

# 基于改进Zernike矩的圆形标志高精度定位方法

王晓青\*, 徐佳杰, 张月欣

沈阳理工大学信息科学与工程学院, 辽宁 沈阳

收稿日期: 2024年1月2日; 录用日期: 2024年2月18日; 发布日期: 2024年2月27日

## 摘要

在基于视觉的户外边坡监测中, 针对圆形标志中心定位精度低, 实效性差的难题, 提出一种改进的Zernike矩圆形标志高精度定位方法。首先对圆形标志图像进行二值化和形态学滤波处理, 然后利用Canny算子对二值化图像进行边缘检测, 实现圆形标志边缘的粗定位。其次结合Zernike矩法和大津法, 对粗定位得到的圆形标志边缘进行重定位, 通过Zernike矩法来重新定位边缘的位置, 并基于改进的大津法来确定圆形标志的亚像素边缘点。同时, 利用基于灰度梯度优化的方法来对亚像素边缘进行细化, 进一步提高定位的精度。最后利用最小二乘椭圆拟合法来实现圆形标志中心的高精度定位。通过实验证明, 改进的Zernike矩圆形标志高精度定位方法能够有效提高圆形标志的定位精度和实效性, 并具有更高的运行效率。

## 关键词

圆形标志, 高精度中心定位, Zernike矩

# Improved Zernike Moment Circular Mark High Precision Location Method

Xiaoqing Wang\*, Jiajie Xu, Yuexin Zhang

School of Information Science and Engineering, Shenyang Ligong University, Shenyang Liaoning

Received: Jan. 2<sup>nd</sup>, 2024; accepted: Feb. 18<sup>th</sup>, 2024; published: Feb. 27<sup>th</sup>, 2024

## Abstract

In vision-based outdoor slope monitoring, an improved high-precision positioning method for circular signs with Zernike moments is proposed to address the challenges of low accuracy and poor effectiveness of circular sign center positioning. Firstly, the circular sign image is binarized and morphology filtered, and then the edge detection of the binarized image is carried out using

\*通讯作者。

**Canny operator to achieve the coarse positioning of the edge of the circular sign. Secondly, the edge of the circular logo obtained by coarse localization is relocated by combining Zernike moment method and Otsu method to relocate the position of the edge and determine the sub-pixel edge points of the circular logo based on the improved Otsu method. Meanwhile, a grey scale gradient optimization based method is used to refine the sub-pixel edges to further improve the accuracy of the localization. Finally, the least-squares ellipse fitting method is used to achieve high-precision localization of the center of the circular sign. It is proved through experiments that the improved Zernike moment circular sign high-precision localization method can effectively improve the localization accuracy and effectiveness of circular signs with higher operational efficiency.**

## Keywords

Circular Sign, High Precision Center Positioning, Zernike Moment

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

在基于视觉的户外边坡监测领域，确保对边坡进行精准监测是至关重要的任务。然而，户外环境的复杂性和多变性使得边坡上的自然特征点受到环境因素的影响而变化，因此无法提供可靠的监测参考。为了克服这一挑战，我们需要采取额外的措施，即人为引入明显的标志物来实现精确定位。圆形标志物是一种理想的选择，因为它们具备旋转不变性和出色的稳定性。这些特性使得它们成为广泛应用于大型户外环境测量领域的人工标志物。通过在边坡上布置这些圆形标志物，并运用高级的计算机视觉技术，我们能够实现对它们的精确定位，从而实现对外边坡的高精度监测目标。

基于视觉的圆形特征标志定位中，目前定位的方法主要包括 Hough 变换及其相应的改进算法[1][2]，质心法及其相关改进方法[3]以及基于边缘检测和边缘拟合结合的方法[4]。其中基于 Hough 变换及相关改进方法求解参数多，计算量大，降低了算法的效率。边缘检测和质心法相结合的方法虽计算简单，但由于采集图像时几何形状受仿射变换等的影响，定位结果会有较大的偏差，从而影响定位的精度。基于边缘检测和边缘拟合的方法由相应的边缘检测方法得到圆形边缘信息，再通过边缘拟合方法精确拟合边缘信息，从而获取高定位中心而被广泛研究。

