳参数 κ ,然后将 κ 代入式(3)算出尺寸参数 λ 。为保证结果可靠,本文计算进行到式(2)左边绝对值小于 10^{-5} 后停止。

$$\frac{1}{\kappa} + \left[\left(\frac{1}{N} \right) \sum_{i=1}^N \ln(t_i) \right] - \left[\sum_{i=1}^N t_i^{\kappa} \ln(t_i) \right] / \left(\sum_{i=1}^N t_i^{\kappa} \right) = 0 \quad (2)$$

$$\lambda = \left[\left(\frac{1}{N} \right) \sum_{i=1}^N t_i^{\kappa} \right]^{1/\kappa} \quad (3)$$

由于 t 趋近无限大时威布尔分布累计失效才等于 100%，**为了方便**，本文设定满足 $f(t_f) = 99\%$ 的 t_f 为名义全失效寿命。由于极大似然法只保证似然函数极大，为了提高威布尔曲线和试验寿命分布形状(不对称性，峰型)的拟合程度，有必要对拟合曲线和实际寿命曲线的斜度和峭度进行计算和比较。

2.2. 威布尔分布的斜度和峭度

已知形状参数为 κ 的威布尔分布具有斜度 skewness:

$$\gamma_1 = \left[\Gamma_3 - 3\Gamma_2\Gamma_1 + 2\Gamma_2^3 \right] / \left[\Gamma_2 - \Gamma_1^2 \right]^{3/2} \quad (4)$$

而过盈峭度 excess kurtosis (以下简称峭度)可按式(5)计算:

$$\gamma_2 = \left\{ \left(\Gamma_4 - 4\Gamma_3\Gamma_1 + 6\Gamma_2\Gamma_1^2 - 3\Gamma_1^4 \right) / \left(\Gamma_2 - \Gamma_1^2 \right)^2 \right\} - 3 \quad (5)$$

式中, $\Gamma_i = \Gamma(1+i/\kappa)$, 是 gamma 函数($i = 1, 2, 3, 4$)。试样寿命数据的内禀斜度和峭度 γ_1 和 γ_2 可由通用统计软件(例如 MS OFFICE EXCEL)计算, 两者都没有量纲。

2.3. 拟合威布尔形状参数 κ 的具体步骤

为了评价威布尔分布参数拟合的优劣, 本文采用如下拟合指数 η :

$$\eta = (\eta_1 + \eta_2) / 2 \quad (6)$$

式中 $\eta_1 = \kappa(\gamma_1) / \kappa$, $\eta_2 = \kappa(\gamma_2) / \kappa$ 。并且 $\kappa(\gamma_1)$, $\kappa(\gamma_2)$ 分别是试验数组内禀斜度和峭度的形状参数。 κ 是拟合威布尔分布的形状参数。当 η_1 和 η_2 皆为 1 或接近 1 时威布尔形状参数 κ 拟合结果最佳。**由于**两参数威布尔分布往往达不到最佳拟合, 引入可调整的非零位置参数 t_0 (三参数威布尔分布)以及名义全失效寿命 t_f 可以提高拟合度[2]。

具体步骤如下:

1) 先由小到大排列试样疲劳寿命值 t_i , 用极大似然法算出两参数威布尔分布的形状参数 κ 以及试样寿命的内禀斜度 κ , 峭度 γ_1 及它们对应的形状参数 $\kappa(\gamma_1)$, $\kappa(\gamma_2)$ 和拟合指数 η 。如果 η 偏离期望值 1 较远, 则

2) 令位置参数 t_0 为非零值, 调整 t_0 并重复步骤 1), 逐步使 η 靠近 1,

3) 如果 η 仍然偏离 1 较远, 可同时调整 t_0 和 t_f 重新计算 η 直到它接近最佳值 1, 这就得到拟合形状参数 κ 。

3. 不同冶炼工艺下高温轴承钢的疲劳寿命

3.1. 试验设计

1982 年 McCool [4]发表了对三种高温轴承试验钢: M50, T15 和高铬不锈钢分别采用真空自耗, 真空冶炼 + 真空电弧炉除气或粉末冶金法。总共五种组合的寿命实验代码见表 1。

