

带有抢占优先权和重试的排队系统的优化分析

薛雅丹

燕山大学理学院, 河北 秦皇岛

收稿日期: 2023年12月21日; 录用日期: 2024年2月16日; 发布日期: 2024年2月23日

摘要

本文研究了带有抢占优先权和重试的M/M/1排队系统。首先, 采用概率生成函数的方法, 得到了系统的稳态概率和主要性能指标。然后考虑了双目标优化的问题, 旨在同时最小化系统成本和顾客逗留时间, 借助NSGA-II算法来寻找Pareto最优解集。最后建立了以最优成本为因变量, 非优先权顾客的到达率、最优逗留时间以及最优逗留时间的负指数为自变量建立了回归模型, 进行了回归分析及模型的显著性检验。本文的分析能够使系统在提高服务质量的同时最小化成本, 研究结论对系统管理者来说具有一定的参考价值。

关键词

抢占优先权, 重试排队, 双目标优化, 回归分析

Optimization Analysis of Queueing Systems with Preemptive Priority and Retrial

Yadan Xue

School of Science, Yanshan University, Qinhuangdao Hebei

Received: Dec. 21st, 2023; accepted: Feb. 16th, 2024; published: Feb. 23rd, 2024

Abstract

In this paper, the M/M/1 queueing system with preemption priority and retrial is studied. First, the steady state probability and main performance measures of the system are obtained by using probability generating function method. Then, the problem of Bi-objective optimization is considered to minimize both system cost and customer' sojourn time, and NSGA-II algorithm is used to find the optimal solution set of Pareto. Finally, a regression model is established with the optimal cost as the dependent variable, the arrival rate of non-priority customers, the optimal sojourn time and the negative index of the optimal sojourn time as independent variables, the regression

文章引用: 薛雅丹. 带有抢占优先权和重试的排队系统的优化分析[J]. 统计学与应用, 2024, 13(1): 91-99.

DOI: 10.12677/sa.2024.131010

analysis and the significance test of the model are carried out. The analysis of this paper can improve the service quality of the system while minimizing the cost, and the research conclusion has a certain reference value for system managers.

Keywords

Preemption Priority, Retrial Queue, Bi-Objective Optimization, Regression Analysis

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

在优先权排队系统中,高优先权顾客相对于低优先权顾客有优先被服务的权利。White 和 Christie [1] 研究了抢占优先权排队系统,获得了稳态下系统中高优先权顾客和低优先权顾客的平均队长。作为该模型的拓展,Avi-Itzhak 和 Naor [2] 考虑多顾客类型和一般服务时间的情况,他们假设被抢占的顾客再次获得服务时从被中断点重启服务,推导出多顾客类型一般服务时间的抢占优先权排队系统的性能指标。对于非抢占优先权排队的情况,Mores [3] 的著作中给出两类优先权顾客的 M/M/1 非抢占优先权排队系统的平均队长等性能指标。后来 Wang 等 [4] 研究了 M/M/1 非抢占优先权排队系统中的均衡策略,他们考虑了可观测和不可观测的情况,得出了顾客相应的均衡加入策略。而 Li 等 [5] 将不可观测的排队扩展到了更一般的多服务器情况,研究了具有同质顾客的 M/M/n 非抢占优先权排队的均衡策略。关于优先权排队的理论分析已经较为成熟,许多学者开始注重研究优先权排队的应用价值。Niyato 等 [6] 把非抢占优先权的排队系统应用到无线网络中,讨论在不同休眠与工作策略下的系统性能。Wang 等 [4] 提出用优先权排队系统来刻画认知无线电系统,探索改善服务质量的频谱管理方式。Do 等 [7] 基于队长不可见的优先权排队模型,研究了认知无线网络的社会最优策略。

