Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2024, 13(3), 991-1001
Published Online March 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2024.133093

由Lévy过程驱动的加权自排斥扩散的长时间行为和统计推断

鲁蕴涵，闫理坦*

东华大学理学院，上海

收稿日期：2024年2月25日；录用日期：2024年3月19日；发布日期：2024年3月26日

摘　要

假设 $L=\{L_t,t\geq 0\}$ 是一个跳有界且界限为1的Lévy过程，生成三元组为 $(1,\nu,0)$。在本文中，我们考虑了由Lévy过程驱动的线性自排斥扩散方程 $\mathrm{d}X_t=\mathrm{d}L_t+\theta\left(\int_0^t(1+s)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}X_s\right)\mathrm{d}t+w\mathrm{d}t$，其中，$\theta>0$ 和 $w\in\mathbb{R}$。这类过程是一类自交互扩散过程。我们研究了当 t 趋于无穷时解的长时间行为，发现它具有一种循环收敛性，这在此前的研究中尚未有类似的结论。进一步的，当 $w=0$ 时在连续观测情况下，通过最小二乘法给出了方程参数的估计。我们证明了 $\hat{\theta}$ 的估计量具有强相合性，并讨论了它的渐近分布。

关键词

Lévy过程，自排斥扩散，长时间行为，参数估计，渐近分布

Long Time Behavior and Statistical Inference of the Weighted Self-Repelling Diffusion Driven by Lévy Process

Yunhan Lu, Litan Yan*

College of Science, Donghua University, Shanghai

Received: Feb. 25th, 2024; accepted: Mar. 19th, 2024; published: Mar. 26th, 2024

Abstract

Let $L=\{L_t,t\geq 0\}$ be a Lévy process with jumps bounded by 1 and generating triplet $(1,\nu,0)$. In

*通讯作者。

文章引用: 鲁蕴涵, 闫理坦. 由 Lévy 过程驱动的加权自排斥扩散的长时间行为和统计推断[J]. 应用数学进展, 2024, 13(3): 991-1001. DOI: 10.12677/aam.2024.133093

this paper, as an attempt we consider the linear self-repelling diffusion driven by a Lévy process, $\mathrm{d}X_t = \mathrm{d}L_t + \theta\left(\int_0^t (1+s)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}X_s\right)\mathrm{d}t + w\mathrm{d}t$, where $\theta > 0$ and the parameter $w \in \mathbb{R}$. This process is similar to a type of self-interacting diffusion process. This paper studies the long time behaviour of the solution as t tends to infinity, and we find that it exhibits a cyclic convergence property, for which similar conclusions have not appeared in previous studies. In addition, when $w = 0$, by using least squares method, we establish the strong consistency of the estimate $\hat{\theta}$ and discuss its asymptotic distribution under the consecutive observation.

Keywords

Lévy Process, The Self-Repelling Diffusion, Long Time Behaviour, Parameter Estimation, Asymptotic Distribution

1. 引言

1995 年，Cranston 和 Le Jan [1]介绍了一种特殊随机微分方程(即线性自吸引扩散)

$$X_t = B_t - \theta\int_0^t\int_0^s (X_s - X_r)\mathrm{d}r\mathrm{d}s + wt \tag{1}$$

其中 $\theta > 0$ 和 $\nu \in \mathbb{R}$，B 是一个一维标准布朗运动。他们证明了当 t 趋于无穷时解的收敛性。这种路径依赖随机微分方程是由 Durrett 和 Rogers [2]首次提出，他们在 1992 年引入一类增长物模型

$$X_t = B_t + \int_0^t\int_0^s f(X_s - X_u)\mathrm{d}u\mathrm{d}s$$

其中 B 是一个 d-维标准布朗运动，函数 f 是 Lipschitz 连续的。X_t 对应于 t 时刻聚合物末端的位置。在一定条件下，他们建立了随机微分方程解的渐近性态，并给出了一些猜想和问题。我们把这个解称为布朗运动与它自身通过的轨迹相互作用，即自交互作用的运动。一般来说，如果对 f 没有任何限制，方程(1)定义了一个自交互扩散。对任意 $x \in \mathbb{R}^d$，若 $x \cdot f(x) \geq 0$ (反之 ≤ 0)，我们称之为自排斥扩散(反之，自吸引扩散)。换句话说，它更倾向于远离(或回到)之前达到的位置。更多相关结果可参考文献[3]-[13]及其参考文献。值得注意的是，自交互扩散与 O-U 过程相当。因此，我们可以得到它的渐近行为。自交互扩散也可以用来描述经济学中空间垄断竞争的一些行为。然而，目前研究的大多数方程都是由布朗运动驱动的。自然而然地，我们可以考虑由 Lévy 过程或高斯过程驱动的随机微分方程。通过分部积分，方程(1)可以改写为

$$X_t = x + B_t + \theta\int_0^t\int_0^s r\mathrm{d}X_r\mathrm{d}s + wt, \quad t \geq 0$$

受此结果的启发，可以考虑方程

$$X_t = x + B_t + \int_0^t\int_0^s g(r, X_r)\mathrm{d}X_r\mathrm{d}s + wt$$

在本文中我们考虑

$$X_t = L_t + \theta\int_0^t\int_0^s (1+s)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}X_r\mathrm{d}s + wt \tag{2}$$