磨损试验设定:

试样尺寸: 圆柱直径 76.2 毫米, 长 9.53 毫米;

转速：10,000 转/分，两个面对面 191 毫米圆盘；
最大接触应力：4826 Mpa 即 700,000 psi。

3.2. 试验结果及讨论

五种实验方案各有 9 个试样的疲劳寿命数据见表 2。

最下面两行是 McCool 采用极大似然法(MLE)拟合两参数威布尔分布得到的斜率 κ 和 10% 额定累计失效率的寿命。

1) 原始数据的两参数威布尔分布拟合

本作者采用极大似然法(MLE)对表 2 数据计算两参数威布尔分布参数 κ , λ 及拟合指数 η , 结果见表 3。其中 κ 和表 2 中 McCool 数值有些差异。按从小到大排列 λ 值, CVEM M50 最小, PP CRB-7 最大。参考 McCool 提供的多组疲劳数据失效机制相近判据, 这五组实验的 $\kappa_{\max}/\kappa_{\min}$ 应小于 2.61 ($n=r=10, k=5$)。本文数据 $\kappa_{\max}/\kappa_{\min} = 3.4644/1.89622 \approx 1.827$ 可认为合格。然而拟合指数全都不接近 1。

符号说明(下同):

t_0, t_f : 疲劳失效开始时间和名义全失效时间(10^6 转);

κ, λ : 极大似然法拟合的威布尔形状参数(无量纲)和尺寸参数(10^6 转);

Table 1. Test codes for five manufacture technology

表 1. 五组冶炼工艺的代码

试验代码	冶炼工艺	轴承钢名称	轴承钢类别
CEVM M50	真空自耗	M50	Cr4Mo4V 工具钢
PP M50	粉末冶金	M50	同上
VIMVAR M50	真空感应 + 真空电弧炉除气	M50	同上
PP T15	粉末冶金	T15	CoMo 工具钢
PP CRV-7	粉末冶金	EX00007	高铬不锈钢

Table 2. Fatigue life of five manufacture codes

表 2. 五组工艺的疲劳寿命数据, 单位 10^6 转

试验代码				
CEVM M-50	PP M-50	VIMVAR M50	PP T-15	PP CRB-7
3.19	3.03	5.88	3.46	6.43
4.26	5.53	6.74	5.22	9.97
4.47	5.6	6.9	5.69	10.39
4.53	9.3	6.98	6.54	13.55
4.67	9.92	7.21	9.16	14.45
5.78	12.95	8.59	10.19	16.81
6.79	15.21	9.8	10.71	18.39
9.37	16.04	12.28	12.58	20.84
12.75	16.84	25.46	13.41	21.51
L10 2.6	5.06	3.49	4.72	8.83
κ 2.32	2.59	1.94	3.13	3.68

$\kappa(\gamma_1)$, $\kappa(\gamma_2)$: 试样数据内禀斜度和内禀峭度对应的威布尔形状参数;
 μ 和 σ : 试样寿命数据的均值和标准差(10^6 转);
 δ^2 : 拟合曲线相对于试样实验值的均方偏差(10^6 转)²;

$$\delta^2 = \sum_{i=1}^9 \{f(t_i) - f(t_{i,weib})\}^2 / 9 \tag{7}$$

式中 $f(t_i)$ 是试验寿命 t_i 的累计失效率, $f(t_{i,weib})$ 是威布尔分布给出的累计失效率。于是, 在五种冶炼工艺下的威布尔疲劳寿命累积失效率表达式分别是:

CVEMM50: $f(t) = 1 - \exp\left\{(t/7.03549)^{2.30045}\right\} \quad t > 0, t = t_1, t_2, \dots, t_f$

PP T15: $f(t) = 1 - \exp\left\{(t/9.62393)^{2.92675}\right\} \quad t > 0, t = t_1, t_2, \dots, t_f$

VIMVAR M50: $f(t) = 1 - \exp\left\{(t/11.353)^{1.89622}\right\} \quad t > 0, t = t_1, t_2, \dots, t_f$