重试排队系统是一个具有很强实际应用背景的排队模型。它在许多通信过程的性能分析中起着至关重要的作用。包括局域网和广域网、交换系统、共享总线局域网、数字蜂窝移动网络等。目前关于单服务台重试排队系统的理论分析已有大量的成果,Wang 和 Zhang 研究了不同信息水平下单服务器重试队列中的均衡加入策略和社会最优加入策略 [8]。张峰等研究了带有服务台休假和可修的重试排队系统,利用补充变量法和嵌入马尔科夫链求出了系统的稳态解,并进一步给出该系统的个体均衡策略和社会最优策略 [9]。Jailaxmi 对具有一般重试时间、M 休假和冲突的 M/G/1 重试队列进行了性能分析 [10]。而 Lakaour 等考虑了具有碰撞和传输错误的 M/M/1 重试队列 [11]。Goel 和 Kulshrestha 将重试策略的呼叫缓冲策略运用到认知无线网络中,整个系统采用多维连续时间马尔科夫链建模,并据此导出系统的性能指标 [12]。张钰和王金亭 [13] 研究了服务台不可靠的 M/M/1 常数率重试排队系统中顾客的均衡进队策略,并建立单位时间内服务商的收益和社会福利函数。比较发现,披露队长信息不一定能提高服务商收益和社会福利。

然而,大多数研究都关注单目标优化的问题,然后实际中需要同时考虑优化多个目标函数。Tavakkoli [14] 建立了双目标优化模型,同时解决了具有拥堵和定价策略的设施位置问题。Khodemani [15] 提出了双目标分层枢纽选址问题,同时最小化了总成本和总行程。本文考虑了一个基于抢占优先权和重试的 M/M/1 排队系统,并且考虑了双目标优化问题,旨在最小化系统成本和顾客的等待时间。最后建立了最小成本和最小逗留时间的回归模型,在诸多领域可以为系统管理者提供一些建议。

2. 模型描述

本模板考虑一个单服务器，两类顾客的 M/M/1 重试排队系统，其中 PU 为优先权顾客，SU 为非优先权顾客。假设优先权顾客和非优先权顾客的到达间隔分别服从参数为 λ_p 和 λ_s 的指数分布。服务时间也服从指数分布，参数分别为 μ_p 和 μ_s 。当非优先权顾客到达系统时，如果服务台处于空闲状态，它将立即获得服务。否则该用户将会进入一个无限空间重试轨道。当服务台空闲时，轨道中排在队首的顾客将会通过重试来获取服务。重试的时间间隔服从参数为 θ 的指数分布。假定两类顾客的到达间隔，服务时间，非优先权顾客的重试时间间隔都是相互独立的。在非优先权顾客的服务时间内，如果有优先权顾客到达，将会抢占非优先权顾客的服务。因此，服务台可以处于三种状态：空闲、为非优先权顾客服务、为优先权顾客服务。

系统的状态被描述为 $(C(t), X(t))$ 的二维随机过程，其中 $X(t)$ 表示重试轨道中的次用户数量， $C(t)$ 表示服务台的状态， $C(t)$ 取值为 0,1,2，分别表示服务台空闲，为优先权顾客服务，为非优先权顾客服务。

系统的状态和一步转移概率如图 1 所示。

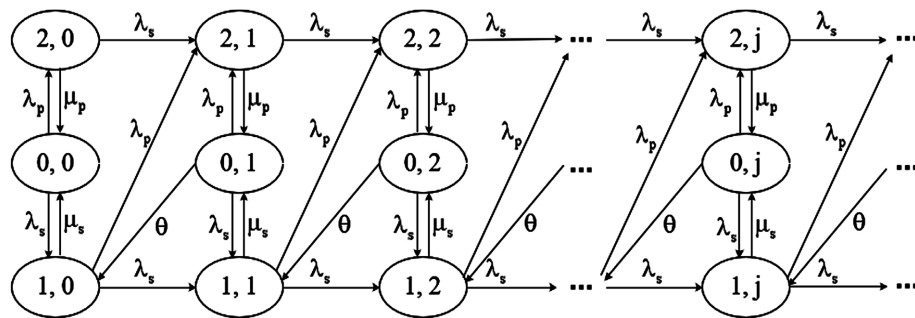


Figure 1. Histogram for the regression residuals
图 1. 回归残差项直方图

3. 稳态分析

定理 1 系统处在各个状态下的概率分别如下：

$$P_0(1) = \frac{\mu_p \mu_s - \lambda_s (\lambda_p + \mu_p)}{\mu_s (\lambda_p + \mu_p)},$$

$$P_1(1) = \frac{\lambda_s}{\mu_s},$$

$$P_2(1) = \frac{1}{\lambda_p + \mu_p}.$$

证明 定义母函数为定义 $P(i, j) = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{C(t) = i, N(t) = j\}$ 表示状态 i 下的平稳概率，定义生成函数

$$P_i(z) = \sum_{j=0}^{\infty} z^j P(i, j), \quad i=0,1,2, \quad \text{其中}, \quad |z| \leq 1.$$

