

# 中国货币市场短期利率的CIR模型及其参数估计的期望方差法

李文利, 王岩\*, 于慧

大连交通大学理学院, 辽宁 大连

收稿日期: 2023年9月25日; 录用日期: 2023年12月8日; 发布日期: 2023年12月15日

## 摘要

为了研究中国货币市场短期利率的动态规律, 本文用CIR模型对瞬时利率的演化过程建模。对于模型中存在的未知参数, 采用期望方差法建立估计量; 并进一步选取银行间质押式7天回购利率(R007)数据作为瞬时利率的近似替代, 得到CIR模型中参数的估计值; 最终借助CIR模型给出中国货币市场短期利率的动态变化规律。

## 关键词

CIR模型, 短期利率, 期望方差法, 参数估计, R007, 中国货币市场

## CIR Model for Short-Term Interest Rates in the Chinese Money Market and Parameter Estimation Using the Expectation-Variance Method

Wenli Li, Yan Wang\*, Hui Yu

School of Science, Dalian Jiaotong University, Dalian Liaoning

Received: Sep. 25<sup>th</sup>, 2023; accepted: Dec. 8<sup>th</sup>, 2023; published: Dec. 15<sup>th</sup>, 2023

## Abstract

This paper presents the CIR model for the evolution of instantaneous interest rates to investigate

\*通讯作者。

the dynamic patterns of short-term interest rates in the Chinese money market. For unknown parameters in the model, the expectation-variance method is applied to give their estimators. Furthermore, we select the interbank pledge 7-day repo rate (R007) data as an approximate substitute for instantaneous interest rates, obtaining estimates for the parameters in the CIR model. Ultimately, with the assistance of the CIR model, we elucidate the dynamic change rule of short-term interest rates in the Chinese money market.

## Keywords

CIR Model, Short-Term Interest Rate, The Expectation-Variance Method, Parameter Estimation, R007, The Chinese Money Market

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

本文研究中国货币市场短期利率的动态变化规律,首先假设瞬时利率的动态变化用 CIR 模型来描述。对于不同国家市场的短期利率在 CIR 模型中的参数值是不同的,所以 CIR 模型中的参数估计是一类关键的研究问题。关于这类参数估计问题已经有大量的研究工作,例如:Feng 和 Xie [1] [2]利用美国和日本的利率数据,在欧拉离散化的基础上使用吉布斯采样对 CIR 模型进行贝叶斯参数估计;高利率在文献[3]中借助 MCMC 方法对利率模型 CIR 过程的参数进行贝叶斯估计;马笑天[4]采用贝叶斯估计研究上海同业拆借利率中的隔夜拆借利率;张玉桂等人[5]在 CIR 模型下,使用无损卡尔曼滤波估计方法对 Shibor 利率数据进行拟合估计;吴恩远在文献[6]中对该模型进行加权最小二乘估计,选取上海银行间同业拆放利率(Shibor)得到模型的参数估计值;吴方滢[7]利用最小二乘估计解决平稳 CIR 模型参数估计;王泽峰和刘俊峰[8]使用广义矩估计法对一种改进的模型进行估计。在众多文献研究中,最为常见的方法是极大似然估计,其原理在于通过极大化似然函数得到未知参数的估计量(见 Valdivieso 等[9], Schneider 等[10], 王素丽等[11])。Fergusson 等人[12]和 Kladićko [13]利用极大似然方法分别对美国现金短期利率和美国的 PRIBO3 数据进行参数估计。值得注意的是,在对随机过程进行最大似然估计的时候,转移概率密度获取困难,导致无法得到似然函数的显示表达式,因此 Ait-Sahali [14]构造了闭合函数序列、Beskos 等人[15]利用蒙特卡罗的 MLE、Singer [16]利用卡尔曼滤波提供了转移密度一种数值的近似,从而得到近似的似然函数。文献[17]通过实验发现,随着参数的增加,参数估计的准确度急剧下降,当线性随机微分方程的未知参数个数较多时,极大似然估计基本失效,因此齐凤团[17]提出了期望方差法用于估计随机微分方程的未知参数,此方法当参数个数较多时表现出了良好的有效性。