PP M50: $f(t) = 1 - \exp\left\{(t/11.862)^{2.3971}\right\} \quad t > 0, t = t_1, t_2, \dots, t_f$

PP CRB-7: $f(t) = 1 - \exp\left\{(t/16.407)^{3.4644}\right\} \quad t > 0, t = t_1, t_2, \dots, t_f$

3.3. 数据经过 t_o 和 t_f 修正后按斜度和峭度拟合

五种冶炼工艺的随机疲劳寿命经 t_o 和 t_f 修正的最佳拟合指数 η 见表 4。尺寸参数大小顺序略有改变, 而且相应数值均比表 3 的小。因为位置参数 t_o 均是正值所致。如果把它加进尺寸参数 λ , 仍然和两参数拟合的尺寸参数 λ 有差别。这五组三参数威布尔分布 $\kappa_{\max}/\kappa_{\min} = 1.08144/1.0204 \approx 1.0598$ 比 2.61 小得多, 而且拟合指数 η 都很接近 1。这表明各种材料虽然成分不同, 但材质都较均匀, 夹杂物的数量, 大小和分布都得到有效控制。此外, 三种粉末冶金试样的尺寸参数 λ 都比较高, 值得进一步研究。对冶炼及其他工艺对高温轴承寿命的影响有兴趣的读者请参考综合评述文献[5]。

Table 3. Fitting five fatigue dataset to two parameter Weibull distribution
表 3. 五组疲劳数据拟合两参数威布尔分布的结果

试验代码	t_o	df	κ	λ	μ	σ	γ_1	γ_2	$\kappa(\gamma_1)$	$\kappa(\gamma_2)$	δ^2	η
CVEMM50	0	12.75	2.3005	7.0355	6.2011	3.0501	1.4996	1.8016	1.2113	1.4075	0.0166	0.5692
PP T15	0	13.41	2.9268	9.6239	8.5511	3.4786	-0.0217	-1.4099	3.6949	NA*	0.0070	NA*
VIMVAR M50	0	25.46	1.8962	11.353	9.9822	6.1273	2.4707	6.4590	0.8698	0.9781	0.0262	0.4849
PP M50	0	16.84	2.3971	11.862	10.491	5.6660	-0.1355	-1.5698	4.8960	N/A*	0.0070	N/A*
PP CRB-7	0	21.51	3.4644	16.407	14.704	5.1584	-0.1744	-1.0513	4.4750	NA*	0.0048	NA*

NA*: No solution of k in normal range (0.5-5.0).

Table 4. After correction of γ_1 and γ_2 , fitting five datasets of fatigue life to three parameter Weibull distribution
表 4. 五组原始疲劳寿命经斜度和峭度修正后拟合三参数威布尔分布的结果

试验代码	t_o	t_f	κ	λ	μ	σ	$\kappa(\gamma_1)$	$\kappa(\gamma_2)$	$\kappa(\gamma_1)/\kappa$	$\kappa(\gamma_2)/\kappa$	η	δ^2	$\lambda + t_o$
CEVM M50	2.9359	16.5	1.03187	3.7341	3.6819	4.1237	0.9756	1.0881	0.9455	1.0545	0.9999	0.011	6.67
VIMVAR M50	5.4669	20.5	1.02040	4.0021	3.9643	4.5919	0.9643	1.07565	0.9450	1.0542	0.9996	0.011	9.47
PP T15	3.2237	25.0	1.08144	6.8129	6.6152	6.4113	1.0518	1.11107	0.9726	1.0274	0.9999	0.005	10.0
PP M50	2.6666	37.5	1.04561	10.279	10.098	10.230	1.0121	1.07912	0.9680	1.0321	0.9999	0.006	12.9
PP CRB-7	6.2439	40.0	1.07474	10.786	10.516	9.7990	1.0488	1.1829	0.9759	1.0241	1.0000	0.005	17.0