其中，$w\in\mathbb{R},\theta>0$ 和 $L=\{L_t,t\ge 0\}$ 是 $\mathbb{R}$ 上跳有界且界为 1 的 Lévy 过程。记 $\xi_t=\int_0^t (1+t)^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}\theta(1+r)^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{3}\theta}\mathrm{d}L_r$。在第二章中，我们简要回顾 Lévy 过程的一些概念。第三章中设 $\theta>0$，我们证明了当 t 趋于无穷时，有

$$J_t(0;\theta) := (1+t)^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}\theta(1+t)^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{3}\theta}X_t \to \xi_\infty + \theta^{-1}w$$

以及

$$J_t(n;\theta) := \theta(1+t)^{\frac{1}{2}}\left(J_t(n-1;\theta)-\left(\xi_\infty+\theta^{-1}w\right)\lambda_n\right)\to\left(\xi_\infty+\theta^{-1}w\right)\lambda_n$$

在 L^2 和几乎处处意义上存在，其中 $\lambda_n = 2^{-n}\left[1\times 4\times\cdots\times(3n-2)\right]$，$\xi_\infty=\int_0^\infty (1+s)^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}\theta(1+s)^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{3}\theta}\mathrm{d}L_s$。这种循环收敛性是非常难得的。在此之前，对于由此类 Lévy 过程驱动的随机微分方程的研究非常有限，也没有出现类似关于解的循环收敛性的结论。第四章中，当 $w=0$ 时，在连续观测下我们估计了方程(2)的参数 θ，得到了估计量 $\hat{\theta}_T$ 具有强相合性且当 T 趋于无穷大时，以下依分布收敛性成立：

$$(1+T)^{-\frac{1}{4}}\mathrm{e}^{\frac{2}{3}\theta(1+T)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}\theta}\left(\hat{\theta}_T-\theta\right)\to\frac{2\theta L_1}{\xi_\infty}$$

其中 L_1 为一无限可分分布，并且 L_1 和 ξ_∞ 相互独立。

2. 预备知识

在本小节中，我们简要回顾 $\mathbb{R}$ 上 Lévy 过程的定义和性质。关于这些概念的背景，我们参考 Applebaum [14]和 Sato [15]。在本文中，我们考虑定义在概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},P,\{\mathcal{F}_t\})$ 上的 Lévy 过程。为简单起见，我们让 C 代表一个正常数，仅取决于下标，其值在不同的情况下可能会有所不同。

定义在概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},P,\{\mathcal{F}_t\})$ 上的随机过程 $L=\{L_t,t\ge 0\}$，如果它满足：

1) $L_0=0$ a.s；

2) L 有独立、平稳增量；

3) L 是随机连续的，即对任意 $\varepsilon>0,s\ge 0$，

$$\lim_{t\to s}P\left(|L_t-L_s|\ge\varepsilon\right)=0$$

我们称之为 Lévy 过程。定义在 $\mathbb{R}$ 上的 Lévy 过程 $L=\{L_t,t\ge 0\}$ 是半鞅，有如下 Lévy-Itô 分解：

$$L_t = bt + B_t + \int_{\{|y|<1\}} y\tilde{N}(t,\mathrm{d}y) + \int_{\{|y|\ge 1\}} yN(t,\mathrm{d}y) \tag{3}$$

其中，$b\in\mathbb{R}$，$B=\{B_t,t\ge 0\}$ 是一布朗运动，N 是 $\mathbb{R}^+\times(\mathbb{R}-\{0\})$ 上一独立泊松测度。若定义在 $\mathbb{R}$ 上的 Lévy 过程 $L=\{L_t,t\ge 0\}$ 跳有界，那么对一切正整数 m，有

$$E|L_t|^m<\infty$$

此时，过程 $\bar{L}=\{L_t-EL_t,t\ge 0\}$ 是鞅过程。本文中，我们假设 L_t 是一个跳有界且界限为 1 的 Lévy 过程，其生成三元组为 $(1,\nu,0)$，由(3)我们有

$$L_t = B_t + \int_{\{|y|\ge 1\}} y\tilde{N}(t,\mathrm{d}y)$$

对上述 Lévy 过程 $L=\{L_t,t\ge 0\}$，下方不等式成立：

$$E\left[\sup_{0\le t\le\tau}\left|\int_0^t u_s\mathrm{d}L_s\right|^p\right]\le C_p\left\{\left(\int_0^\tau u_s^2\mathrm{d}s\right)^{\frac{p}{2}}+\left(\int_0^\tau\int_{\{|y|<1\}} y^2u_s^2\nu(\mathrm{d}y)\mathrm{d}s\right)^{\frac{p}{2}}+\left[\int_0^\tau\int_{\{|y|<1\}}|yu_s|^p\nu(\mathrm{d}y)\mathrm{d}s\right]\right\}$$

和

$$P\left(\sup_{0\le t\le\tau}\left|\int_0^t u_s \mathrm{d}L_s\right|\ge\varepsilon\right)\le C_p\varepsilon^{-p}E\left[\left|\int_0^t u_\tau \mathrm{d}L_s\right|^p\right]$$