系统的平衡方程如下：

$$(\lambda_p + \lambda_s)P(0,0) = \mu_p P(2,0) + \mu_s P(1,0), \quad (1)$$

$$(\lambda_p + \lambda_s + \theta)P(0,j) = \mu_p P(2,j) + \mu_s P(1,j), \quad j > 1, \quad (2)$$

$$(\lambda_p + \lambda_s + \mu_s)P(1,0) = \lambda_s P(0,0) + \theta P(0,1), \quad (3)$$

$$(\lambda_p + \lambda_s + \mu_s)P(1, j) = \lambda_s P(0, j) + \lambda_s P(1, j-1) + \theta P(0, j+1), \quad j > 1, \quad (4)$$

$$(\lambda_s + \mu_p)P(2, 0) = \lambda_p P(0, 0), \quad (5)$$

$$(\lambda_s + \mu_p)P(2, j) = \lambda_s P(2, j-1) + \lambda_p P(0, j) + \lambda_p P(1, j-1), \quad j > 1, \quad (6)$$

方程两边同时乘以 z^j ，然后对它们求和，就得到：

$$(\lambda_p + \lambda_s + \theta)P_0(z) - \theta P(0, 0) = \mu_p P_2(z) + \mu_s P_1(z), \quad (7)$$

$$(\lambda_p + \lambda_s + \mu_s)P_1(z) = \lambda_s P_0(z) + \lambda_s z P_1(z) + \frac{\theta}{z} [P_0(z) - P(0, 0)], \quad (8)$$

$$(\lambda_s + \mu_p)P_2(z) = \lambda_p P_0(z) + \lambda_s z P_2(z) + \lambda_p z P_1(z), \quad (9)$$

结合(7)和(8)然后消去 $P(0, 0)$ ，再结合(9)，并约去 $1-z$ ，我们得到：

$$\lambda_s [P_0(z) + P_1(z) + P_2(z)] = \mu_s P_1(z). \quad (10)$$

将 $z=1$ 代入式(7)，(9)和(10)，利用归一化条件，即可得到系统处在各状态下的平稳概率表达式。

4. 性能指标

定理 2 系统处在各状态 $i, (i=1, 2, 3)$ 下的队列长度分别如下：

$$P_0'(1) = \frac{\lambda_s^2 (\lambda_p + \mu_s) \left[(\lambda_p + \mu_p)^2 (\lambda_p + \lambda_s + \theta) + \mu_s (\lambda_p + \mu_p + \lambda_s + \theta) \right]}{\mu_s (\lambda_s + \theta) (\lambda_p + \mu_p) \left\{ (\lambda_s + \theta) [\mu_p \mu_s - \lambda_s (\lambda_p + \mu_p)] - \lambda_s (\lambda_p + \mu_s) (\lambda_p + \mu_p) \right\}} + \frac{\lambda_s^2 (\lambda_p + \mu_p) + \lambda_s}{\mu_s (\lambda_s + \theta) (\lambda_p + \mu_p)},$$

$$P_1'(1) = \frac{\lambda_s^2 \left[(\lambda_p + \mu_p)^2 (\lambda_p + \lambda_s + \theta) + \mu_s (\lambda_p + \mu_p + \lambda_s + \theta) \right]}{\mu_s (\lambda_p + \mu_p) \left\{ (\lambda_s + \theta) [\mu_p \mu_s - \lambda_s (\lambda_p + \mu_p)] - \lambda_s (\lambda_p + \mu_s) (\lambda_p + \mu_p) \right\}},$$

$$P_2'(1) = \frac{\lambda_s^2 \lambda_p (\lambda_p + \mu_s) \left[(\lambda_p + \mu_p)^2 (\lambda_p + \lambda_s + \theta) + \mu_s (\lambda_p + \mu_p + \lambda_s + \theta) \right]}{\mu_p \mu_s (\lambda_s + \theta) (\lambda_p + \mu_p) \left\{ (\lambda_s + \theta) [\mu_p \mu_s - \lambda_s (\lambda_p + \mu_p)] - \lambda_s (\lambda_p + \mu_s) (\lambda_p + \mu_p) \right\}} + \frac{(\lambda_p + \lambda_s + \theta) \left[\lambda_s^2 (\lambda_p + \mu_p) + \lambda_s \right]}{\mu_p \mu_s (\lambda_s + \theta) (\lambda_p + \mu_p)}.$$

