Vocational Education 职业教育, 2024, 13(2), 473-479
Published Online March 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/ve
https://doi.org/10.12677/ve.2024.132078

Hans汉斯

基于一致性视角谈谈对余弦定理推导的认识

王　婕

新疆师范大学数学科学学院，新疆 乌鲁木齐

收稿日期：2023年12月22日；录用日期：2024年3月13日；发布日期：2024年3月20日

摘　要

本文以学生学习发展的认知路径顺序对三角形知识进行梳理，从一致性视角，呈现了三角形各元素之间的关系和余弦定理之间的联系，同时从不同视角对余弦定理进行了证明，对三角形边角关系形成一个整体性的理解，为教师教学和学生学习余弦定理提供一定的思路。

关键词

一致性，三角形，余弦定理

Talk about the Understanding of the Derivation of the Cosine Theorem from the Perspective of Consistency

Jie Wang

School of Mathematical Sciences, Xinjiang Normal University, Urumqi Xinjiang

Received: Feb. 22nd, 2023; accepted: Mar. 13th, 2024; published: Mar. 20th, 2024

Abstract

This article sorts out triangle knowledge in the order of students' cognitive paths of learning and development. From a consistency perspective, it presents the relationship between the elements of the triangle and the connection between the cosine theorem. It also proves the cosine theorem from different perspectives., forming a comprehensive understanding of the relationship between the sides and angles of a triangle, and providing certain ideas for teachers to teach and students to learn the cosine theorem.

文章引用: 王婕. 基于一致性视角谈谈对余弦定理推导的认识[J]. 职业教育, 2024, 13(2): 473-479.
DOI: 10.12677/**.2024.*****

Keywords

Consistency, Triangle, Cosine Theorem

1. 前言

“数与代数”是数学知识体系的基础之一，是学生认识数量关系、探索数学规律、建立数学模型的基石。从学生的认知过程看，理解这些概念的过程和方法具有一致性，都要经历“背景→概念→基本性质→联系→应用”的过程。从数学的整体性上讲，式的运算继承了数的运算的法则和运算律，与数的运算保持一致。因此，从数到式，体现了“数的概念的一致性”、“运算的一致性”和“数式通性”[1]。《普通高中数学课程标准(2017 年版)》明确要求，几何和代数作为高中数学课程的主线之一。余弦定理作为高中数学的重要内容，是揭示三角形边角关系的重要定理，在解三角形中起到了不可替代的作用，也是几何直观与代数运算相结合的典型案例[2]。余弦定理与三角形基本要素之间似乎也具有内在一致性。根据边、角、三角形研究思路的一致性，以及三角形自身的整体性，本文将沿着学生不同阶段、不同认知条件下对三角形的理解，从一致性视角，对余弦定理的推导进行深度思考。

2. 对三角形的认识

三角形是最简单的封闭图形，它在几何中起到了前衔后联的核心地位及重要性正如项武义先生所将：“三角形是仅次于线段和直线的基本几何图形，既简单又能充分反应空间的本质”[3]。三角形的知识是研究其他几何图形的基础，其研究路径、过程、方法具有统领性、一致性。因此，对三角形的认识和学习对整个几何系统的学习具有深厚的意义。义务教育数学课程标准(2022 年版)》在“学业要求”中关于三角形的认识提到：在第一学段，学生能够直观感知、辨认三角形等平面图形，并形成初步的空间观念；在第二学段，学生要认识三角形的特征，理解三角形的概念，学会根据边与角等特征对三角形进行分类，感悟图形的抽象，进一步形成空间观念和初步的几何直观；在第三学段，学生要知道三角形三边的关系和三角形的内角和，进一步形成量感、空间观念和几何直观。在第四学段，学生要掌握三角形的概念以及基本特征，在直观理解和掌握图形与几何事实的基础上，经历得到和验证数学结论的过程，感悟具有传递性的数学逻辑，形成几何直观的推理能力。不同阶段对学生学习三角形知识的“学业要求”体现了数学知识内容的组织和安排上的一致性。