其中 $p\ge1$，τ 为停时，$u=\{u_t,t\ge0\}$ 是 $\mathcal{F}_t$ -适应过程。

3. 自排斥条件下解的长时间行为

在本章中，我们考虑自排斥情况下的方程(2)。不难证明方程(2)有唯一解(参见 Protter [16])。定义核函数

$$h_\theta(t,s)=1+\theta(1+s)^{\frac12}\mathrm{e}^{-\frac23\theta(1+s)^{\frac32}+\frac23\theta}\int_s^t \mathrm{e}^{\frac23\theta(1+u)^{\frac32}-\frac23\theta}\mathrm{d}u$$

其中 $0\le s\le t$，并且对一切 $s\ge0$，极限

$$h_\theta(s):=\lim_{t\to\infty}h_\theta(t,s)=1+\theta(1+s)^{\frac12}\mathrm{e}^{-\frac23\theta(1+s)^{\frac32}+\frac23\theta}\int_s^\infty \mathrm{e}^{\frac23\theta(1+u)^{\frac32}-\frac23\theta}\mathrm{d}u$$

存在。通过常数变易法，我们得到方程(2)的解

$$X_t=\int_0^t h_\theta(t,s)\mathrm{d}L_s+w\int_0^t h_\theta(t,s)\mathrm{d}s$$

我们引入如下引理。

引理 3.1 设 $\theta>0$，定义函数

$$I_\theta(t)=\theta(1+t)^{\frac12}\mathrm{e}^{-\frac23\theta(1+t)^{\frac32}+\frac23\theta}\int_0^t \mathrm{e}^{\frac23\theta(1+t)^{\frac32}-\frac23\theta}\mathrm{d}u-1$$

考虑函数列 $t\mapsto I_\theta(t;n):\mathbb{R}_+\to\mathbb{R},n=1,2,\cdots$，有如下形式：

$$I_\theta(t;1)=\theta(1+t)^{\frac32}I_\theta(t),$$

$$I_\theta(t;n+1)=\theta(1+t)^{\frac32}\left[I_\theta(t;n)-\lambda_n\right]$$

其中 $\lambda_n=2^{-n}\left[1\times4\times\cdots\times(3n-2)\right]$。那么，对 $n\ge1$，

$$\lim_{t\to+\infty}I_\theta(t,n)=\lambda_n \tag{4}$$

证明： 仿照文献[11]的方法，对 $I_\theta(t)$ 进行 $n+1$ 次分部积分，那么对任意 $n\ge1$，当 t 趋于无穷时有

$$I_\theta(t)=\left[C_n+O\left((1+t)^{-\frac32}\right)\right]\mathrm{e}^{-\frac23\theta(1+t)^{\frac32}+\frac23\theta}+\frac{1}{2\theta(1+t)^{\frac32}}+\frac{1}{\theta^2(1+t)^3}+\cdots+\frac{1}{2^n\theta^n(1+t)^{\frac32 n}}\prod_{i=1}^n(3i-2)+\Delta_\theta(t,n)$$

其中

$$\Delta_\theta(t,n)=-\prod_{i=1}^{n+2}(3i-5)\frac{(1+t)^{\frac12}}{2^{n+2}\theta^n}\mathrm{e}^{-\frac23\theta(1+t)^{\frac32}+\frac23\theta}\int_0^t\left(\mathrm{e}^{\frac23\theta(1+u)^{\frac32}-\frac23\theta}-\sum_{j=0}^n\left(\frac23\theta(1+u)^{\frac32}-\frac23\theta\right)^j\right)\frac{\mathrm{d}u}{(1+u)^{\frac32 n-\frac32}}$$

结合 $I_\theta(t;n)$ 的定义，对任意整数 $n\ge2$，有

$$\begin{aligned}I_\theta(t,1)&=\theta(1+t)^{\frac32}I_\theta(t)=\theta(1+t)^{\frac32}\left[C_n+O(1+t)^{-\frac32}\right]\mathrm{e}^{-\frac23\theta(1+t)^{\frac32}+\frac23\theta}\\&\quad+\frac12+\frac{1}{\theta(1+t)^{\frac32}}+\cdots+\frac{1}{2^n\theta^{n-1}(1+t)^{\frac32 n-\frac32}}\prod_{i=1}^n(3i-2)+\theta(1+t)^{\frac32}\Delta_\theta(t,n)\quad(t\to\infty)\end{aligned}$$

和

$$I_\theta(t,2)=\theta(1+t)^{\frac{3}{2}}\left(I_\theta(t,1)-\lambda_1\right)=\theta^2(1+t)^3\left[C_n+O(1+t)^{-\frac{3}{2}}\right]\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}\theta(1+t)^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{3}\theta}$$
$$+1+\frac{7}{2\theta(1+t)^{\frac{3}{2}}}+\cdots+\frac{1}{2^n\theta^{n-2}(1+t)^{\frac{3}{2}n-3}}\prod_{i=1}^{n}(3i-2)+\theta^2(1+t)^3\Delta_\theta(t,n)\quad(t\to\infty)$$