而边缘检测作为中心定位过程中的关键步骤，直接影响着圆形标志的定位精度。其中常用的像素级边缘检测算法包括基于一阶微分算子的方法 Sobel 算子、Roberts 算子、Prewitt 算子[5][6][7]和基于二阶微分算子的方法 Laplacian 算子和 Canny 算子[8][9]。常用的亚像素边缘检测算法主要分为矩方法、插值法和拟合法[10][11][12]。为了提高边缘检测的精度，目前研究者利用像素边缘检测算法和亚像素边缘检测算法相结合的方法获取亚像素边缘信息来实现高精度定位。文献[13]利用 Canny 算子及形态学滤波等相结合的方法提取边缘信息并细化，再利用空间矩提取亚像素边缘从而实现亚像素定位。文献[14]利用 Sobel 算子和 Zernike 矩相结合的方法实现亚像素定位。文献[15]利用 Canny 算子和改进的 Zernike 方法对圆形标志进行高精度定位。其中基于 Zernike 矩方法是亚像素边缘检测研究中的热点，被广泛应用，Ghosal 和 Mehrotra 首先提出利用 Zernike 矩来检测亚像素边缘的方法[16]，并在该算法中建立了理想阶跃灰度模型，但基于 Zernike 矩法边缘提取因其人工选取判定边缘的阈值，也降低了边缘检测的准确

性和实效性，并且因理想阶跃灰度模型和实际边缘模型存在差异，使得获得的亚像素边缘存在伪边缘信息，从而影响中心定位精度。

因此，针对上述问题，本文提出了一种基于 Zernike 矩的圆形标志高精度定位方法。本文方法主要包含以下 3 个方面内容：首先利用 HSI 颜色空间和形态学滤波方法对基于颜色的圆形标志进行自动识别处理，提取圆形标志特征，再利用 Canny 算子对圆形标志进行像素级边缘提取。其次通过 Zernike 矩方法提取亚像素边缘，利用大津法获取最佳阶跃灰度阈值判定亚像素边缘，再利用基于灰度梯度优化方法对亚像素边缘细化。最后通过最小二乘椭圆拟合法对获得的亚像素边缘信息进行拟合来实现圆形标志的高精度定位。具体流程如图 1 所示。

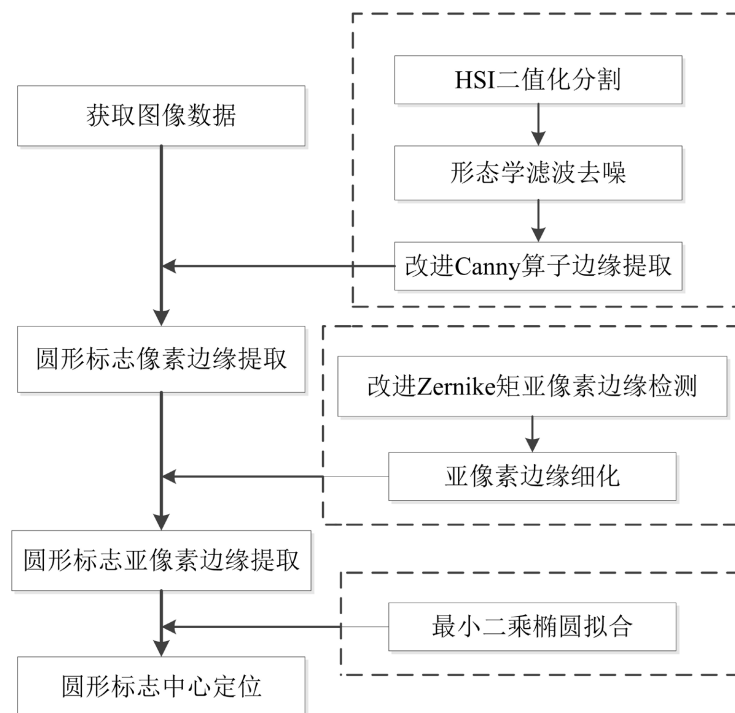


Figure 1. Flowchart of the method in this paper  
图 1. 本文方法流程图

## 2. 圆形标志像素级边缘提取

在定位之前需要对采集到的图像进行识别，首先通过颜色特征作为提取的标准，采用基于 HSI 颜色空间对图像进行二值化分割，对圆形标志物从背景分离出来，再利用形态学滤波即开运算和闭运算组合的方法进行背景噪声消除。以便后续的边缘检测和中心定位。