我们知道三角形的定义是由三条线段围成的封闭图形(每相邻两条线段的端点相连)叫做三角形，或者是由三个顶点、三条边、三个角组成的封闭图形叫做三角形。由定义知道三角形有六个基本要素分别是三角形的三个角和三条边，后期对于三角形知识的进一步认识也是围绕三角形边的关系、角的关系、边与角之间的关系来学习。从边的关系出发，我们认识到，在三角形中，三边之间存在“两边之和大于第三边，两边之差小于第三边”的关系，以及三角形的周长、面积、高线、中线、角平分线和内心、重心、垂心等，按边分类，分为三边均不相等的三角形，等腰三角形(性质和判定，等边三角形)。从角的关系出发，学习了三角形内角和、外角和以及内外角的关系，按角分类，三角形分为锐角三角形、钝角三角形、直角三角形。从边角的关系出发，学习了勾股定理、全等三角形、相似三角形的性质和判定以及三角函

数、正余弦定理等。

3. 三角形边角关系的刻画：从不定到确定

在三角形知识整个生长过程中，学生在不同学段都学习了哪些内容呢？首先是，小学阶段。学生学习了三角形的定义、分类、稳定性、三边关系、内角和、周长、面积和高等知识，但是小学的学习基本是停留在浅显的认识上，学习方式也主要以观察、测量、操作来探寻几何性质为主。其次，在初中阶段。学生学习了三角形及其内角、外角、中线、高线、角平分线等概念，证明了三角形内角和定理，理解和掌握了全等三角形概念和判定、等腰三角形和等边三角形的性质和判定、直角三角形的性质和判定以及勾股定理及其逆定理、相似三角形和锐角三角函数等知识。第三，在高中阶段。学生学习了角与弧度、三角函数概念、性质和应用、三角恒等变换，掌握了平面向量的概念、运算、向量基本定理及坐标表示等知识。通过以上内容发现，不同学段学生学习三角形知识，由单因素向多因素发展，如从单一的的边、角关系到多因素边与角关系的变化，三角形各元素也从简单的定性研究上升到复杂的定量研究，这之间的联系体现了到三角形与余弦定理的知识学习中内容上既有一致性又有变化发展。

余弦定理最初是以几何定理的形式产生，是勾股定理的推广，16 世纪开始出现余弦定理的三角式，直到 19 世纪三角形式的余弦定理才得到普遍认可[4]。余弦定理的本质反映了三角形六个基本要素中四个基本要素之间的定量关系，这是存在定量关系(含边长)的前提下，基本要素的数量最少的三角定律。数学学习的过程是知识的同化和迁移的过程。通过回顾学生学习三角形的历程，我们认识到了三角形边与角之间关系的发展。在小学阶段通过对三角形的边和角以及三角形的内角和的认识，掌握了三角形三个角之间的确定关系。三角形在初中学段的呈现，包括了三角形的基本内容、特殊三角形(等腰三角形和直角三角形)、全等三角形和相似三角形、解直角三角形等内容。我们学习了三角形的基本性质：“大边对大角，小边对小角、两边之和大于第三边”，此时三角形边之间的关系是通过不等关系刻画的，无法确定。通过锐角三角函数对直角三角形研究的进一步完善，对直角三角形构成元素关系的分类，实现直角三角形的角、边、边角三个维度研究的延伸与完善，为解直角三角形提供了工具，将特殊三角形之间的关系由“不确定”转化为“确定”，进一步深化学生对全等三角形的认识，为高中学段的学习蓄势蓄能，。在高中阶段我们通过学习角与弧度、三角函数概念、性质和应用、三角恒等变换，掌握了平面向量的概念、运算、向量基本定理及坐标表示等知识，为解三角形奠定基础，灵活运用向量法推导出了余弦定理，从而确定了一般三角形的边与角之间的关系，将三角形边角的“不确定”到“确定”关系从特殊三角形扩展到一般三角形，为与余弦定理证明的发现提供思路。通过对三角形边角关系的刻画以及学生对三角形知识点的梳理，可帮助教师在余弦定理的教学中，引导学生将“余弦定理”涉及的知识点汇集在一起，从平面几何入手，合理串联平面向量的额数量积、三角函数及余弦定理之间的联系，形成余弦定理的知识网络，进而有助于教师对余弦定理教学设计的进一步把握，在证明方法上更贴近学生知识发展路径，在这个过程中培养学生的知识迁移能力、逻辑推理能力和数学建模思想。