又因为对于任意的整数$1\le m\le n$，当t趋于无穷时，

$$(1+t)^{\frac{3}{2}m}\Delta_\theta(t,n)\to 0$$

所以有

$$I_\theta(t,n)=\theta^n(1+t)^{\frac{3}{2}n}\left[C_n+O\left((1+t)^{-\frac{3}{2}}\right)\right]\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}\theta(1+t)^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{3}\theta}+2^{-n}\prod_{i=1}^{n}(3i-2)$$
$$+\theta^n(1+t)^{\frac{3}{2}n}\Delta_\theta(t,n)\to\lambda_n\quad(t\to\infty)$$

也就表明收敛性(4)成立。

引理 3.2 设$\theta>0$，定义函数

$$\xi_t:=\int_0^t(1+s)^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}\theta(1+s)^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{3}\theta}\mathrm{d}L_s,\quad t\ge 0$$

过程$\xi=\{\xi_t,t\ge 0\}$和随机变量$\xi_\infty:=\int_0^\infty(1+s)^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}\theta(1+s)^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{3}\theta}\mathrm{d}L_s$在$L^2$上是适定的。当$t$趋于无穷时，

$$\eta_t:=(1+t)^{\frac{3n}{2}}\phi(t)(\xi_t-\xi_\infty)\to 0 \tag{5}$$

在L^2和几乎处处意义下成立，其中$n\ge 1$和$\phi(t)=(1+t)^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}\theta(1+t)^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{3}\theta}\int_0^t\mathrm{e}^{\frac{2}{3}\theta(1+s)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}\theta}\mathrm{d}s$。

证明 给定$\theta>0$，记$h_\nu=\int_{|y|<1}y^2\nu(\mathrm{d}y)<\infty$。对$t>0$，有

$$E|\xi_t|^2=\int_0^t(1+s)\mathrm{e}^{\frac{4}{3}\theta(1+s)^{\frac{3}{2}}-\frac{4}{3}\theta}\mathrm{d}s+\int_0^t\int_{|y|<1}y^2(1+s)\mathrm{e}^{\frac{4}{3}\theta(1+s)^{\frac{3}{2}}-\frac{4}{3}\theta}\nu(\mathrm{d}y)\mathrm{d}s$$
$$=(1+h_\nu)\int_0^t(1+s)\mathrm{e}^{\frac{4}{3}\theta(1+s)^{\frac{3}{2}}-\frac{4}{3}\theta}\mathrm{d}s<(1+h_\nu)\int_0^\infty(1+s)\mathrm{e}^{\frac{4}{3}\theta(1+s)^{\frac{3}{2}}-\frac{4}{3}\theta}\mathrm{d}s<\infty$$

此外，当t趋于无穷时，基于$\phi(t)\to\theta^{-1}$以及

$$(1+t)^{3n}E|\xi_t-\xi_\infty|^2=(1+t)^{3n}(1+h_\nu)\int_t^\infty(1+s)\mathrm{e}^{-\frac{4}{3}\theta(1+s)^{\frac{3}{2}}+\frac{4}{3}\theta}\mathrm{d}s\to 0$$

我们得到收敛性(5)在L^2上成立。现证明它依概率 1 收敛。对任意$n\ge 1$，当t趋于无穷时，

$$(1+t)^{\frac{3n}{2}}(\xi_\infty-\xi_t)=(1+t)^{\frac{3n}{2}}\int_t^\infty(1+s)^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}\theta(1+s)^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{3}\theta}\mathrm{d}L_s$$
$$=-(1+t)^{\frac{3n+1}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}\theta(1+t)^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{3}\theta}L_t-\frac{1}{2}(1+t)^{\frac{3n}{2}}\int_t^\infty L_s\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}\theta(1+s)^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{3}\theta}\left((1+s)^{-\frac{1}{2}}-2\theta(1+s)\right)\mathrm{d}s\to 0$$

几乎处处成立。进一步地，当t趋于无穷时，

$$\eta_t\xrightarrow{a.s}0$$

我们得到了引理。

引理 3.3 假设$\theta>0$，函数I_θ为引理 3.1 中定义得函数，则

$$\lim_{t\to\infty}(1+t)^{\frac{3}{2}} I_\theta(t)=\frac{1}{2\theta}$$

和

$$\lim_{t\to\infty}(1+t)^{\frac{5}{2}} I_\theta'(t)=-\frac{3}{4\theta}.$$

证明 给定 $\theta>0$，利用洛必达法则，可以得到

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}(1+t)^{\frac{3}{2}} I_\theta(t)&=\lim_{t\to\infty}(1+t)^{\frac{3}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{2}{3}\theta(1+t)^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{3}\theta}\left(-\mathrm{e}^{\frac{2}{3}\theta(1+t)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}\theta}+\theta(1+t)^{\frac{1}{2}}\int_0^t \mathrm{e}^{\frac{2}{3}\theta(1+s)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}\theta}\mathrm{d}s\right)\\&=\lim_{t\to\infty}(1+t)^{\frac{3}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{2}{3}\theta(1+t)^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{3}\theta}\left(-\int_0^t\theta(1+s)^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{\frac{2}{3}\theta(1+s)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}\theta}\mathrm{d}s-1+\theta(1+t)^{\frac{1}{2}}\int_0^t \mathrm{e}^{\frac{2}{3}\theta(1+s)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}\theta}\mathrm{d}s\right)\\&=\lim_{t\to\infty}\theta(1+t)^{\frac{3}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{2}{3}\theta(1+t)^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{3}\theta}\int_0^t \mathrm{e}^{\frac{2}{3}\theta(1+s)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}\theta}\left[(1+t)^{\frac{1}{2}}-(1+s)^{\frac{1}{2}}\right]\mathrm{d}s=\frac{1}{2\theta}\end{aligned}$$