由图 1 所示，然后利用圆形标志特征提取限制条件获取只含圆形标志点的边缘；圆形标志点检测采用由像素级至亚像素级的方法进行精确提取。其中针对像素级边缘圆形轮廓提取是采用 Canny 算子整像素检测圆形标志点的边缘信息。

Canny 算法是基于高斯函数提出的一种边缘检测方法，是目前应用比较广泛的基于最优准则的一种像素级边缘提取算法，相比较其他像素级边缘检测方法，该方法平衡了噪声对于边缘检测的影响，能够很好的达到去噪的目的。因此本文采用了改进的 Canny 算法[17]提取像素级边缘。然后利用改进的 Zernike 矩获取圆形标志的亚像素级边缘。下面具体阐述改进的 Zernike 矩的亚像素提取方法。

### 3. 圆形标志亚像素级边缘提取

#### 3.1. 基于 Zernike 矩亚像素边缘检测原理

Zernike 矩算法的基本思想是通过计算四个参数来判断该点是否为边缘上的点[18]，图 2 为 Zernike 矩的理想边缘阶跃模型[16]。其中包括  $h$  为背景灰度值、 $k$  为灰度阶跃值、 $l$  为模板中心到边缘的垂直距离， $\varphi$  为边缘与  $x$  轴的夹角。

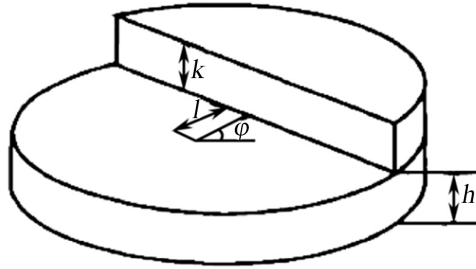


Figure 2. Ideal edge step model  
图 2. 理想边缘阶跃模型

根据上述四个参数，通过转换公式，令  $A_{nm}$  表示图像  $f(x,y)$  的 Zernike 矩，根据其旋转不变性的理论，则有

$$A_{nm} = (n+1)/\pi \iint_{x^2+y^2 \leq 1} f(x,y) V_{nm}^*(\rho,\theta) dx dy \quad (1)$$

其中  $(n+1)/\pi$  为归一化因子； $\rho$  为原点到像素点  $(x,y)$  的矢量距离； $\theta$  为  $\rho$  与  $x$  轴的夹角[15]。如果将图像旋转  $\varphi$  角度，则旋转后图像  $f(x,y)$  的 Zernike 矩  $A'_{nm}$  满足下面关系式

$$A'_{nm} = A_{nm} e^{-j\omega\varphi} \quad (2)$$

根据上述公式，对原始图像 Zernike 矩  $A_{00}$ 、 $A_{11}$ 、 $A_{20}$  进行计算，得到旋转后图像的 Zernike 矩  $A'_{00}$ 、 $A'_{11}$ 、 $A'_{20}$  满足如下关系式

$$\begin{cases} A'_{00} = A_{00} \\ A'_{11} = A_{11} e^{-j\varphi} \\ A'_{20} = A_{20} \end{cases} \quad (3)$$

Zernike 矩亚像素边缘的 4 个参数  $h$ 、 $k$ 、 $l$  和  $\varphi$  的计算公式如下

$$\begin{cases} k = 3A'_{11}/2(1-l^2)^{3/2} \\ h = (A_{00} - k\pi/2 + k \arcsin l + kl\sqrt{1-l^2})/\pi \\ l = A_{20}/A'_{11} \\ \varphi = \arctan(\text{Im}(A_{11})/\text{Re}(A_{11})) \end{cases} \quad (4)$$