中国市场短期利率的种类很多,选取不同的短期利率估计 CIR 模型的参数时结果会有很大差异。如何选取中国市场短期利率的数据类型,潘冠中[18]给出了解决这一问题的两个原则,即相关性原则和成交量最大、选择交易最频繁的利率品种原则;同时根据这两个原则论证了银行间质押式 7 天回购利率(R007)是瞬时利率的最佳近似代替。

本文利用 CIR 模型对中国货币市场短期利率建模,模型中的波动项和扩散项均含有未知参数,由于 CIR 模型中含有三个未知参数,我们采用期望方差法给出参数的估计量,在实证研究中选取 R007 作为瞬时利率的近似替代,给出中国货币市场短期利率 CIR 模型的显示表达式,用于刻画利率数据的演化过程,

以分析中国货币市场短期利率的动态变化规律。

## 2. CIR 模型及参数估计

### 2.1. CIR 模型及期望方差法

假设  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, \mathbf{P})$  为一个完备的滤子概率空间,  $\{B_t, t \geq 0\}$  是该空间上的布朗运动, CIR (Cox-Ingersoll-Ross) [19] 模型是描述利率随时间变化的数学模型, 具体来说, 瞬时利率  $X_t$  可用下列随机微分方程来表示:

$$dX_t = K(b - X_t)dt + \theta\sqrt{X_t}dB_t, t \in [0, T], X(0) = x_0 \in R \quad (1)$$

其中,  $K \in R$  表示短期利率偏长期均衡利率水平的速度,  $b \in R$  是长期均衡利率水平,  $\theta \in R^+$  是描述短期利率过程的瞬时波动率。在实证研究中利用捕捉到的历史利率数据信息对模型的  $K$ 、 $b$ 、 $\theta$  进行准确估计是预测未来利率变化趋势的关键。

本文利用 CIR 模型对中国货币市场短期利率建模, 对于未知参数  $K$ 、 $b$ 、 $\theta$  利用期望方差法进行参数估计。期望方差法的原理是: 首先将时间段  $[0, T]$  等距划分成  $N$  段, 每段长度记为  $h$ , 即  $t_{i+1} - t_i = h$ ,  $i = 0, \dots, N-1$ , 由 Euler-Maruyama 方法将式(1)离散化可得:

$$X_{t_{i+1}}(\omega) - X_{t_i}(\omega) = K(b - X_{t_i}(\omega))h + \theta\sqrt{X_{t_i}(\omega)}[B(t_{i+1}) - B(t_i)]$$

利用此差分格式生成  $X_t$  的  $M$  条轨道; 其次在初值处选取一个数据, 并在下一个时间点观测到  $M$  个数据, 即  $\omega \in \omega^j$ ,  $j = 1, 2, \dots, M$ 。这样观测一个初值及初值下一个时间点的数据可以提供两个求解方程。由于我们研究的随机微分方程的参数分别是  $K$ 、 $b$ 、 $\theta$  三个, 所以需要找到初值的个数为 2 个, 记为  $X_{t_1}(\omega)$ 、 $X_{t_2}(\omega)$ , 其中  $X_{t_1}(\omega)$  是随机取的一条路径在  $t_1$  时刻的利率收盘价,  $X_{t_2}(\omega)$  在  $t_2$  时刻的利率收盘价, 建立三个方程。

具体来说, 对于从初值  $X_{t_2}(\omega)$  出发的随机微分方程, 在  $t_2$  时刻取  $M$  个观测值, 记为:

$$X_{t_2}(\omega^1), X_{t_2}(\omega^2), \dots, X_{t_2}(\omega^M)$$

在  $t_2$  中的  $M$  个观测值中任取一个值作为下一时刻  $t_3$  的初始值, 在  $t_3$  时刻取  $M$  个观测值, 记为:

$$X_{t_3}(\omega^1), X_{t_3}(\omega^2), \dots, X_{t_3}(\omega^M)$$

对于给定的  $X_{t_1}(\omega)$ , 有:

$$X_{t_{i+1}}(\omega) - X_{t_i}(\omega) \sim N(h \cdot K(b - X_{t_i}(\omega)), h \cdot X_{t_i}(\omega) \cdot \theta^2)$$

