Vocational Education 职业教育, 2022, 11(3), 303-308
Published Online May 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/ve
https://doi.org/10.12677/ve.2022.113048

Hans汉斯

基于数学建模素养的教学设计

——以“百鸡问题”为例

龚戴君，郑丽翠

湖南科技大学，湖南 湘潭

收稿日期：2022年4月13日；录用日期：2022年5月12日；发布日期：2022年5月20日

摘 要

核心素养是近几年研究的热点话题，《普通高中数学课程标准(2017年版)》强调课堂数学核心素养的落实。学习数学的主要目的是解决实际问题，而数学建模恰好是对现实问题进行数学抽象，用数学语言表达问题、用数学方法构建模型解决问题的素养，所以提高学生数学建模素养利于增强学生应用数学解决实际问题的能力。但目前对数学建模素养在教学实践方面的研究还不足。因此，我将以不定方程问题为载体，探索基于数学建模素养下的教学设计。

关键词

数学建模素养，一次不定方程，教学设计

Teaching Design Based on Mathematical Modeling Literacy

—Taking the “Hundred Chicken Problem” as an Example

Daijun Gong, Licui Zheng

Hunan University of Science and Technology, Xiangtan Hunan

Received: Apr. 13th, 2022; accepted: May 12th, 2022; published: May 20th, 2022

Abstract

Core literacy is a hot topic of research in recent years. The General High School Mathematics Curriculum Standards (2017 edition) emphasizes the implementation of core literacy in classroom mathematics. The main purpose of learning mathematics is to solve practical problems, and mathematical modeling is just to abstract practical problems, express problems in mathematical

文章引用: 龚戴君, 郑丽翠. 基于数学建模素养的教学设计[J]. 职业教育, 2022, 11(3): 303-308.
DOI: 10.12677/ve.2022.113048

language, and build models for problem-solving literacy in mathematical methods. Therefore, improving students' mathematical modeling literacy is conducive to enhancing students' ability to use mathematics to solve practical problems. However, there is still insufficient research on mathematical modeling literacy in teaching practice. Therefore, I will explore the teaching design based on mathematical modeling literacy with the indefinite equation problem.

Keywords

Mathematical Modeling Literacy, Linear Indeterminate Equation, Teaching Design

1. 绪论

(一) 高中数学课程改革的新要求

数学课程改革的实施既要体现在数学课堂教学中，也要体现在教学设计里。新课程标准指出，要借助教学设计的制定与实施，培养和提高学生的数学学科核心素养，包括数学建模、直观想象、数据分析、数学运算、逻辑推理和数学抽象几方面。因而培养学生数学学科核心素养的关键是基于数学学科核心素养的教学设计，这也是我国高中数学课程改革的新要求。如何在教学设计中体现数学建模素养的培养是值得广大数学教师和数学教育研究者探索和解决的问题[1]。

(二) 高中数学建模活动的地位

根据新课程标准，数学建模活动是高中数学课程的重要组成部分，其中一个重要原因在于数学建模活动能全面培养学生六大数学学科的核心素养。所以，基于数学建模活动过程进行教学设计能够有效提高学生建立数学模型解决实际问题的能力。

2. 概念界定

(一) 数学建模素养

数学建模素养是对现实问题进行数学抽象，用数学语言表达问题，用数学方法构建数学模型、解决问题的素养，是数学学科核心素养之一。新课标指出数学建模包括以下几个步骤：实际情境→提出问题→建立模型→求解模型→检验结果，若结果符合实际情况，则得出实际结果，若不符合实际，需重新建立模型。

(二) 教学设计

教学设计是教师整体规划具体教学的过程，这个过程中要全面并整合分析课程标准、教材和学生来制定教学目标、预设课堂教学可能遇到的问题的应对预案、试行、对试行结果进行评价、反思和完善的过程。

(三) 不定方程

不定方程是指未知数的个数多于方程的个数的方程或方程组。

三元一次不定方程的一般形式：整系数 $ax + by + cz = d$，a，b，c 都是不为零的整数，d 为整数。

3. 教材和学情分析

(一) 教材分析

“百鸡问题”选自人教版 A 版选修 4~6 多元一次不定方程的内容，这是整本书的重难点之一，它既是前面整除理论有关知识的运用，同时又提供了一种简便方法来求解后面的一次同余式。

本节课围绕如何建立二元一次不定方程模型解决实际问题展开教学活动，不仅可以巩固一次不定方程的解法，还能帮助学生了解数学建模活动的完整过程，为其今后的数学建模做理论和思想方面的准备。