采用  $N \times N$  的 Zernike 矩模板[19]，其中  $N=7$ ，根据上述公式计算的参数，得到第  $i$  个亚像素边缘点  $P_i(x,y)$ ，其计算公式为

$$\begin{cases} x' = x + (Nl/2)\cos\varphi \\ y' = y + (Nl/2)\sin\varphi \end{cases} \quad (5)$$

### 3.2. 改进 Zernike 矩高精度提取边缘信息

通常基于 Zernike 矩算法亚像素边缘点的阈值判断条件为  $l \leq l_i \cap k \geq k_i$ ，其中  $l_i$  为距离阈值，通常  $l_i \leq \sqrt{2}/N$ ， $N$  为模板大小，这里取值为 7。 $k_i$  为灰度阶跃阈值，其对边缘信息影响显著；不同图像的边缘灰度阶跃阈值一般不同，在检测图像边缘时通常需要人工调节  $k_i$  值，当  $k_i$  取值较小时，则边缘会存在很多伪边缘信息；当  $k_i$  取值较大时，则可以有效地抑制伪边缘，但同时也会造成圆形标志边缘信息的丢失。因此为保证 Zernike 矩对圆形标志亚像素边缘检测的高精度及稳定性，需要对阈值的选取进行优化改进。因此本文提出基于天津法对边缘灰度阶跃阈值  $k_i$  进行优化选取。

天津法的判定准则为边缘区域和背景区域的类间方差[20]，取得最大类间方差时取的最佳阈值。设在  $N$  个像素点的图像中，梯度幅值为  $i$  的像素点个数为  $n_i$ 。则梯度幅值  $i$  出现的概率为  $p_i = n_i/N$ 。阈值  $t$  将图像分为前景边缘和背景两类，其出现的概率分别为  $\omega_0 = \sum_{i=0}^t p_i$ ，其均值为  $\mu_0 = \sum_{i=0}^t ip_i/\omega_0$  与  $\omega_1 = \sum_{i=t+1}^{l-1} p_i$ ，其均值为  $\mu_1 = \sum_{i=0}^t ip_i/\omega_1$ ，平均梯度幅值为  $\omega_t = \sum_{i=0}^t ip_i$ ，则得到两类的类间方差为

$$\sigma^2 = \omega_0(\mu_0 - \mu_t)^2 + \omega_1(\mu_1 - \mu_t)^2 \quad (6)$$

当方差  $\sigma^2$  为最大时，前景边缘和背景的差异为最大，即分割准确率最高，此时的灰度阈值  $k_i$  为最佳取值。

根据最佳灰度阈值  $k_i$  和距离阈值  $l_i$  对基于 Zernike 矩亚像素边缘进行计算，最终得到亚像素边缘点  $p_i(x, y)$ ，将其存放边缘点集  $\{S_i\}$  中。

图 3 中，传统 Zernike 矩方法推导亚像素边缘公式时，将理想阶跃模型作为边缘模型来计算，如图 3(a)所示。但在实际应用中其边缘存在着中间过渡区，如图 3(b)所示。

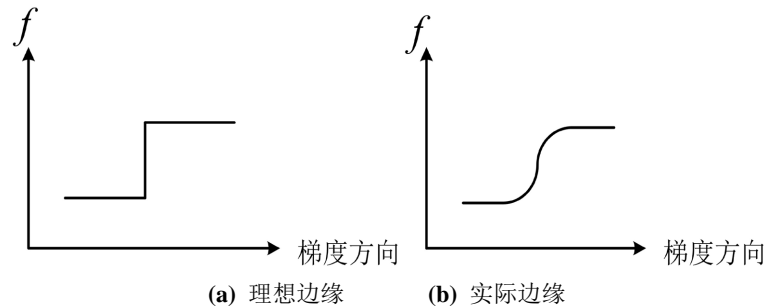


Figure 3. Grey scale step edge model  
图 3. 灰度阶跃边缘模型

因此，只利用理想阶跃模型检测边缘时会存在着伪边缘现象，有可能对后续的圆形标志点的中心定位产生影响。本文利用基于灰度梯度中心优化方法来对亚像素边缘进行细化。该方法利用边缘点沿梯度方向灰度的一阶导数为高斯分布，则该分布中心值就是该梯度方向变化最大的位置，即边缘所在之处，从而可以找到细化后精确的边缘点。