4. 不同视角下的余弦定理

余弦定理作为高中数学的核心内容，定量的刻画了三角形边角之间的关系，是几何直观与代数运算相结合的典型案例，其处于三角函数与平面向量的交汇处，是发展学生思维品质的重要素材[5]。教材作为重要的课程资源，是体现课程理念。而随着高中数学教材版本的不断改进，余弦定理在教科书中的位置和证明方法都发生了很大的变化。从 1994 年出版的《高级中学课本代数上册(必修)》的第三章——两角和与差的三角函数、解斜三角形的第二小节——解斜三角形中到 2004 版本的教材《普通高中课程标准实验教科书·数学(必修) 5》第一章——解三角形的第一小节再到 2019 版的教材《普通高中课程标准实

验教科书 • 数学(必修) (2019)第二册》的第一章——平面向量及其应用的第四小节，可见余弦定理的在高中教材中的重要性，相应的证明方法也从用直角坐标系，根据两点间的距离公式到借助向量及其运算探索了三角形边长和角度的关系。从教材上看，2004 版高中数学教科书和 2019 版高中数学教科书均采用向量法及其运算证明了余弦定理，但二者还是存在很大的差异[6]。最新版本的《普通高中课程标准实验教科书·数学(必修) (2019)第二册》数学教科书，运用向量法证明了余弦定理和正弦定理，为向量的应用提供一个重要载体，更侧重学生对向量法所蕴含的数学思想的领悟，掌握用向量运算解决几何问题的方法，完善对三角形的认知结构，强调了平面向量的工具性和应用性[7]。新教材通过创设问题情境，回顾初中学习过的全等三角形知识，两边和它们的夹角分别相等的两个三角形全等，即给定两边及其夹角的三角形是唯一确定的。运用探究框图引导学生思考怎样用三角形两边及其夹角表示第三边。借助启发性提示语“因为涉及的是三角形的两边及其夹角，所以我们考虑用向量的数量积来探究”，自然引入余弦定理的向量证明方法。余弦定理的证明比较常见的证法有：综合法、解析几何法和向量法，不同的证明方法从不同的视角刻画了三角形边与角之间的关系。无论以哪种方式证明，均是以产生式顶的方法进行，尽可能使学生了解定理的由来、探寻定理的证明思路和方法，构建系统化知识结构网络。

1) 综合法视角

在 ΔABC 中， $AB=c$， $AC=b$，其夹角为 $\angle A$，求第三边 BC。

如图 1，当 $\angle A$ 为锐角时，过 B 点作 AC 的垂线，垂足为 D。

在 $Rt\Delta ABD$ 中， $BD=c\sin A$， $AD=c\cos A$

所以 $DC=b-c\cos A$

于是
$$
\begin{aligned}
BC^2=a^2&=\left(c\sin A\right)^2+\left(b-c\cos A\right)^2\\
&=c^2\sin^2 A+b^2-2bc\cos A+c^2\cos^2 A\\
&=c^2+b^2-2bc\cos A
\end{aligned}
$$