当 $t\ge 0$ 时，显然

$$\begin{aligned}I_\theta'(t)&=\frac{\theta}{2}(1+t)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}\theta(1+t)^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{3}\theta}\int_0^t \mathrm{e}^{\frac{2}{3}\theta(1+u)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}\theta}\mathrm{d}u+\theta(1+t)^{\frac{1}{2}}-\theta^2(1+t)\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}\theta(1+t)^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{3}\theta}\int_0^t \mathrm{e}^{\frac{2}{3}\theta(1+u)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}\theta}\mathrm{d}u\\&=\theta(1+t)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}\theta(1+t)^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{3}\theta}\left(\frac{1}{2}\int_0^t \mathrm{e}^{\frac{2}{3}\theta(1+u)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}\theta}\mathrm{d}u+(1+t)\mathrm{e}^{\frac{2}{3}\theta(1+t)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}\theta}-\theta(1+t)^{\frac{3}{2}}\int_0^t \mathrm{e}^{\frac{2}{3}\theta(1+u)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}\theta}\mathrm{d}u\right)\\&=\theta(1+t)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}\theta(1+t)^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{3}\theta}\int_0^t \mathrm{e}^{\frac{2}{3}\theta(1+u)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}\theta}\left(\frac{1}{2}-\theta(1+t)^{\frac{3}{2}}+\theta(1+t)(1+u)^{\frac{1}{2}}\right)\mathrm{d}u+\theta(1+t)^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}\theta(1+t)^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{3}\theta}\end{aligned}$$

令

$$f_\theta(t)=\int_0^t \mathrm{e}^{\frac{2}{3}\theta(1+u)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}\theta}\left(\frac{1}{2}-\theta(1+t)^{\frac{3}{2}}+\theta(1+t)(1+u)^{\frac{1}{2}}\right)\mathrm{d}u$$

其中 $\theta>0$，则对任意的 $t\ge 0$，显然有 $f_\theta(0)=0$ 和

$$I_\theta'(t)=\theta(1+t)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}\theta(1+t)^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{3}\theta}\left(f_\theta(t)+1\right)$$

另一方面，对任意的 $t\ge 0$，当 t 趋于无穷时，有

$$\begin{aligned}f_\theta'(t)&=\int_0^t \mathrm{e}^{\frac{2}{3}\theta(1+u)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}\theta}\left(-\frac{3}{2}\theta(1+t)^{\frac{1}{2}}+\theta(1+u)^{\frac{1}{2}}\right)\mathrm{d}u+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{2}{3}\theta(1+t)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}\theta}\\&=-\frac{3}{2}\theta(1+t)^{\frac{1}{2}}\int_0^t \mathrm{e}^{\frac{2}{3}\theta(1+u)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}\theta}\mathrm{d}u+\theta\int_0^t \mathrm{e}^{\frac{2}{3}\theta(1+u)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}\theta}(1+u)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}u+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{2}{3}\theta(1+t)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}\theta}\\&=-\frac{3}{2}\theta\int_0^t \mathrm{e}^{\frac{2}{3}\theta(1+u)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}\theta}\left[(1+t)^{\frac{1}{2}}-(1+u)^{\frac{1}{2}}\right]\mathrm{d}u+\frac{1}{2}\\&=-\frac{3}{4}\theta\int_0^t(1+u)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}u\int_0^u \mathrm{e}^{\frac{2}{3}\theta(1+s)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}\theta}\mathrm{d}s+\frac{1}{2}\to-\infty\end{aligned}$$

和 $f_\theta'(t)\le\frac{1}{2}$ 成立。则

$$f_\theta(t)=\int_0^t f_\theta'(s)\mathrm{d}s\to\infty\quad(t\to\infty)$$

由洛必达法则得，

$$\lim_{t\to\infty}(1+t)^{\frac{5}{2}}I_\theta'(t)=\lim_{t\to\infty}\theta(1+t)^2\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}\theta(1+t)^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{3}\theta}f_\theta(t)$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{-3\theta}{2(1+t)^{-\frac{3}{2}}\mathrm{e}^{\frac{2}{3}\theta(1+t)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}\theta}}\int_0^t\mathrm{e}^{\frac{2}{3}\theta(1+u)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}\theta}\left[(1+t)^{\frac{1}{2}}-(1+u)^{\frac{1}{2}}\right]\mathrm{d}u$$
$$=-\frac{3}{4\theta}$$