首先在通过基于改进的 Zernike 矩算法提取亚像素边缘后，利用最小二乘拟合法对所有边缘点进行拟合中心，即得到圆形标志物粗定中心。根据粗定中心与粗定边缘，得到每一边缘像素点对应的径向直线方程为

$$y = kx + b \quad (7)$$

其中

$$\begin{cases} k = (y_0 - y_i)/(x_0 - x_i) \\ b = y_0 - x_0(y_0 - y_i)/(x_0 - x_i) \end{cases} \quad (8)$$

式中,  $(x_0, y_0)$  为粗定位中心坐标;  $(x_i, y_i)$  为每一边缘点坐标, 选择某一边缘点沿其径向方向计算灰度沿梯度方向的一阶导数高斯函数求其中心灰度值。高斯函数为

$$f(x) = ae^{-(x-b)^2/c^2} \quad (9)$$

$b$  即为梯度灰度一阶导数高斯分布的中心值,  $p'_i(x_b, y_b)$  即细化后的边缘点所在位置。直至对所有边缘点进行细化。

综上所述, 本文所提出基于改进 Zernike 矩亚像素边缘检测方法其实现步骤描述如下。

步骤 1: 根据 Zernike 矩公式求出模板系数, 利用 Zernike 矩模板系数对像素级边缘进行卷积计算  $A_{00}$ ,  $A_{11}$ ,  $A_{20}$ 。

步骤 2: 基于大津法, 选取类间方差为最大时, 图像前景边缘与背景的分割达到最大时, 获取最佳灰度阈值  $k_i$ 。

步骤 3: 取某一像素级边缘点计算参数  $k$ 、 $l$  和  $\varphi$ , 并根据边缘点阈值判断条件  $l \leq l_i \cap k \geq k_i$ , 判断该点, 直至计算完所有亚像素边缘点。

步骤 4: 基于灰度梯度中心优化方法来对亚像素边缘进行细化。直至得到所有细化后的亚像素边缘点  $p'_i(x_b, y_b)$ 。

#### 4. 最小二乘椭圆拟合法定位中心

在图像采集过程中, 由于圆形标志物在经过透视投影变换后一般为平面椭圆[21], 将上述得到的亚像素边缘点集  $\{S_i\}$ , 利用最小二乘椭圆拟合法定位圆形标志物圆心。椭圆的一般方程为

$$F(x) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \quad (10)$$

通过最小二乘椭圆拟合法对边缘点进行拟合可解得参数  $b$ 、 $c$ 、 $d$ 、 $e$ 、 $f$ , 则椭圆中心点坐标计算公式为:

$$\begin{cases} x_0 = (be - cd)/(c - b^2) \\ y_0 = (bd - e)/(c - b^2) \end{cases} \quad (11)$$

最终得到圆形标志物中心点坐标为  $(x_0, y_0)$ 。

#### 5. 实验及结果分析

为了验证本研究方法在圆形标志中心定位方面的稳定性和精度, 我们分别进行两组实验: 对本文方法与质心法以及参考文献[13]进行对比分析验证。在稳定性对比实验中, 我们使用模拟生成的圆形标志图像来评估本研究方法在不同噪声条件下的稳定性。在精度对比实验中, 我们采用在真实室外环境中采集的图像, 以评估本文方法的定位精度。

##### 5.1. 稳定性实验

模拟生成一副理想的圆形图像, 该图像尺寸为 100 像素  $\times$  100 像素, 中心像素坐标为(50, 50), 半径为 25 像素, 如图 4 所示。