由期望方差法可得:

$$\frac{1}{M} \sum_{j=1}^M X_{t_2}(\omega^j) - X_{t_1}(\omega) = h \cdot K(b - X_{t_1}(\omega))$$

$$\sum_{j=1}^M (X_{t_2}(\omega^j) - X_{t_1}(\omega) - h \cdot K(b - X_{t_1}(\omega)))^2 = h \cdot X_{t_1}(\omega) \cdot \theta^2$$

$$\frac{1}{M} \sum_{j=1}^M X_{t_3}(\omega^j) - X_{t_2}(\omega) = h \cdot K(b - X_{t_2}(\omega))$$

求解上面三个方程解得参数  $K$ 、 $b$ 、 $\theta^2$  的估计量为:

$$\hat{b} = \frac{LX_{t_2}(\omega) - X_{t_1}(\omega)}{L} + 1$$

$$\hat{K} = \frac{\frac{1}{M} \sum_{j=1}^M X_{t_2}(\omega^j) - X_{t_1}(\omega)}{h \cdot (\hat{b} - X_{t_1}(\omega))}$$

$$\hat{\theta}^2 = \frac{\frac{1}{M-1} \sum_{j=1}^M \left( X_{t_2}(\omega^j) - X_{t_1}(\omega) - h \cdot \hat{K} (\hat{b} - X_{t_1}(\omega)) \right)^2}{h \cdot X_{t_1}(\omega)}$$

其中

$$L = \frac{\frac{1}{M} \sum_{j=1}^M X_{t_2}(\omega^j) - X_{t_1}(\omega)}{\frac{1}{M} \sum_{j=1}^M X_{t_3}(\omega^j) - X_{t_2}(\omega)}$$

## 2.2. 算例

为了验证期望方差法给出估计量的准确性, 本小节在 CIR 模型当中将参数真实值分别设为  $K = 0.21459$ ,  $b = 0.08579$ ,  $\theta = 0.07830$ ,  $X_0 = 0.1$  (见 Fan and Zhang, 2003 [20])。利用蒙特卡洛模拟方法生成  $X_t$  的 100 条轨道(如图 1)。

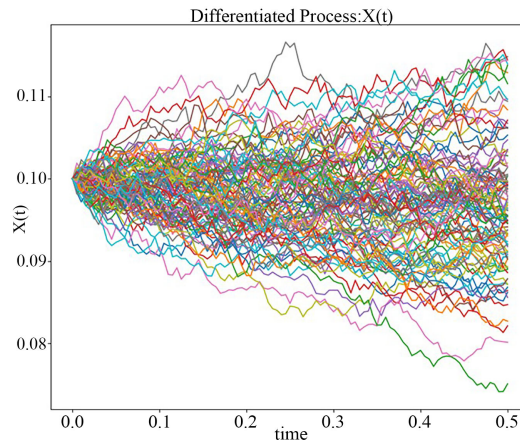


Figure 1. Curve graph of 100 paths of CIR model  
图 1. CIR 模型的 100 条轨道曲线图

利用构造的统计量  $\hat{K}, \hat{b}, \hat{\theta}$ , 反向估计  $K, b, \theta$ , 并与真实值对比误差。下面给出具体算法步骤, 见表 1。

Table 1. Numerical estimation algorithm for parameters in the CIR model  
表 1. CIR 模型中估计量的数值算法

**算法:** CIR 模型的参数估计量

**Step 1:** 取初始参数初始值  $K = 0.21459$ ,  $b = 0.08579$ ,  $\theta = 0.07830$ ,  $n = 100$ ,  $X_0 = 0.1$ ,  $T = 0.5$  (代表半年), 其  $n$  为  $[0, T]$  的划分份数,  $dt = \frac{1}{n}$ ;

## Continued

**Step 2:** 将方程(1)式离散化为:

$$X_t = X_{t-1} + 0.21459(0.08579 - X_{t-1})dt + 0.0783X_{t-1}\varepsilon\sqrt{dt}$$

生成  $X_t$  的 100 条样本轨道; 其中  $\varepsilon \sim N(0, 1)$ ;