证毕。

引理 3.4 假设$\theta>0$，$I_\theta(t)$为引理 3.1 中所定义函数，则随机变量$\int_0^\infty I_\theta(s)\mathrm{d}L_s$在$L^2$意义下存在并且

$$\int_0^t I_\theta(s)\mathrm{d}L_s\to\int_0^\infty I_\theta(s)\mathrm{d}L_s\quad(t\to\infty)$$

在L^2和几乎处处意义下成立。

证明 给定$\theta>0$，对一切$t\geq0$，有$\lim_{t\to\infty}I_\theta(t)=0$。由引理 3.3 得，对任意的$t\geq0$，下列连续性成立：

$$\left|I_\theta(t)\right|\leq C_\theta(1+t)^{-\frac{3}{2}}\tag{6}$$

$$\left|I_\theta'(t)\right|\leq C_\theta(1+t)^{-\frac{5}{2}}\tag{7}$$

显然当$t\geq0$时有

$$E\left|\int_0^t I_\theta(s)\mathrm{d}L_s\right|^2=(1+h_\nu)\int_0^t I_\theta(s)^2\mathrm{d}s<(1+h_\nu)\int_0^\infty I_\theta(s)^2\mathrm{d}s<\infty$$

我们考虑当t趋于无穷时，$\int_0^t I_\theta(s)\mathrm{d}L_s$的收敛性。记

$$\Psi_t=\int_0^\infty I_\theta(s)\mathrm{d}L_s-\int_0^t I_\theta(s)\mathrm{d}L_s=\int_t^\infty I_\theta(s)\mathrm{d}L_s$$

当t趋于无穷时，由(6)我们有

$$E\left|\Psi_t\right|^2=(1+h_\nu)\int_t^\infty I_\theta(s)^2\mathrm{d}s\sim(1+t)^{-2}\to0$$

接下来，我们证明对一切$\theta>0$，当t趋于无穷时Ψ_t几乎处处收敛到零。当t趋于无穷时，通过(6)、(7)和分部积分，显然有

$$\Psi_t=\int_t^\infty I_\theta(s)\mathrm{d}L_s=-I_\theta(t)L_t-\int_t^\infty L_sI_\theta'(s)\mathrm{d}s\to0$$

几乎处处成立，引理得证。

定理 3.5 假设$\theta>0$。当$t\to\infty$时，

$$J_t(0;\theta):=(1+t)^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}\theta(1+t)^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{3}\theta}X_t\to\xi_\infty+\theta^{-1}w$$

在L^2和几乎处处意义下收敛。

证明 给定$\theta>0$。当$t\geq0$时有

$$J_t(0;\theta)=(1+t)^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}\theta(1+t)^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{3}\theta}X_t$$
$$=(1+t)^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}\theta(1+t)^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{3}\theta}\left(\int_0^t h_\theta(t,s)\mathrm{d}L_s+w\int_0^t h_\theta(t,s)\mathrm{d}s\right)$$
$$=(1+t)^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}\theta(1+t)^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{3}\theta}L_t+\theta(1+t)^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}\theta(1+t)^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{3}\theta}\int_0^t\mathrm{e}^{\frac{2}{3}\theta(1+u)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}\theta}\xi_u\mathrm{d}u$$
$$+w(1+t)^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}\theta(1+t)^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{3}\theta}\int_0^t h_\theta(t,s)\mathrm{d}s$$

通过分部积分，有

$$\begin{aligned}\int_0^t e^{\frac{2}{3}\theta(1+u)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}\theta}\left(\xi_u-\xi_\infty\right)du &= -\int_0^t e^{\frac{2}{3}\theta(1+u)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}\theta}\int_u^\infty (1+s)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{2}{3}\theta(1+s)^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{3}\theta} dL_s du \\ &= -\int_0^t (1+s)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{2}{3}\theta(1+s)^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{3}\theta}\int_0^s e^{\frac{2}{3}\theta(1+u)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}\theta} du dL_s \\ &\quad -\int_0^t e^{\frac{2}{3}\theta(1+u)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}\theta} du \int_t^\infty (1+s)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{2}{3}\theta(1+s)^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{3}\theta} dL_s \\ &\equiv \zeta_t(1)-\zeta_t(2)\end{aligned}$$

又因为对任意 $t \ge 0$，

$$\int_0^t h_\theta(t,s) ds = \int_0^t e^{\frac{2}{3}\theta(1+u)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}\theta} du$$

所以有

$$\begin{aligned}&J_t(0;\theta)-\left(\xi_\infty+\theta^{-1}w\right) \\ &= (1+t)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{2}{3}\theta(1+t)^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{3}\theta} L_t + \theta(1+t)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{2}{3}\theta(1+t)^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{3}\theta}\left(\zeta_t(1)-\zeta_t(2)\right)+\left(\xi_\infty+\theta^{-1}w\right) I_\theta(t) \\ &= \left(\xi_\infty+\theta^{-1}w\right) I_\theta(t) - (1+t)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{2}{3}\theta(1+t)^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{3}\theta}\int_0^t I_\theta(s) dL_s - \theta\phi(t)\left(\xi_\infty-\xi_t\right)\end{aligned} \tag{8}$$