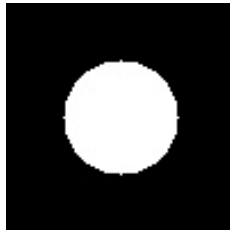


Figure 4. Ideal circle test image  
图 4. 理想圆测试图像

分别加入方差为( $\sigma = 0.005, 0.01, 0.02, 0.025$ )的高斯噪声和密度为( $d = 0.002, 0.004, 0.01$ )的椒盐噪声进行实验, 采用质心法、文献[13]和本文方法进行中心定位实验, 最后将得到的中心定位坐标与坐标真值求取均方根误差即 RMSE 值进行对比分析, 定位误差结果如表 1 所示。

Table 1. Comparison of centre positioning error results of various methods under different categories of noise  
表 1. 不同类别噪声下各类方法中心定位误差结果对比

| 定位方法    | 高斯噪声 $\sigma$ |       |       | 椒盐噪声 $d$ |       |
|---------|---------------|-------|-------|----------|-------|
|         | 0.05          | 0.01  | 0.02  | 0.02     | 0.01  |
| 质心法     | 0.018         | 0.032 | 0.037 | 0.021    | 0.032 |
| 文献[13]法 | 0.009         | 0.012 | 0.014 | 0.005    | 0.048 |
| 本文方法    | 0.009         | 0.01  | 0.013 | 0.007    | 0.032 |

从表 1 可以看到, 模拟圆形图像在不同噪声条件下三种方法的中心定位结果, 随着高斯噪声和椒盐噪声的逐渐增大, 上述三种方法的 RMSE 值也随之增大, 说明这些方法一定程度受高斯噪声和椒盐噪声影响, 但其中心定位 RMSE 值均能达到亚像素级别。本文受高斯噪声影响相对较小, 不同类别噪声条件下, 本文方法 RMSE 值微小于文献[13], 本文方法和文献[13]的 RMSE 值总体大于质心法。

### 5.2. 精度实验

本实验在室外环境下搭建小型斜坡模拟边坡, 通常红色最容易识别, 所以在斜坡上布设四个直径为 670 mm 的红色圆形标志点, 编号为 1~4 号, 使用 KS1A552-D 型号双目相机对红色圆形标志点进行图像采集, 分辨率为 720 像素  $\times$  1280 像素, 拍摄距离约为 3 m~4 m, 采集图像如图 5 所示。

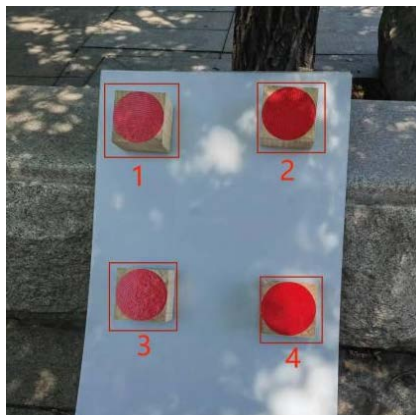


Figure 5. Collected circular landmark images  
图 5. 采集的圆形标志物图像

本文通过对采集圆形标志物图像进行中心定位对比实验，分别用质心法，文献[13]与本文方法对 4 个圆形标志进行中心定位，4 个圆心像素坐标 RMSE 结果对比如图 6 所示。

