Vocational Education 职业教育, 2021, 10(3), 160-163
Published Online July 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/ve
https://doi.org/10.12677/ve.2021.103026

Hans汉斯

大学生数学竞赛中中值定理的证明方法及技巧

刘　波，刘晓燕，李文彬

海军航空大学，山东 烟台
Email: Lauber@126.com

收稿日期：2021年6月3日；录用日期：2021年7月8日；发布日期：2021年7月15日

摘　要

中值定理作为高等数学中导数应用的必要环节，也是大学生数学竞赛中常考题目，由于定理较多，相似度较高，学生对于这类题目经常束手无策。本文通过分析比较及竞赛中例题选讲，拨云见日，让学生对这些定理有了更深刻的认识。

关键词

介值定理，罗尔定理，拉格朗日定理，柯西定理，泰勒定理，积分中值定理

Methods and Skills of Proving the Mean Value Theorem in College Students' Mathematics Competition

Bo Liu, Xiaoyan Liu, Wenbin Li

Naval Aviation University, Yantai Shandong
Email: Lauber@126.com

Received: Jun. 3rd, 2021; accepted: Jul. 8th, 2021; published: Jul. 15th, 2021

Abstract

As a necessary part of derivative application in higher mathematics, the mean value theorem is also a common test topic in college students' mathematics competition. Due to many theorems and high similarity, students often have nothing to do about this kind of topic. In this paper, through the analysis and comparison and the selection of examples in the competition, students can get a deeper understanding of these theorems.

文章引用：刘波，刘晓燕，李文彬．大学生数学竞赛中中值定理的证明方法及技巧[J]．职业教育, 2021, 10(3): 160-163.
DOI: 10.12677/ve.2021.103026

Keywords

Intermediate Value Theorem, Rolle Theorem, Lagrange Theorem, Cauchy Theorem, Taylor Theorem, Integral Mean Value Theorem

1. 引言

高等数学中，中值定理作为应用性比较广的一部分内容，是学生学习中的重点，也是学习中的难点，亦是考研及大学生数学竞赛中常考的知识点，学生在处理过程中有很多困惑，在看到题目时，往往会知道使用中值定理，因为这些问题有个很明显的特征——含有某个中值ξ（或η）。关键在于是对哪个函数在哪个区间上使用哪个中值定理。

1) 介值定理问题可以化为零点定理问题，也可以直接说明，如“证明在(a,b)内存在ξ，使得$f(\xi)=c$”，仅需要说明函数$f(x)$在$[a,b]$内连续，以及c位于$f(x)$在区间$[a,b]$的值域内。

2) 用微分中值定理说明的问题中，有两个主要特征：含有某个函数的导数(甚至是高阶导数)、含有中值(也可能有多个中值)。应用微分中值定理主要难点在于构造适当的函数。在微分中值定理证明问题时，需要注意下面几点：

a) 当问题的结论中出现一个函数的一阶导数与一个中值时，肯定是对某个函数在某个区间内使用罗尔定理或者拉格朗日中值定理；

b) 当出现多个函数的一阶导数与一个中值时，使用柯西中值定理，此时找到函数是最主要的；

c) 当出现高阶导数时，通常归结为两种方法，对低一阶的导函数使用三大微分中值定理、或者使用泰勒定理说明；

d) 当出现多个中值点时，应当使用多次中值定理，在更多情况下，由于要求中值点不一样，需要注意区间的选择，两次使用中值定理的区间应当不同；

e) 使用微分中值定理的难点在于如何构造函数，如何选择区间。对此我的体会是应当从需要证明的结论入手，对结论进行分析。我们总感觉证明题无从下手，我认为证明题其实不难，因为证明题的结论其实是对你的提示，只要从证明结论入手，逐步分析，必然会找到证明方法。

3) 积分中值定理其实是微分中值定理的推广，对变上限函数使用微分中值定理或者泰勒定理就可以得到积分中值定理甚至类似于泰勒定理的形式。因此看到有积分形式，并且带有中值的证明题时，一定是对某个变上限积分在某点处展开为泰勒展开式或者直接使用积分中值定理。当证明结论中仅有积分与被积函数本身时，一般使用积分中值定理；当结论中有积分与被积函数的导数时，一般需要展开变上限积分为泰勒展开式。

零点定理与介值定理属于闭区间上连续函数的性质。三大中值定理与泰勒定理同属于微分中值定理，并且所包含的内容递进。积分中值定理属于积分范畴，但其实也是微分中值定理的推广。

下面我们讨论一下定理的内容及具体实例。

2. 定理内容[1]

1) 介值定理(根的存在性定理)

a) 介值定理：在闭区间上连续的函数必取得介于最大值 M 与最小值 m 之间的任何值。

b) 零点定理：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，且 $f(a)f(b)<0$，则至少存在一点 $c\in(a,b)$，使得 $f(c)=0$。

2) 罗尔定理：若函数 $f(x)$ 满足：a) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续 b) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 内可导 c) $f(a)=f(b)$，则一定存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f'(\xi)=0$。

3) 拉格朗日中值定理：若函数 $f(x)$ 满足：a) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续 b) $f(x)$ 在 (a,b) 内可导，则一定存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$。

4) 柯西中值定理：若函数 $f(x)$，$g(x)$ 满足：a) 在 $[a,b]$ 上连续 b) 在 (a,b) 内可导 c) $g'(x)\neq 0$，则至少有一点 $\xi\in(a,b)$ 使得 $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$。

5) 泰勒中值定理：如果函数 $f(x)$ 在含有 x_0 的某个开区间 (a,b) 内具有直到 $n+1$ 阶导数，则当 x 在 (a,b) 内时，$f(x)$ 可以表示为 $x-x_0$ 的一个 n 次多项式与一个余项 $R_n(x)$ 之和，即