**Step 3:** 取出  $t_1$ 、 $t_2$  时刻与轨道随机相交的一个点以及  $t_2$ 、 $t_3$  时刻与轨道相交的一组数据点;

**Step 4:** 将离散化数据代入  $\hat{K}, \hat{b}, \hat{\theta}$  估计量的表达式, 得到参数的估计值。

由参数  $\hat{K}, \hat{b}, \hat{\theta}^2$  的表达式可以看出, 参数值随着取值不同初始时刻, 其结果是不一样的。假设  $X_{t_1}(\omega)$  取坐标第 19 时刻的 100 维数据里面的任意一个,  $X_{t_2}(\omega)$  取坐标第 20 时刻的 100 维数据, 将  $X_{t_2}(\omega)$  的 100 维数据随机选取一个数值当作  $t_3$  时刻的初始值,  $X_{t_3}(\omega)$  是坐标第 21 时刻的 100 维数据, 这里  $t_2 - t_1 = h = 1$ 。将上面得到的数据执行表 1 中的步骤 4, 得到模拟值随着时间取值变化的误差值, 见表 2。

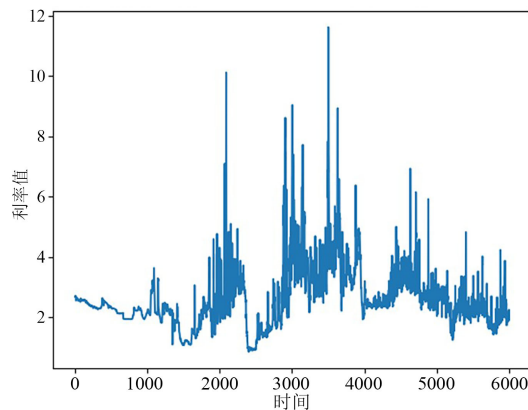
**Table 2.** Simulated values and error results of parameters

**表 2.** 参数的模拟值及误差结果

时间 $t_i$	$K = 0.21459$		$\theta = 0.07830$		$b = 0.08579$	
	模拟值	$E( K - \hat{K} )$	模拟值	$E( \theta - \hat{\theta} )$	模拟值	$E( b - \hat{b} )$
20	0.80350	0.58841	0.02064	0.05766	0.814179	0.728389
40	0.40278	0.18819	0.03313	0.04517	1.077606	0.991816
60	0.42326	0.20867	0.05072	0.02758	0.99641	0.91062
80	0.3865	0.17191	0.07480	0.0035	0.98600	0.90021
100	0.20014	0.01445	0.04172	0.05434	0.90529	0.8195

数值结果显示: 当取值时刻在横坐标轴上较大时, 利用期望方差法得到的 CIR 中的参数估计值与真实假设值越接近, 模拟值与真实值之间的误差项越小, 因此验证期望方差法的可行性。

### 3. 实证研究



**Figure 2.** R007 interest rate sequence diagram

**图 2.** R007 利率时序图

中国市场短期利率有很多种类型, 用哪一种类型利率作为中国瞬时利率的最佳替代是实证研究的一类重要问题。潘冠中[18]给出了解决这一问题的两个原则, 即相关性原则和成交量最大、选择交易最频繁的利率品种原则; 同时根据这两个原则论证了银行间质押式 7 天回购利率(R007)是瞬时利率的最佳近似

代替。本文选择交易 1 个月到期收益率近似 R007 利率作为样本，时间从 1999 年 6 月 17 日到 2023 年 6 月 25 日，总的容量为 6000。数据来源于 Wind 数据库，相应的时间步长为 1 (单位为：天)，运行环境在 Anaconda3 中的 Jupyter notebook，图 2 给出了利率收盘价随时间的变化曲线。