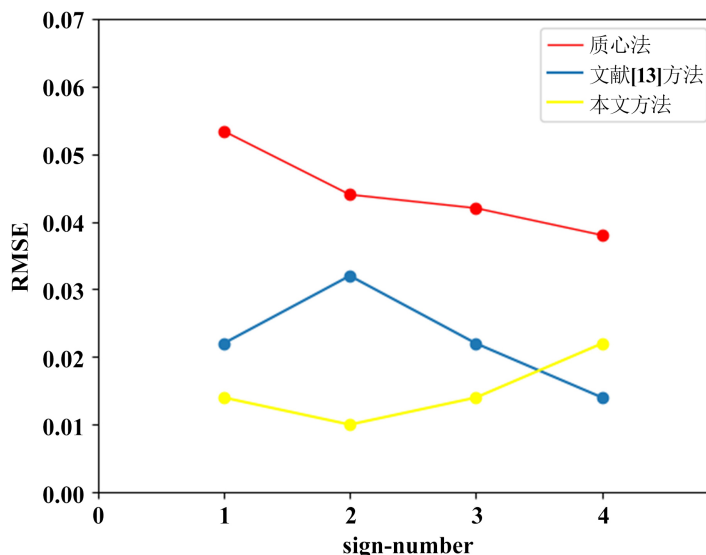


Figure 6. Comparison of RMSE results for centring of circular signs  
图 6. 圆形标志中心定位 RMSE 结果对比

从图 6 可以看到，本文提出的方法和其他两种方法得到的坐标真值的 RMSE 值均能达到亚像素。其中质心法、文献[13]和本文方法对 4 个点位 RMSE 值的平均值分别为 0.044、0.022 和 0.015 (单位: pixel)。其中本文 RMSE 的均值低于其他两种方法，说明本文的方法能较为准确的定位圆形标志，其平均精度达到 0.02 像素。

Table 2. Algorithm runtime  
表 2. 算法运行时间

| 算法类型     | 运行时间/ms | 定位精度/pixel |
|----------|---------|------------|
| 质心法      | 164     | 0.044      |
| 文献[13]方法 | 438     | 0.022      |
| 本文方法     | 316     | 0.015      |

得出三种方法的平均定位精度后，对三种方法的运行时间进行对比，如表 2 显示了这三种算法运行时间，可以清楚看到文献[13]方法和本文方法定位精度均高于质心法，但本文方法的运行时间小于文献[13]方法，其运行速度更快，与其相比效率提高了 27.85%。

## 6. 结论

本文介绍了一种改进的 Zernike 矩圆形标志高精度定位方法，该方法通过一系列图像处理步骤实现了优化的定位结果。首先，对图像进行了二值化和形态学滤波的预处理，然后采用 Canny 算子进行像素级边缘检测，并引入了基于大津法的最佳灰度阶跃阈值选取方法，以提高亚像素边缘检测的精确度。边缘细化处理通过基于灰度梯度的优化方法进一步提高了像素级边缘的准确性和连续性。最后，采用最小二乘椭圆拟合实现了中心定位。实验证明，本文方法在圆形标志高精度定位方面表现出色，最大平均误差不超过 0.02 个像素，定位精度明显优于质心法和文献[13]的方法。此外，本文方法还取得了显著的运行效率提升，



相较于文献[13], 提高了 27.85%。这种高精度定位方法具有广泛的应用潜力, 可用于工业自动化生产以提高产品的定位和识别、机器人导航以实现精确定位、视觉检测和测量领域(如三维重建、尺寸测量和目标跟踪等), 以及虚拟现实和增强现实领域, 为虚拟现实和增强现实应用提供更准确的定位支持。

当前的定位方法尚存在以下问题: 对光照和噪声敏感, 可能需要高计算资源和时间, 对硬件要求高。现有改进方法主要适用于静态场景中的标志定位, 对于动态或快速移动的目标需要进一步优化。未来的研究方向包括在提高精度的同时, 增强算法的鲁棒性、适用性、计算效率, 并通过实验证明和推广应用, 使改进的 Zernike 矩圆形标志高精度定位方法能够在各种复杂场景下实现准确可靠的定位。

### 基金项目

辽宁省教育厅青年项目 JYTQN2023058, 辽宁省科技厅计划项目 2022JH1/10800085, 沈阳理工大学科研启动支持项目 1010147001003。