因此，当 t 趋于无穷时，由事实

$$\frac{L_t}{t} \to 0$$

在 L^2 和几乎处处意义下成立以及引理 3.1、引理 3.2 和引理 3.4 可得，

$$J_t(0;\theta)-\left(\xi_\infty+\theta^{-1}w\right) \to 0$$

在 L^2 和几乎处处意义下成立。

定理 3.6 假设 $\theta > 0$。定义递推过程 $J(n;\theta)=\left\{J_t(n;\theta), t \ge 0\right\}, n = 0,1,2,\cdots$，即，

$$J_t(0;\theta) := (1+t)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{2}{3}\theta(1+t)^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{3}\theta} X_t$$

$$J_t(n;\theta) := \theta(1+t)^{\frac{3}{2}}\left(J_t(n-1;\theta)-\left(\xi_\infty+\theta^{-1}w\right)\lambda_{n-1}\right)$$

则对任意 $n \ge 0$，当 t 趋于无穷时，

$$J_t(n;\theta) \to \left(\xi_\infty+\theta^{-1}w\right)\lambda_n$$

在 L^2 和几乎处处意义下成立，其中 X_t 是方程(2)的解且 $\lambda_0 = 1$。

证明 给定 $\theta > 0$。当 $t \ge 0$ 时，(8)表明对任意 $t > 0$ 和 $n \ge 1$，

$$\begin{aligned}J_t(n;\theta) &= \theta(1+t)^{\frac{3}{2}}\left(J_t(n-1;\theta)-\left(\xi_\infty+\theta^{-1}w\right)\lambda_{n-1}\right) \\ &= \left(\xi_\infty+\theta^{-1}w\right) I_\theta(t,n) - \theta^n (1+t)^{\frac{3n+1}{2}} e^{-\frac{2}{3}\theta(1+t)^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{3}\theta}\int_0^t I_\theta(s) dL_s - \theta^{n+1}(1+t)^{\frac{3n}{2}}\phi(t)\left(\xi_\infty-\xi_t\right)\end{aligned}$$

其中 $I_\theta(t)$ 是引理 3.1 中定义的。因此，该定理的证明可以由(4)、(5)和引理 3.4 得到。

4. 统计推断

在本章中，我们研究微分方程

$$\mathrm{d}X_t=\mathrm{d}L_t+\theta\left(\int_0^t(1+s)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}X_s\right)\mathrm{d}t$$

在连续观测下的参数估计。记 $Y_t=\int_0^t(1+r)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}X_r$ 。θ 的最小二乘估计量可由以下比较函数的最小值求出：

$$\rho(\theta)=\int_0^T\left(\dot{X}_t-\theta Y_t\right)^2\mathrm{d}t$$

得到 θ 的最小二乘估计量

$$\hat{\theta}_T=\frac{\int_0^T Y_t\mathrm{d}X_t}{\int_0^T Y_t^2\mathrm{d}t}$$

由常数变易法得

$$Y_t=\mathrm{e}^{\frac{2}{3}\theta(1+t)-\frac{2}{3}\theta}\int_0^t(1+s)^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}\theta(1+s)^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{3}\theta}\mathrm{d}L_s=\mathrm{e}^{\frac{2}{3}\theta(1+t)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}\theta}\xi_t \tag{9}$$

为了研究参数的相合性和渐近分布，我们引入了一个引理。

引理 4.1 当 T 趋于无穷时，有如下依分布收敛成立：

$$(1+T)^{\frac{1}{4}}\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}\theta(1+T)^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{3}\theta}\int_0^T\mathrm{e}^{\frac{2}{3}\theta(1+s)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}\theta}\mathrm{d}L_s\to L_1$$

其中随机变量 L_1 服从三元组 $\left((2\theta)^{-\frac{1}{2}},K_T^{-1}v,0\right)$ 的无限可分分布，$K_T=(1+T)^{\frac{1}{4}}\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}\theta(1+T)^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{3}\theta}\int_0^T\mathrm{e}^{\frac{2}{3}\theta(1+s)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}\theta}\mathrm{d}s$ 。

证明 显然，对任意 $T>0$ ，有

$$(1+T)^{\frac{1}{4}}\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}\theta(1+T)^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{3}\theta}\int_0^T\mathrm{e}^{\frac{2}{3}\theta(1+s)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}\theta}\mathrm{d}L_s=L_1$$

其中 L_1 服从一个无限可分分布，生成三元组为 $(A,v_1,0)$ 。这里等号“=”表示分布相等。我们知道 L_t 的特征函数如下：

$$\varphi_{L_t}(u)=E\left[\mathrm{e}^{\{i\langle L_t,u\rangle\}}\right]=\exp\left\{-\frac{1}{2}t\langle u,u\rangle+t\int_{\mathbb{R}_0}\left(\mathrm{e}^{i(u,x)}-1-i\langle u,x\rangle\right)v(\mathrm{d}x)\right\}$$

记

$$M_t=\int_{|y|<1}y(1+T)^{\frac{1}{4}}\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}\theta(1+T)^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{3}\theta}\int_0^T\mathrm{e}^{\frac{2}{3}\theta(1+s)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}\theta}\tilde{N}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}y)=K_T\int_{|y|<1}y\tilde{N}(\mathrm{d}y,s)$$