证明 对(7)，(9)，(10)分别求导得：

$$(\lambda_p + \lambda_s + \theta)P_0'(z) = \mu_p P_2'(z) + \mu_s P_1'(z), \quad (11)$$

$$(\lambda_s + \mu_p)P_2'(z) = \lambda_p P_0'(z) + \lambda_s P_2(z) + \lambda_s z P_2'(z) + \lambda_p P_1(z) + \lambda_p z P_1'(z), \quad (12)$$

$$\lambda_s [P_0'(z) + P_1'(z) + P_2'(z)] = \mu_s P_1'(z) - \lambda_s P_1(z). \quad (13)$$

将 $z=1$ 代入(11)~(13)，并进行一系列求解，即可得到 $P_0'(1), P_1'(1), P_2'(1)$ 的表达式。

定理 3 平均系统队长和平均轨道队长分别表示如下：

$$N_s = \frac{\lambda_s \left[(\lambda_p + \mu_p)^2 (\lambda_p + \lambda_s + \theta) + \mu_s (\lambda_p + \mu_p + \lambda_s + \theta) \right]}{(\lambda_p + \mu_p) \left\{ (\lambda_s + \theta) [\mu_p \mu_s - \lambda_s (\lambda_p + \mu_p)] - \lambda_s (\lambda_p + \mu_s) (\lambda_p + \mu_p) \right\}},$$

$$N_o = \frac{\lambda_s \left[(\lambda_p + \mu_p)^2 (\lambda_p + \lambda_s + \theta) + \mu_s (\lambda_p + \mu_p + \lambda_s + \theta) \right]}{(\lambda_p + \mu_p) \left\{ (\lambda_s + \theta) [\mu_p \mu_s - \lambda_s (\lambda_p + \mu_p)] - \lambda_s (\lambda_p + \mu_s) (\lambda_p + \mu_p) \right\}} - \frac{\lambda_s}{\mu_s}.$$

证明 服务台处于状态 i 时, 轨道中次用户的平均数量:

$$E[R] = \sum_{j=0}^{\infty} j P(i, j), \quad i = 0, 1, 2, \quad (14)$$

因此, 轨道中次用户的平均数量为:

$$E[N] = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=1}^{\infty} j P(i, j) = P'_0(1) + P'_1(1) + P'_2(1), \quad (15)$$

系统中次用户的平均数量:

$$E[N_s] = \sum_{i=0}^4 \sum_{j=1}^{\infty} j P(i, j) + P(1) = P'_0(1) + P'_1(1) + P'_2(1) + P_1(1). \quad (16)$$

将定理 3 得到的结果代入(15), (16), 即可得到队长的表达式。

定理 4 平均逗留时间和平均等待时间分别表示如下:

$$T_s(q) = \frac{(\lambda_p + \mu_p)^2 (\lambda_p + \lambda_s + \theta) + \mu_s (\lambda_p + \mu_p + \lambda_s + \theta)}{(\lambda_p + \mu_p) \left\{ (\lambda_s + \theta) [\mu_p \mu_s - \lambda_s (\lambda_p + \mu_p)] - \lambda_s (\lambda_p + \mu_s) (\lambda_p + \mu_p) \right\}},$$

$$T(q) = \frac{(\lambda_p + \mu_p)^2 (\lambda_p + \lambda_s + \theta) + \mu_s (\lambda_p + \mu_p + \lambda_s + \theta)}{(\lambda_p + \mu_p) \left\{ (\lambda_s + \theta) [\mu_p \mu_s - \lambda_s (\lambda_p + \mu_p)] - \lambda_s (\lambda_p + \mu_s) (\lambda_p + \mu_p) \right\}} - \frac{1}{\mu_s}.$$

证明 非优先权用户在各个状态下的到达率均为 λ_s , 因此有效到达率 $\lambda_s q$ 。由 little 公式有 $\lambda_{eff} = \lambda_s$ 。

$T_s(q) = \frac{N_s}{\lambda_{eff}}$, $T(q) = \frac{N}{\lambda_{eff}}$ 即可得到平均逗留时间和平均等待时间的表达式。