### 参考文献

- [1] Zhou, T. and Papanikolopoulos, N. (2011) Enhancing the Randomized Hough Transform with K-Means Clustering to Detect Mutually-Occluded Ellipses. 2011 19th Mediterranean Conference on Control & Automation (MED), Corfu, 20-23 June 2011, 2011, 327-332. <https://doi.org/10.1109/MED.2011.5983040>
- [2] 邹荣, 赵稼宸, 凌俊, 等. 基于 Hough 投票空间的椭圆图像特征亚像素提取方法[J]. 光学技术, 2016, 42(2): 141-145.
- [3] 王林波, 王延杰, 邸男, 等. 基于几何特征的圆形标志点亚像素中心定位[J]. 液晶与显示, 2014, 29(6): 1003-1009.
- [4] 陈向阳. 基于 LabVIEW 的钢拱架定位系统开发[D]: [硕士学位论文]. 武汉: 华中科技大学, 2021.
- [5] 张萍萍, 李童, 李茹, 等. 一种改进的 Sobel 图像边缘检测算法及其实现[J]. 电视技术, 2022, 46(5): 42-45.
- [6] 焦瑾瑾. 基于 Roberts 边缘检测的数字媒体激光重现方法[J]. 激光杂志, 2022, 43(5): 197-200.
- [7] 姚智超, 楚晓亮, 范筠益, 等. 基于 Prewitt 算子的 X 波段雷达有效波高反演研究[J]. 系统工程与电子技术, 2022, 44(4): 1182-1187.
- [8] 陈思吉, 王晓红, 李运川. 改进 Laplace 的无人机图像边缘检测算法研究[J]. 测绘工程, 2021, 30(2): 36-44.
- [9] Guo, L.G. and Wu, S.T. (2023) FPGA Implementation of a Real-Time Edge Detection System Based on an Improved Canny Algorithm. *Applied Sciences*, 13, 870. <https://doi.org/10.3390/app13020870>
- [10] 刘利平, 孙建, 孙文悦. 改进 Zernike 矩的亚像素圆孔类零件测量方法[J]. 电子测量技术, 2023, 46(4): 69-77.
- [11] 张炳星, 高军伟, 王建冲, 等. 基于机器视觉的圆形垫圈尺寸测量系统设计[J]. 工具技术, 2023, 57(7): 141-145.
- [12] 韩东, 李煜祺, 武彦辉. 基于高斯拟合的亚像素边缘检测算法[J]. 计算机应用与软件, 2018, 35(6): 210-213+229.
- [13] 陈绍杰, 郑守住, 赵文明, 等. 视频测量椭圆标志中心点的高精度定位方法[J]. 测绘科学, 2018, 43(7): 121-127.
- [14] 刘悦, 朱均超. 基于改进 Zernike 矩的光斑图像亚像素边缘检测算法[J]. 激光杂志, 2021, 42(5): 32-35.
- [15] 郑守住, 汪本康, 陈绍杰, 等. 高速影像中圆形标志点的自动识别与定位[J]. 测绘科学技术学报, 2020, 37(4): 380-387.
- [16] Ghosal, S. and Mehrotra, R. (1993) Orthogonal Moment Operators for Subpixel Edgedetection. *Pattern Recognition*, 26, 295-306. [https://doi.org/10.1016/0031-3203\(93\)90038-X](https://doi.org/10.1016/0031-3203(93)90038-X)
- [17] 舒启林, 山博. 改进 canny 算子的亚像素定位算法[J]. 机械设计与制造, 2018(10): 165-168.
- [18] 刘军, 赵剑英, 池云. Zernike 矩算法实现焊缝中心线亚像素检测[J]. 沈阳理工大学学报, 2021, 40(4): 1-5, 10.
- [19] 高世一, 赵明扬, 张雷, 等. 基于 Zernike 正交矩的图像亚像素边缘检测算法改进[J]. 自动化学报, 2008, 34(9): 1163-1168.
- [20] 刘光宇, 王帅, 曹禹, 等. 几种经典阈值分割方法在图像处理中的应用研究[J]. 黄冈职业技术学院学报, 2022, 24(4): 99-103.
- [21] 王靖, 魏亮, 向文豪, 等. 考虑圆形特征边缘模糊和偏心误差修正的高精度相机标定方法[J]. 红外与激光工程, 2021, 50(12): 369-379.