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+R_n(x)$$

其中 $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ (ξ 介于 x_0 与 x 之间)。

6) 积分中值定理

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则至少存在一点 $c\in[a,b]$，使得 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(c)(b-a)$。

3. 大学生数学竞赛中的具体实例

例 1、设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上有二阶导数，且 $f(1)=f(0)=f'(1)=f'(0)=0$，证明：存在 $\xi\in(0,1)$ 使得 $f''(\xi)=f(\xi)$。(第十三届北京市大学生数学竞赛理工类)

证明：作辅助函数 $F(x)=\left(f(x)+f'(x)\right)e^{-x}$ 或 $F(x)=\left(f(x)-f'(x)\right)e^{x}$，则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上满足罗尔定理的条件，且 $F'(x)=\left(f''(x)-f(x)\right)e^{-x}$ 或 $F'(x)=\left(f(x)-f''(x)\right)e^{x}$，则由罗尔定理的结论知存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $F'(\xi)=0$ 即 $f(\xi)=f''(\xi)$。

例 2、设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续，在开区间 $(0,1)$ 内可导，且 $4\int_{\frac{3}{4}}^{1}f(x)\mathrm{d}x=f(0)$，求证：在开区间 $(0,1)$ 内存在一点 ξ，使得 $f'(\xi)=0$。(2001 天津市大学生数学竞赛理工类)

证明：由积分中值定理知，存在 $\eta\in\left[\dfrac{3}{4},1\right]$，使得

$$f(\eta)=\frac{1}{1-\frac{3}{4}}\int_{\frac{3}{4}}^{1}f(x)\mathrm{d}x=4\int_{\frac{3}{4}}^{1}f(x)\mathrm{d}x=f(0)$$

又函数 $f(x)$ 在区间 $[0,\eta]\subset[0,1]$ 上连续，$(0,\eta)$ 内可导，由罗尔定理知，至少存在一点 $\xi\in(0,\eta)\subset(0,1)$，使得 $f'(\xi)=0$。

例 3、设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[-1,1]$ 上具有连续的三阶导数，且 $f(-1)=0$，$f(1)=1$，$f'(0)=0$，求证：在开区间 $(-1,1)$ 内至少存在一点 x_0，使得 $f'''(x_0)=3$。(第三届全国大学生数学竞赛非数学类预赛)

证明：由泰勒中值定理，得

$$f(x)=f(0)+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+\frac{1}{3!}f'''(\eta)x^3,\ \eta\in(0,x),\ x\in[-1,1]$$

在上式中分别取 $x=1$ 和 $x=-1$，得

$$1=f(1)=f(0)+\frac{1}{2!}f''(0)+\frac{1}{3!}f'''(\eta_1),\ 0<\eta_1<1.$$

$$0=f(-1)=f(0)+\frac{1}{2!}f''(0)-\frac{1}{3!}f'''(\eta_2),\ -1<\eta_2<0.$$

两式相减，得 $f'''(\eta_1)+f'''(\eta_2)=6$，由于 $f'''(x)$ 在闭区间 $[-1,1]$ 上连续，因此 $f'''(x)$ 在闭区间 $[\eta_2,\eta_1]$ 上有最大值 M 最小值 m，从而 $m\le\frac{f'''(\eta_1)+f'''(\eta_2)}{2}\le M$。

再由连续函数的介值定理，至少存在一点 $x_0\in[\eta_2,\eta_1]\subset(-1,1)$，使得 $f'''(x_0)=\frac{f'''(\eta_1)+f'''(\eta_2)}{2}=3$。

例 4、设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续，且 $I=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\ne 0$，证明：在 $(0,1)$ 内存在不同的两点 x_1，x_2，使得 $\frac{1}{f(x_1)}+\frac{1}{f(x_2)}=\frac{2}{I}$。(第八届全国大学生数学竞赛非数学类预赛) [2]

证明：设 $F(x)=\frac{1}{I}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，则 $F(0)=0$，$F(1)=1$。由介值定理，存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $F(\xi)=\frac{1}{2}$。在两个子区间 $(0,\xi)$，$(\xi,1)$ 分别应用拉格朗日中值定理：$F'(x_1)=\frac{f(x_1)}{I}=\frac{F(\xi)-F(0)}{\xi-0}=\frac{1/2}{\xi}$，$x_1\in(0,\xi)$；$F'(x_2)=\frac{f(x_2)}{I}=\frac{F(1)-F(\xi)}{1-\xi}=\frac{1/2}{1-\xi}$，$x_2\in(\xi,1)$；$\frac{I}{f(x_1)}+\frac{I}{f(x_2)}=\frac{1}{F'(x_1)}+\frac{1}{F'(x_2)}=\frac{\xi}{1/2}+\frac{1-\xi}{1/2}=2$，故 $\frac{1}{f(x_1)}+\frac{1}{f(x_2)}=\frac{2}{I}$。

中值定理作为高等数学中导数应用的必要环节，也是考研及高等数学竞赛中常考题目，由于定理较多，相似度较高，学生对于这类题目经常束手无策，大家必须多做练习，总结经验，尤其是构造函数的经验和技巧，只有这样才能拨云见日，才能对这些定理有更深刻的认识，以达到熟练应用的目的[3]。

参考文献

[1] 华东师范大学数学系. 数学分析[M]. 第 4 版. 北京: 高等教育出版社, 2010.

[2] 张天德, 等. 全国大学生数学竞赛辅导指南[M]. 第 3 版. 北京: 清华大学出版社, 2019.

[3] 刘强, 等. 高等数学深化训练与大学生数学竞赛教程[M]. 北京: 电子工业出版社, 2017.