故 $a^2=c^2+b^2-2bc\cos A$。

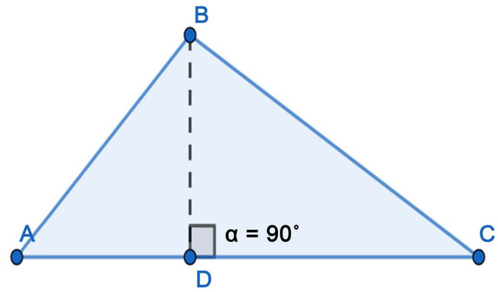

Figure 1. Comprehensive method perspective-acute angle

图 1. 综合法视角－锐角

如图 2， $\angle A$ 当为直角时， $BC^2=a^2=b^2+c^2$，有 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

如图 3，当 $\angle A$ 为钝角时，过 B 点作 AC 延长线的垂线，垂足为 D

$BD=c\sin\left(\pi-\angle CAB\right)=c\sin\angle CAB$， $AD=c\cos\left(\pi-\angle CAB\right)=-c\cos\angle CAB$

$CD=b-c\cos\angle CAB$，

所以
$$
\begin{aligned}
a^2&=\left(b-c\cos\angle CAB\right)^2+c^2\sin^2\angle CAB\\
&=b^2+c^2\cos^2\angle CAB-2bc\cos\angle CAB+c^2\sin^2\angle CAB
\end{aligned}
$$

得到，$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

综上，证明了 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

同理可得到，$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$。

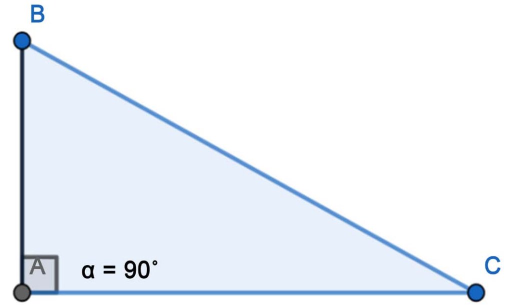

Figure 2. Comprehensive method perspective-right angle

图 2. 综合法视角－直角

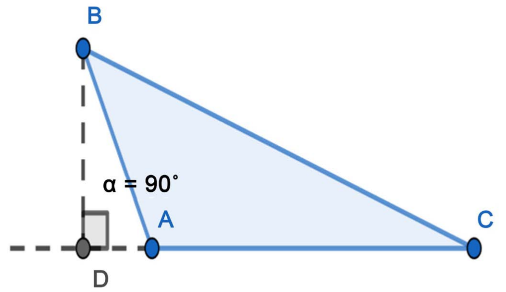

Figure 3. Comprehensive method perspective-obtuse angle

图 3. 综合法视角－钝角

通过以上分类讨论得到了边与角余弦的关系，三角形中任何一边的平方等于其他两边的平方的和减去这两边与它们的夹角的余弦的积的两倍，上述结论称为余弦定理。

2) 解析几何法视角

如图 4，在 ΔABC 中，以顶点 A 为原点，射线 AC 为 x 轴的正半轴，建立直角坐标系。

此时，顶点 B 可看作角 A 终边上的一个点，它到原点的距离 $r=c$。设点 B 的坐标为 (x,y) 由三角函数定义可知，不论角 A 是锐角、钝角还是直角，都有 $\frac{x}{c}=\cos A$，$\frac{y}{c}=\sin A$，所以 $x=c\cos A$，$y=c\sin A$，点 B 的坐标 $(c\sin A,c\cos A)$。点 C 的坐标是 $(b,0)$

根据两点间的距离公式有

$$\begin{aligned}a=|BC|&=\sqrt{(c\cos A-b)^2+(c\sin A)^2}\\&=\sqrt{c^2\left(\cos^2 A+\sin^2 A\right)+b^2-2bc\cos A}\\&=\sqrt{b^2+c^2-2bc\cos A}\end{aligned}$$