三参数威布尔疲劳寿命累积失效率表达式分别是

$$\text{CEVM M50: } f(t) = 1 - \exp\left\{\left(\frac{t - 2.9359}{3.7341}\right)^{1.03187}\right\} \quad t - t_0 > 0, t = t_1, t_2, \dots, t_f$$

$$\text{VIMVARM50: } f(t) = 1 - \exp\left\{\left(\frac{t - 5.46685}{4.0021}\right)^{1.0204}\right\} \quad t - t_0 > 0, t = t_1, t_2, \dots, t_f$$

$$\text{PP T15: } f(t) = 1 - \exp\left\{\left(\frac{t - 3.2237}{6.81288}\right)^{1.08144}\right\} \quad t - t_0 > 0, t = t_1, t_2, \dots, t_f$$

$$\text{PP M50: } f(t) = 1 - \exp\left\{\left(\frac{t - 2.66663}{10.279}\right)^{1.04561}\right\} \quad t - t_0 > 0, t = t_1, t_2, \dots, t_f$$

$$\text{PP CRB-7: } f(t) = 1 - \exp\left\{\left(\frac{t - 6.2439}{10.786}\right)^{1.07474}\right\} \quad t - t_0 > 0, t = t_1, t_2, \dots, t_f$$

把经斜度和峭度修正的寿命先按 $(t - t_0)/\lambda$ 归一化，再把 45 个数据融合成一组，用极大似然法重新拟合两参数威布尔分布得到如下结果，见表 5。

融合后的威布尔分布形状参数 $\kappa = 1.03414$ 很接近五组 κ 平均值 1.0508，尺寸参数 $\lambda = 0.99977$ 很接近 1，而且拟合指数 $\eta(\gamma_1, \gamma_2) = 0.97245$ 也表明数据融合是成功的。

下面讨论均值 μ ，标准差 σ 和额定寿命 L10。

3.4. 标准差 σ ，均值 μ 和额定寿命 L10

已知形状参数 κ 和尺寸参数 λ 的威布尔分布的**标准差** σ 是

$$\sigma = \lambda \left[\Gamma(1 + 2/\kappa) - \Gamma^2(1 + 1/\kappa) \right]^{1/2} \tag{8}$$

均值 μ 是：

$$\mu = \lambda (\Gamma(1 + 1/\kappa)) \tag{9}$$

随机寿命数据的标准差 σ 和均值 μ 可由通用统计软件算出，它们和威布尔分布的 σ 和 μ 是否一致也是检验拟合优劣的重要指标。

如表 6~表 7 可见，不管是两参数或三参数拟合，同代码的威布尔参数和疲劳数组得到的均值 μ 都几乎相同。但是疲劳数据的标准差 σ 比拟合威布尔分布的 σ 高，因为 σ 的随机误差不能互相抵消。此外，有些 γ_1, γ_2 三参数拟合计算的额定寿命 L10 比两参数的小，因为它的起始点是从 t_0 算起。

Table 5. After correction of γ_1 and γ_2 fitting normalized five datasets of fatigue life to two parameter Weibull distribution
表 5. 五组疲劳寿命经斜度和峭度修正后归一化融合的两参数威布尔分布

Sample size	κ	λ	μ	σ	γ_1	γ_2	$\kappa(\gamma_1)/\kappa$	$\kappa(\gamma_2)/\kappa$	η
45	1.03414	0.99977	0.985686	1.022956	2.141368	5.117933	0.9566	1.04877	0.97245

Table 6. Standard variation, mean and life L10 from fitted Weibull two parameters and from five datasets
表 6. 两参数威布尔拟合五组随机疲劳寿命计算的标准差 μ ，均值 σ 和额定寿命 L10， 10^6 转

统计量	μ		σ		L10	
	Welb	data	Welb	data	Welb	data
CVEMM50	6.23286	6.20111	2.8734	3.05005	2.6453	N/A
VIMVAR M50	10.0749	9.98222	5.52544	6.1273	3.4462	N/A
PP T15	14.7542	14.704	4.71224	5.1584	7.6063	N/A
PP M50	10.5152	10.491	4.67029	5.666	4.6404	N/A
PP CRB-7	8.58483	8.55111	3.19003	3.47859	5.0372	N/A