对图 2 每间隔 50 个数据作为一组，得到 120 条曲线，如图 3 所示。

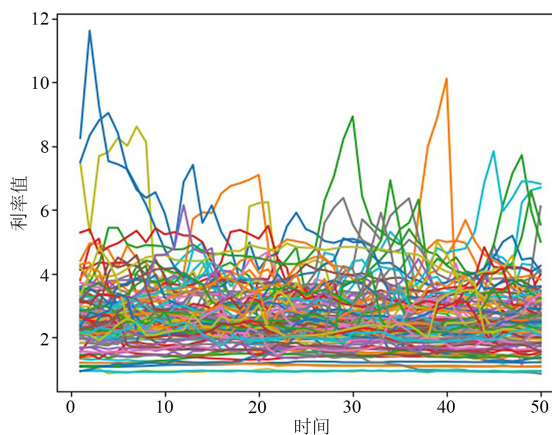


Figure 3. 120 interest rate curve graphs  
图 3. 120 条利率曲线图

在该实例中， $X_{t_1}(\omega)$  可以取到 0 到 49 的任意一个时刻，假设  $X_{t_1}(\omega)$  取坐标第 19 时刻的 120 维数据里面的任意一个，其中  $t_2 - t_1 = h = 1$ ，则  $X_{t_2}(\omega)$  代表横坐标第 20 的 120 维数据里面的全部数据。将得到的离散数据带入 CIR 模型的参数估计量，可得参数  $K$ 、 $b$ 、 $\theta$  的估计值见表 3。

Table 3. Parameter estimation values in the CIR model  
表 3. CIR 模型中的参数估计值

参数	$K$	$\theta$	$b$
模拟值	0.1618	0.7818	0.99324

则中国市场短期利率 CIR 模型显示表达式为：

$$dX_t = 0.1618(0.99324 - X_t)dt + 0.7818X_t dB_t \quad (2)$$

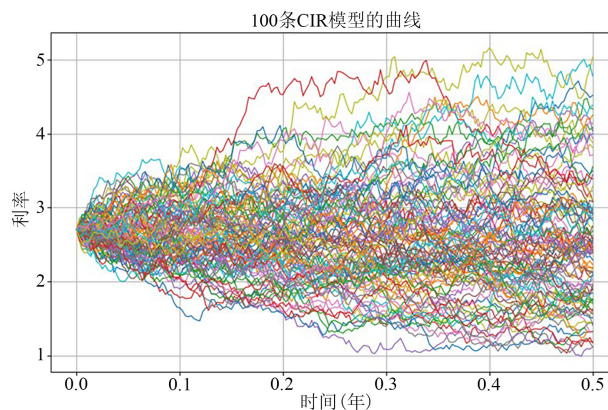


Figure 4. Simulate 100 curves for Equation (2)  
图 4. 对(2)式模拟 100 条曲线

也就是说, 在 1999 年 6 月 17 日到 2023 年 6 月 25 日期间, 中国市场短期利率偏长期均衡利率水平的速度为 0.1618, 中国货币市场的长期均衡利率水平为 0.99324, 中国短期利率过程的瞬时波动率为 0.7818。最后我们用 python 画出方程(2)的 100 条样本轨道, 刻画中国货币市场短期利率的动态变化规律。其中把 1999 年 6 月 17 日的利率收盘价数据作为初始值  $X_0 = 2.7$ ,  $n = 180$ ,  $T = 0.5$  (代表半年), 其  $n$  为  $[0, T]$  的划分份数,  $dt = \frac{1}{n}$  代表每间隔一天, 对(2)式模拟 100 条曲线如图 4 所示。

#### 4. 结论

本文采用 CIR 模型来描述中国货币市场短期利率的动态特征, 使用期望方差法对 CIR 模型进行参数估计。随着随机微分方程参数个数的增加, 经典的极大似然估计方法估计效果明显下降。期望方差法可以提高随机微分方程参数估计的准确性。进一步, 利用蒙特卡洛模拟方法得到 CIR 模型的估计值随着时刻变大收敛到参数真实值, 从实验角度验证了估计量的准确性。最后实证分析, 选取银行间质押式 7 天回购利率(R007)近似代替瞬时利率作为样本数据, 得到 CIR 模型的显示表达式, 从而描述出中国货币市场利率的动态变化规律。