两边平方，得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

同理可得到，$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

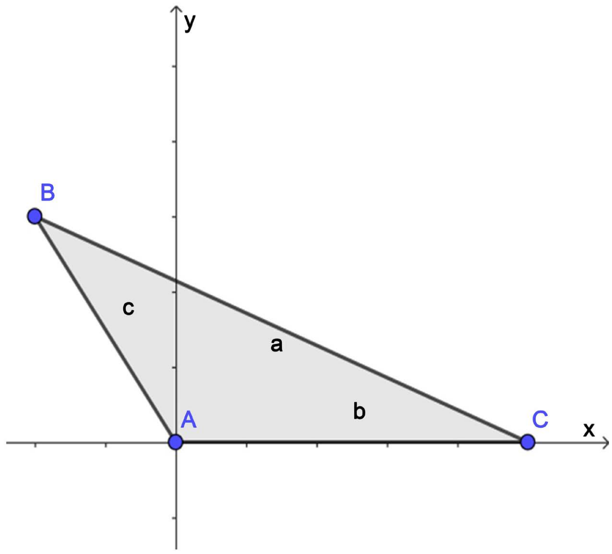

Figure 4. Analytical geometry perspective
图 4. 解析几何视角

3) 向量法视角

如图 5，在 ΔABC 中，设 $\overrightarrow{CB}=a$， $\overrightarrow{CA}=b$， $\overrightarrow{AB}=c$， 那么 $c=a-b$

根据向量减法法则以及研究目标，联想到向量数量积的性质，考虑用向量 c 与其自身作数量积运算。

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}，\ \left(\overrightarrow{AB}\right)^2=\left(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}\right)^2，$$

$$\begin{aligned}|c|^2&=c\cdot c=(a-b)\cdot(a-b)\\&=a\cdot a+b\cdot b-2a\cdot b\\&=a^2+b^2-2|a||b|\cos C\end{aligned}$$

得到， $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

同理可得到， $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$， $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

从余弦定理及其推论可以看出，三角函数将几何中三角形的定性结论变成了可定量计算的公式。

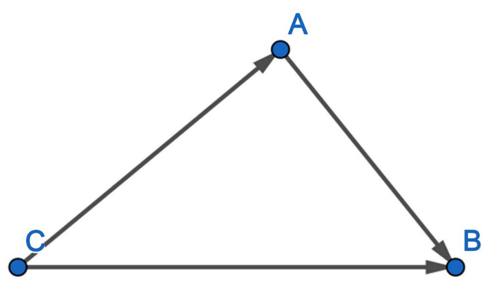

Figure 5. Vector method perspective
图 5. 向量法视角

5. 小结

通过以上的分析，可帮助教师在教学活动设计中，考虑学生知识的发生发展、知识路径以及学生认知路径的一致性，对学生的学习起到关键性的作用。本文基于学生认知路径发展的情况下，对余弦定理

进行了证明，从一致性视角，对三角形的边角关系形成一个整体性的认识，看到了三角形各元素和余弦定理内在的联系性、一致性，可让学生对余弦定理的本质有清晰的了解，对启发学生的思维，顺应学生的认知路径的发展提供了思路，可使学生能更好的运用已有知识来证明推导余弦定理。

参考文献

[1] 章建跃. 核心素养导向的初中数学教学变革——以“数与式”为例[J]. 中学数学教学参考, 2023(2): 2-521.

[2] 王尚志, 吕世虎, 胡凤娟, 著. 普通高中课程标准 2020 年修 2017 版[M]. 上海: 上海教育出版社, 2020: 9.

[3] 项武义. 基础几何学[M]. 北京: 人民教育出版社, 2004: 8.

[4] 汪晓勤. 20 世纪中叶以前的余弦定理历史[J]. 数学通报, 2015, 54(8): 9-13.

[5] 龚有顺. 基于“三序合一”理论的高中数学教学——以“余弦定理”教学为例[J]. 中学数学教学参考, 2017(21): 8-11.

[6] 桑树林. 新课标背景下高中数学新教材的比较研究——以“余弦定理、正弦定理”相关内容为例[J]. 数学通讯, 2021(6): 1-3+51.

[7] 章建跃. 如何理解用向量法推导余弦定理和正弦定理的设计意图[J]. 中小学数学(高中版), 2021(4): 66+64.