Table 7. Standard variation, mean and suggested life L10, from $\gamma_1\gamma_2$ corrected Weibull parameters and from dataset
表 7. 按 $\gamma_1\gamma_2$ 拟合五组随机疲劳寿命的威布尔分布的标准差 σ , 均值 μ 和额定寿命 L10, 10^6 转

统计量	μ		σ		L10	
	Welb	data	Welb	data	Welb	data
CVEMM50	3.68681	3.6819	3.5734	4.1237	0.704054	N/A
VIMVAR M50	3.96889	3.9643	3.88977	4.59185	0.962253	N/A
PP T15	6.6168	6.6152	6.11893	6.41128	1.135922	N/A
PP M50	10.12787	10.128	9.6868	10.29	4.640414	N/A
PP CRB-7	10.49008	10.516	9.76759	9.799	8.569376	N/A

由于本文采用了新的拟合方法得到了较为可靠的 L10 排序, 为选泽冶炼工艺提供参考。但是由于各厂家的冶炼, 热处理, 机加工和寿命试验的质量控制不完全一样, 它们的实际寿命 L10 会有差别。因此对重要的轴承, 还需要按实际使用环境作疲劳试验核实真正的 L10。

4. 结论

本文用新算法对三种轴承钢/五种冶炼工艺的疲劳寿命拟合威布尔分布有如下结论:

1) 和现有威布尔参数拟合方法比较, 通过调整位置参数 t_0 以及名义全失效时间 t_f , 五种冶炼工艺下拟合三参数威布尔斜率 κ 相对集中, 拟合指数 η 更接近。各个冶炼工艺的疲劳寿命分布的形状参数 κ , 尺寸参数 λ , 标准差 σ , 均值 μ 和额定寿命 L10 都比较合理。这是它优于现有拟合方法之处。但它也对寿命数据质量提出了更高要求。如果经过多次调整 t_0 和 t_f 还得不到良好的拟合指数 η , 可能是样本数量不足, 存在系统偏差或者疲劳数据服从其他分布所致。

2) 研究冶炼工艺对额定寿命 L10 的影响时, 尺寸参数 λ 和形状参数 κ 都很重要。只有当不同数据组的 κ 值变化不大时, 尺寸参数 λ 起更大作用。

3) 当需要了解在不同环境条件(诸如应力, 温度, 湿度, 酸碱度等等)的额定寿命 L10, 最好按本文方法做系统的试验研究。

4) 本文只研究随机疲劳数据的拟合处理, 未涉及失效微观机理, 例如裂纹萌生及扩展的问题。本文结论只供参考。

参考文献 (References)

- [1] Rhinne, H. (2009) The Weibull Distribution, A Handbook. CRC Press, New York.
- [2] 王桂金. 拟合威布尔随机寿命 S-N 曲线的新算法[J]. 统计学与应用, 2017, 6(2): 210-218.
- [3] 王桂金. Weibull 随机寿命的统计量[J]. 轴承, 2012(3): 38-42.
- [4] McCool, J.J. (1982) Analysis of Sets of Two-Parameter Weibull Data Arising in Rolling Contact Endurance Testing. Rolling Contact Fatigue Testing of Bearing Steels, ASTM STP 771. Hoo, J. C. Ed., American Society of Testing and Materials, 293-319. <https://doi.org/10.1520/STP36146S>
- [5] Zaretsky, E.V. (1988) Selection on Rolling Element Bearing Steels for Long-life Applications. Effect of Steel Manufacturing Processes on the Quality of Bearing Steels, ASTM STP 987, Philadelphia, 5-43. <https://doi.org/10.1520/STP26225S>

知网检索的两种方式：

1. 打开知网页面 <http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD>
下拉列表框选择：[ISSN]，输入期刊 ISSN：2325-2251，即可查询
2. 打开知网首页 <http://cnki.net/>
左侧“国际文献总库”进入，输入文章标题，即可查询

投稿请点击：<http://www.hanspub.org/Submission.aspx>

期刊邮箱：sa@hanspub.org