5. 双目标优化

本节建立了双目标优化问题, 旨在同时优化系统成本和顾客的逗留时间。寻找使它们同时达到最优化的解集, 并考虑他们之间的回归关系, 进行回归分析。在本文所构建的模型中, 对两类顾客的服务率是重要的参数, 会影响整个系统的效率。因此, 构建了预期逗留时间 $T(\mu_p, \mu_s)$ 和成本函数 $C(\mu_p, \mu_s)$ 。成本函数的具体表达式如下:

$$C(\mu_p, \mu_s) = C_N N + C_0 P_0(1) + C_1 P(1) + C_2 P_2(1) + C_{\mu_p} \mu_p + C_{\mu_s} \mu_s$$

其中,

C_N : 表示每位顾客在系统中的单位时间成本;

C_0 : 表示系统处于空闲状态的单位时间成本;

C_1 : 表示系统为优先权顾客服务的单位时间成本;

C_2 : 表示系统为非优先权顾客服务的单位时间成本;

C_{μ_p} : 表示为优先权顾客服务期间服务率为提供的每个顾客的服务成本;

C_{μ_s} : 表示为非优先权顾客服务期间服务率为提供的每个顾客的服务成本。

该双目标优化问题表示如下:

$$\min_{\mu_p > 0, \mu_s > 0} [C(\mu_p, \mu_s), T(\mu_p, \mu_s)],$$

借助 NSGA-II 算法来寻找 Pareto 最优解集。其关键是找个各个目标函数之间的内在关系，找到使各个目标函数都达到最优的解集。在进行优化分析中，我们将参数取值为： $\lambda_p = 0.3$ ， $\lambda_s = 0.1$ ， $\theta = 0.5$ ， $C_N = 6$ ， $C_0 = 4$ ， $C_1 = 3$ ， $C_2 = 2$ ， $C_{\mu_p} = 2$ ， $C_{\mu_s} = 1$ ，并将 μ_p 和 μ_s 的取值限制为 $[1, 4]$ 。表 1 给出了 λ_s 取 0.1, 0.12, 0.14 时的 Pareto 最优解。只截取了部分数据展示在表 1 中。

Table 1. Pareto optimal solutions when λ_s takes different values

表 1. 取不同值的 Pareto 最优解

λ_s	μ_p^*	μ_s^*	T_p	C_p
0.1	1.475073314	1.747800587	3.655153045	11.28450989
	1.416422287	1.744868035	3.790018709	11.26049868
	1.463343109	1.642228739	3.812409810	11.24915167
	1.442815249	1.548387097	3.994672116	11.22526496
	1.337243402	1.630498534	4.140802830	11.21676229

0.12	1.612903226	1.894428152	3.419078047	11.93683962
	1.612903226	1.812316716	3.509850285	11.91721426
	1.516129032	1.909090909	3.592287923	11.90543647
	1.545454545	1.809384164	3.643974744	11.89113170
	1.483870968	1.832844575	3.747754708	11.88196083

0.14	1.697947214	2.137829912	3.214725923	12.56901813
	1.662756598	2.082111437	3.324987113	12.54096439
	1.665689150	1.964809384	3.437584626	12.51948699
	1.557184751	2.032258065	3.575408625	12.51184144
	1.612903226	1.906158358	3.602066321	12.50246684

图 2 展示了不同 λ_s 取值下，最优成本 C_p 和最优逗留时间 T_p 的关系图。从图中可以看出 C_p 随着 λ_s 的增大而增大。 C_p 和 T_p 成反比关系，图像形状类似负指数分布或对数分布。分别进行了建模和回归分析，发现负指数函数的拟合效果最优。

观察图 3 和图 4 可发现残差项近似服从正态分布。这意味着残差的正态性条件是满足的，可以建立各变量之间的回归关系。因此，建立多元回归模型如下：

$$C_p = \beta_0 + \beta_1 \lambda_s + \beta_2 T_p + \beta_3 e^{-T_p}.$$

基于表 1 中的数据，使用加权最小二乘估计法得到各个参数的估计量。从表 2 中可以看出，在 1% 的显著性水平下，回归模型和各系数都通过了显著性检验。调整后的 R^2 达到了 99.6%，所选取的自变量可以解释因变量 99.6% 的变化，这表明模型的拟合效果较好。因此，可得回归方程如下：