#### 基金项目

辽宁省自然科学基金指导计划项目(2019-ZD-0087)。

#### 参考文献

- [1] Feng, X. and Xie, D. (2011) Application of MCMC Algorithm in Interest Rate Modeling. [http://www.researchgate.net/publication/50864448\\_Application\\_of\\_MCMC\\_Algorithm\\_in\\_Interest\\_Rate\\_Modeling](http://www.researchgate.net/publication/50864448_Application_of_MCMC_Algorithm_in_Interest_Rate_Modeling)
- [2] Feng, X. and Xie, D. (2012) Bayesian Estimation of CIR Model. *Journal of Data Science*, **10**, 271-280.
- [3] 高利率. CIR 模型的模拟及参数估计分析研究[D]: [硕士学位论文]. 上海: 上海交通大学, 2015.
- [4] 马笑天. 短期利率扩散模型参数估计及实证分析[D]: [硕士学位论文]. 上海: 上海财经大学, 2022.
- [5] 张玉桂, 苏云鹏, 杨宝臣. 基于 Vasicek 和 CIR 模型的 SHIBOR 期限结构实证分析[J]. *统计与信息论坛*, 2009, 24(6): 44-48.
- [6] 吴思远. CIR 模型在中国市场的应用[D]: [硕士学位论文]. 合肥: 中国科学技术大学, 2017.
- [7] 吴方滢. 随机环境下平稳 CIR 模型的参数估计[D]: [硕士学位论文]. 银川: 北方民族大学, 2023.
- [8] 王泽锋, 刘俊锋. 单因子利率期限结构模型的实证检验[J]. *统计与决策*, 2007(21): 28-30.
- [9] Valdivieso, L., Schoutens, W. and Tuerlinckx, F. (2009) Maximum Likelihood Estimation in Processes of Ornstein-Uhlenbeck Type. *Statistical Inference for Stochastic Processes*, **12**, 1-19. <https://doi.org/10.1007/s11203-008-9021-8>
- [10] Schneider, G., Craigmile, P.F. and Herbei, R. (2017) Maximum Likelihood Estimation for Stochastic Differential Equations Using Sequential Gaussian-Process-Based Optimization. *Technometrics*, **59**, 178-188. <https://doi.org/10.1080/00401706.2016.1153522>
- [11] 王素丽, 吕燕. 一类非线性随机微分方程的参数估计[J]. *吉林大学学报(理学院)*, 2017, 55(2): 289-293.
- [12] Fergusson, K. and Platen, E. (2015) Application of Maximum Likelihood Estimation to Stochastic Short Rate Models. *Annals of Financial Economics*, **10**, Article ID: 150009. <https://doi.org/10.1142/S2010495215500098>
- [13] Kládívko, K. (2007) Maximum Likelihood Estimation of the Cox-Ingersoll-Ross Process: The Matlab Implementation. *Technical Computing Prague*, **7**, 1-8.
- [14] Ait-Sahalia, Y. (2002) Maximum Likelihood Estimation of Discretely Sampled Diffusions: A Closed-Form Approximation Approach. *Econometrica*, **70**, 223-262. <https://doi.org/10.1111/1468-0262.00274>
- [15] Beskos, A., Papaspiliopoulos, O. and Roberts, G. (2009) Monte Carlo Maximum Likelihood Estimation for Discretely Observed Diffusion Processes. *The Annals of Statistics*, **37**, 223-245. <https://doi.org/10.1214/07-AOS550>
- [16] Singer, H. (2002) Parameter Estimation of Nonlinear Stochastic Differential Equations: Simulated Maximum Likelihood versus Extended Kalman Filter and Itô-Taylor Expansion. *Journal of Computational and Graphical Statistics*, **11**, 972-995. <https://doi.org/10.1198/106186002808>

- 
- [17] 齐凤团. 随机微分方程的参数估计[D]: [硕士学位论文]. 济南: 山东大学, 2017.
- [18] 潘冠中. 单因子利率期限结构模型参数估计的数据选择[J]. 数量经济技术经济研究, 2004, 21(9): 71-77.
- [19] Cox, J.C., Ingersoll, J.E. and Ross, S.A. (1985) A Theory of the Term Structure of Interest Rates. *Econometrica*, **53**, 385-407. <https://doi.org/10.2307/1911242>
- [20] Fan, J.Q. and Zhang, C.M. (2003) A Reexamination of Diffusion Estimators with Applications to Financial Model Validation. *Journal of the American Statistical Association*, **98**, 118-134. <https://doi.org/10.1198/016214503388619157>