(二) 学情分析

知识储备方面，学生已经掌握了二元一次不定方程的解法，将三元一次不定方程转化成二元一次不定方程来解决并不困难。但是对于知识的实际应用，还需要进一步培养利用方程知识研究变量关系的意识，即要学习数学建模知识。思维水平方面，对于一些简单的问题情境能准确建立一次不定方程模型，但是求解过程会出现运算错误。情感态度方面，学生之前通过其他渠道了解过百钱买百鸡问题，也尝试过用排除法求解该问题，不过难度较大。学生对数学建模活动积极性高，兴趣浓厚，探究欲望强烈。

4. 教学目标和重难点

(一) 教学目标

知识目标：会根据实际问题建立不定方程数学模型，会用搜索法和转化思想解决三元一次不定方程，培养学生数学建模和数学运算的学科核心素养；

过程目标：能够从实际问题中列出三元一次不定方程，进一步体会不定方程模型思想的作用及应用价值；

情感态度目标：了解数学渊源及辉煌的历史，激发学生的学习热情。

(二) 教学重难点

重点：体会建立一次不定方程模型解决实际问题的思想方法。

难点：实际问题数学化，选择建立不定方程模型；一次不定方程有无解的判断、求解方法。

5. 教学过程

百鸡问题是一个很好的不定方程模型问题，解决该问题的过程能帮助学生体验数学建模活动的完整过程，即学生先分析实际问题的变化过程，析出其中的常量、变量及其相互关系，然后对模型进行假设，接着根据分析结果构建数学模型，将实际问题转化为数学问题，再通过运算，求解不定方程模型，最后利用结果解释实际问题，从而全面提高学生的数学建模能力。下面结合新课标的要求以及数学建模的过程对百鸡问题的教学过程进行设计[2]。

(一) 创设情境，引出问题

不定方程是数论中最重要、历史最悠久的分支，也是数学中最活跃的研究领域之一，其研究内容和成果极为丰富。早在公元 3 世纪，代数学鼻祖丢番图就进行了有关不定方程的研究，所以不定方程也被称为丢番图方程。丢番图在他的著作《算术》中提出了许多有关的问题。大约在公元 5~6 世纪，我国古代数学家张丘建所著的《张丘建算经》中记录了这么一个有趣的百鸡问题：今有鸡翁一，值钱五；鸡母一，值钱三；鸡雏三，值钱一。百钱买百鸡，问鸡翁、母、雏各几何[3]？对于这种贴近生活的实际问题该如何解答呢？

[设计意图]通过创设情境，设置简单的问题，让学生感受数学建模活动中的“实际情境”和“提出问题”前两个过程。同时情境的创设有利于培养学生对二元一次不定方程知识的实际应用意识。

(二) 分析问题，建立模型

这是生活中常见的问题，已知一只公鸡五元，一只母鸡三元，三只小鸡一元，想花一百元买一百只

鸡，要买公鸡、母鸡和小鸡各几只？抽象成数学问题就是已知公鸡、母鸡和小鸡的单价和价格之和，还知它们的个数之和，求公鸡、母鸡和小鸡的个数。

[设计意图]通过层层递进的问题引导学生发现这是一个不定方程问题，并回忆一般的解决方法，为模型求解做准备。

[模型 1 建立]

师生合作：设公鸡和母鸡分别为 x，y 只，则小鸡有 $(100-x-y)$ 只，

所以有 $5x+3y+\dfrac{100-x-y}{3}=100$ 。

(三) 合作交流，求解模型

分析：含有两个未知数，未知数的最高次数为 1，且只有一个方程。学生不难想到这是一个求解二元一次不定方程的问题。

[设计意图]引导学生找到相应的不定方程模型解决问题，提高学生数学建模素养。

[模型 1 求解]

师生活动：等式两边同时乘以 3 并化简得：

$$7x+4y=100,$$

所以：

$$7x=100-4y=4(25-y) \quad ①$$

又因为 $y\ge 0$ ，所以 $7x\le 100$ ，即：

$$x\le \frac{100}{7} \quad ②$$

而 x、y 的实际意义是公鸡、母鸡的个数，所以它们的取值范围均为自然数，则根据①式，且 x、y 均为自然数，知 x 应为 4 的倍数，即：

$$x=4k\left(k\in N\right) \quad ③$$

由②、③式可知，x 可取 0，4，8，12 四个数值，则 y 相应地可取 25，18，11，4 四个数值。四种情形下，需要分别购买公鸡、母鸡和小鸡的个数分别为：

$$(0,25,75)\text{或}(4,18,78)\text{或}(8,11,81)\text{或}(12,4,84)$$

上述百鸡问题，还可以有第二种解法，不妨假设公鸡、母鸡和小鸡的个数分别 x，y，z，则可得到一个三元一次不定方程组模型 2。

[模型 2 建立]