$$C_p = 6.497 + 23.829\lambda_s + 0.537T_p + 21.587e^{-T_p}$$

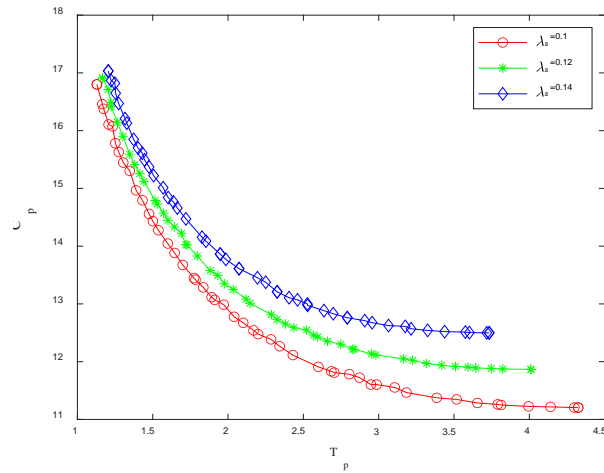


Figure 2. The trend chart of Pareto optimal solutions
图 2. Pareto 最优解走势图

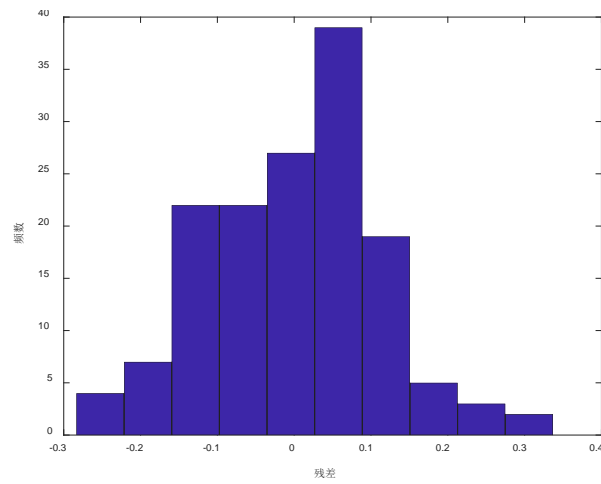


Figure 3. Histogram for the regression residuals
图 3. 回归残差项直方图

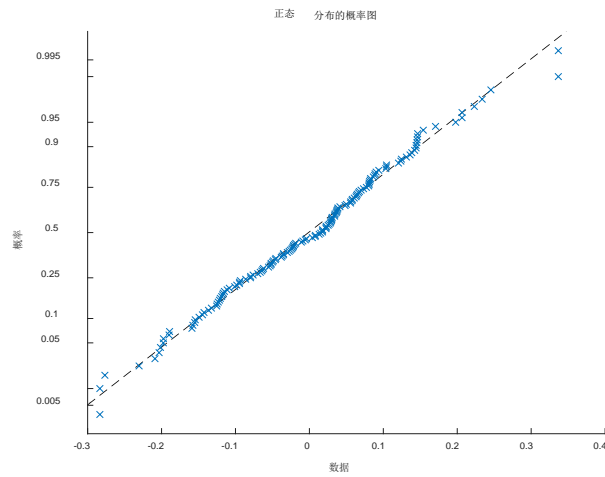


Figure 4. K-S test for the regression residuals
图 4. 回归残差项的 K-S 检验

Table 2. Regression results
表 2. 回归结果

变量	数值结果	显著性
λ_s	23.829	.000
T_p	0.537	.000
e^{-T_p}	21.587	.000
截距项	6.497	.000
F 统计量	9872.230	.000
调整后的 R^2	0.996	-

从回归方程中可以看出, λ_s 每变动一个单位, C_p 平均变动 23.829 个单位; T_p 每变动一个单位, C_p 平均变动 0.537 个单位; e^{-T_p} 每变动一个单位, C_p 平均变动 21.587 个单位。同时我们可以发现, 所有参数对 C_p 的影响都是正向的, 这是因为当 λ_s 变大时, 系统到达的顾客请求增加, 必然会导致系统成本的增加。 T_p 的估计值为正, 这是因为顾客逗留时间的增加会导致系统成本的增加。回归模型的建立有助于系统管理者在顾客到达率确定的情况下, 找到合适的两类顾客的服务率所需的最低成本。