分析：问题中含三个未知量，并有两个等量关系，可以建立三元一次不定方程组模型 2。该方程组可以确定两个一元函数，如 $x=f_1(z)$，$y=f_2(z)$。由方程的约束条件，即三个变量均需为正整数，由变量 z 的取值可导出 x 和 y 的取值。

[设计意图]引导学生将三元一次不定方程组转化为二元一次不定方程组解决，渗透转化与化归思想。

师：题目中有几个未知量？它们的关系如何？

生：三个，分别是公鸡、母鸡和小鸡的个数；价格和数量之和均为 100。

师：这是三元一次不定方程问题，同学们回忆解不定方程用到的基本方法。

生：转化成二元一次不定方程。

师生合作：设公鸡、母鸡和小鸡分别 x，y，z 只，则有

$$\begin{cases} x+y+z=100 & ④ \\ 5x+3y+\frac{1}{3}z=100 & ⑤ \end{cases}$$

[模型 2 求解]

师生活动：(−⑤ +5× ④)÷(2)得：

$$\begin{cases} x+y+z=100 & ⑥ \\ y+\frac{7}{3}z=200 & ⑦ \end{cases}$$

将⑥~⑦得如下二元一次不定方程组：

$$\begin{cases} y+\frac{7}{3}z=200 \\ x-\frac{4}{3}z=-100 \end{cases}$$

上述方程组可以确定两个一元函数 $x=f_1(z)$，$y=f_2(z)$。其表达式如下所示：

$$y=200-\frac{7}{3}z,\ x=-100+\frac{4}{3}z \quad ⑧$$

考虑到 x 和 y 应为正整数，于是有：$75\le z\le\frac{600}{7}$。由⑧式可知：$z=3k\left(k\in N^{+}\right)$，所以 $z=75,78,81,84$。相应的 x、y 则分别为：$0,25;4,18;8,11;12,4$。因此需要分别购买公鸡、母鸡和小鸡的数量分别为：$(0,25,75)$或$(4,18,78)$或$(8,11,81)$或$(12,4,84)$。

(四) 模型应用与推广

百鸡问题的两种解法中，第一种解法，是对二元一次不定方程的解在约束条件下进行讨论的，而第二种解法，则是针对三元一次不定方程组的解在约束条件下进行求解的。若未知量的个数更多，设为 n 个，构成了 n 元一次不定方程组，下面将针对 n 元一次不定方程组的解进行讨论。

假设现在要买 n 种鸡，购买的数量分别是 $x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n$，同时，购买的数量有 m 个约束条件，因此建立如下 n 元一次不定方程：$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 ① \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 ② \\ \cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$ $(n>m)$，该如何求解？

可以类比第二种方法解决，不过要注意以下几点：

注 1：第 $i(2\le i\le m)$ 个方程的未知量个数至少比第 $i-1$ 个方程的未知数个数少一个；

注 2：$0=0$ 的方程写在方程的下面；

注 3：设该不定方程有 r 个非零方程，即有 $m-r$ 个 $0=0$ 的方程。并设该不定方程的第 i 个非零方程的第一个非零参数位于第 j_i 列，$\left(x_{j_i}\text{前的系数}\ne 0\right)(i=1,2,\cdots,r)$，有 $j_1<j_2<\cdots<j_r$。

[设计意图]体会模型思想，感受数学源于生活，用于生活，进一步达成学习目标，形成和发展学生的数学建模素养。

6. 总结与展望

本文将数学建模素养的推进与不定方程教学有机融合，对于理论发展和实际教学有一定的指导意义。

但是由于本人理论水平有限，受其他外在条件的限制，致使本研究仍存在一定的欠缺和不足之处。同时也希望更多的研究者投入到数学建模素养和不定方程的相关研究中，推进不定方程与数学建模素养研究的深入和发展。

基金项目

湖南科技大学教学改革一般项目(G31917)。

参考文献

[1] 冯帅. 基于数学学科核心素养的高中数学建模活动教学设计研究[D]: [硕士学位论文]. 大连: 辽宁师范大学, 2019.

[2] 严必友, 宋晓平. 体现继承与发展的数学课程目标——解读《普通高中数学课程标准(2017 年版)》目标体系[J]. 数学通报, 2018, 57(12): 18-21.

[3] 徐礼刚. 在中学数学教学中渗入数学建模思想的研究[D]: [硕士学位论文]. 武汉: 华中师范大学, 2013.