6. 结论

本文考虑了基于抢占优先权和重试的 M/M/1 排队系统。利用概率生成函数的方法得到了模型的稳态概率, 并且给出了系统的主要性能指标。然后借助 NSGA-II 算法来进行双目标优化, 找到了同时使系统成本和顾客逗留时间的 Pareto 最优解集。最后以最优成本为因变量, 非优先权顾客到达率, 最优逗留时间和最优逗留时间的负指数为自变量建立了回归模型, 并对模型进行了显著性检验。对系统管理者来说具有一定的参考价值。

参考文献

- [1] White, H. and Christie, L.S. (1958) Queuing with Preemptive Priorities or with Breakdown. *Operations Research*, **6**, 79-95. <https://doi.org/10.1287/opre.6.1.79>
- [2] Avi-Itzhak, B. and Naor, P. (1963) Some Queuing Problems with the Service Station Subject to Breakdown. *Operations Research*, **11**, 303-320. <https://doi.org/10.1287/opre.11.3.303>
- [3] Morse, P.M. (1958) *Queues, Inventories and Maintenance*. Wiley, New York.
- [4] Wang, L.C., Wang, C.W. and Feng, K.T. (2011) A Queueing-Theoretical Framework for QoS-Enhanced Spectrum Management in Cognitive Radio Networks. *IEEE Wireless Communications*, **18**, 18-26. <https://doi.org/10.1109/MWC.2011.6108330>
- [5] Li, Q., Guo, P. and Wang, Y. (2020) Equilibrium Analysis of Unobservable M/M/n Priority Queues with Balking and Homogeneous Customers. *Operations Research Letters*, **48**, 674-681. <https://doi.org/10.1016/j.orl.2020.07.012>
- [6] Niyato, D., Hossain, E. and Fallahi, A. (2007) Sleep and Wakeup Strategies in Solar-powered Wireless Sensor/Mesh Networks: Performance Analysis and Optimization. *IEEE Transactions on Mobile Computing*, **6**, 221-236. <https://doi.org/10.1109/TMC.2007.30>
- [7] Do, C.T., Tran, N.H., Van, N.M., et al. (2012) Social Optimization Strategy in Unobserved Queueing Systems in Cognitive Radio Networks. *IEEE Communications Letters*, **16**, 1944-1947. <https://doi.org/10.1109/LCOMM.2012.111412.120830>
- [8] Wang, J. and Zhang, F. (2013) Strategic Joining in M/M/1 Retrial Queues. *European Journal of Operational Research*, **230**, 76-87. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2013.03.030>
- [9] 张峰. 排队服务系统中策略性顾客的经济博弈策略分析[D]: [博士学位论文]. 北京: 北京交通大学, 2014.
- [10] Jailaxmi, V., Arumuganathan, R. and Senthil, K.M. (2017) Performance Analysis of an M/G/1 Retrial Queue with General Retrial Time, Modified M-Vacations and Collision. *Operational Research*, **17**, 649-667.

-
- <https://doi.org/10.1007/s12351-016-0248-7>
- [11] Lakaour, L., Aïssani, D., Adel-Aïssanou, K., *et al.* (2019) M/M/1 Retrial Queue with Collisions and Transmission Errors. *Methodology and Computing in Applied Probability*, **21**, 1395-1406. <https://doi.org/10.1007/s11009-018-9680-x>
- [12] Goel, S. and Kulshrestha, R. (2022) Queueing Based Spectrum Management in Cognitive Radio Networks with Retrial and Heterogeneous Service Classes. *Journal of Ambient Intelligence and Humanized Computing*, **13**, 2429-2437. <https://doi.org/10.1007/s12652-021-03442-z>
- [13] 张钰, 王金亭. 服务台不可靠的重试排队系统均衡分析[J]. 运筹学学报, 2022, 26(2): 1-15.
- [14] Tavakkoli-Moghaddam, R., Vazifeh-Noshafagh, S., Taleizadeh, A.A., *et al.* (2017) Pricing and Location Decisions in Multi-Objective Facility Location Problem with $M/M/m/k$ Queueing Systems. *Engineering Optimization*, **49**, 136-160. <https://doi.org/10.1080/0305215X.2016.1163630>
- [15] Khodemani-Yazdi, M., Tavakkoli-Moghaddam, R., Bashiri, M., *et al.* (2019) Solving a New Bi-Objective Hierarchical Hub Location Problem with an $M/M/c$ Queueing Framework. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, **78**, 53-70. <https://doi.org/10.1016/j.engappai.2018.10.004>