于是我们可以得到

$$E\left[\mathrm{e}^{\{i\langle M_t,u\rangle\}}\right]=\exp\left\{t\int_{\mathbb{R}_0}\left(\mathrm{e}^{i\langle u,K_Tx\rangle}-1-i\langle u,K_Tx\rangle\right)v(\mathrm{d}x)\right\}=\exp\left\{t\int_{\mathbb{R}_0}\left(\mathrm{e}^{i\langle u,x\rangle}-1-i\langle u,x\rangle\right)\left(vK^{-1}\right)(\mathrm{d}x)\right\}$$

故我们得到了 $v_1=K_T^{-1}$ 以及

$$\begin{aligned}A&=\lim_{T\to\infty}(1+T)^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{4}{3}\theta(1+T)^{\frac{3}{2}}+\frac{4}{3}\theta}E\left|\int_0^T\mathrm{e}^{\frac{2}{3}\theta(1+s)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}\theta}\mathrm{d}B_s\right|^2\\&=\lim_{T\to\infty}(1+T)^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{4}{3}\theta(1+T)^{\frac{3}{2}}+\frac{4}{3}\theta}\int_0^T\mathrm{e}^{\frac{4}{3}\theta(1+s)^{\frac{3}{2}}-\frac{4}{3}\theta}\mathrm{d}s=\frac{1}{2\theta}\end{aligned}$$

引理得证。

定理 4.1 假设 $\theta>0$ ，则估计量 $\hat{\theta}$ 是强相合的，换句话说，当 T 趋于无穷时，

$$\hat{\theta}\to\theta$$

几乎必然成立。进一步地，当 T 趋于无穷大时，以下依分布收敛性成立：

$$(1+T)^{-\frac{1}{4}}\mathrm{e}^{\frac{2}{3}\theta(1+T)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}\theta}\left(\hat{\theta}_T-\theta\right)\to\frac{2\theta L_1}{\xi_\infty}$$

其中 L_1 如引理 4.1 中所定义，并且 L_1 和 ξ_∞ 相互独立。

证明 由分部积分可得

$$\int_0^T Y_t\mathrm{d}L_t=Y_TL_T-\int_0^T L_t\mathrm{d}Y_t=Y_TL_T-\theta\int_0^T(1+t)^{\frac{1}{2}}L_tY_t\mathrm{d}t-\int_0^T(1+t)^{\frac{1}{2}}L_t\mathrm{d}L_t$$

结合(9)、引理 3.2 和洛必达法则，可以证明当 T 趋于无穷大时，以下收敛以概率 1 成立：

$$(1+T)^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{4}{3}\theta(1+T)^{\frac{3}{2}}+\frac{4}{3}\theta}\int_0^T Y_t^2\mathrm{d}t\to\frac{\xi_\infty^2}{2\theta}$$

$$(1+T)^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{4}{3}\theta(1+T)^{\frac{3}{2}}+\frac{4}{3}\theta}Y_TL_T=\frac{L_T}{T}\cdot T(1+T)^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}\theta(1+T)^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{3}\theta}\xi_T\to 0$$

$$(1+T)^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{4}{3}\theta(1+T)^{\frac{3}{2}}+\frac{4}{3}\theta}\int_0^T(1+t)^{\frac{1}{2}}L_tY_t\mathrm{d}t=\frac{(1+T)^2}{\mathrm{e}^{\frac{2}{3}\theta(1+T)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}\theta}}\cdot\frac{\int_0^T(1+t)^{\frac{1}{2}}L_tY_t\mathrm{d}t}{(1+T)^{\frac{3}{2}}\mathrm{e}^{\frac{2}{3}\theta(1+T)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}\theta}}\to 0$$

此外，当 T 趋于无穷大时有

$$\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}\theta(1+T)^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{3}\theta}\int_0^T(1+t)^{\frac{1}{2}}L_t\mathrm{d}L_t=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}\theta(1+T)^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{3}\theta}\left[(1+T)^{\frac{1}{2}}L_T^2-\frac{1}{2}\int_0^T(1+t)^{-\frac{1}{2}}L_t^2\mathrm{d}t\right]\to 0$$

综合以上结论，我们可以得到：

$$\hat{\theta}_T-\theta=\frac{\int_0^T Y_t\mathrm{d}X_t}{\int_0^T Y_t^2\mathrm{d}t}-\theta=\frac{\int_0^T Y_t\mathrm{d}L_t}{\int_0^T Y_t^2\mathrm{d}t}\to 0$$

几乎必然成立。接下来我们考虑估计量 $\hat{\theta}$ 的渐近分布。对任意 $T>0$，我们有

$$(1+T)^{-\frac{1}{4}}\mathrm{e}^{\frac{2}{3}\theta(1+T)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}\theta}\left(\hat{\theta}_T-\theta\right)=\frac{(1+T)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{\frac{4}{3}\theta(1+T)^{\frac{3}{2}}-\frac{4}{3}\theta}}{\int_0^T Y_t^2\mathrm{d}t}\frac{\int_0^T Y_t\mathrm{d}L_t}{(1+T)^{-\frac{1}{4}}\mathrm{e}^{\frac{2}{3}\theta(1+T)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}\theta}}$$

记 $m_t=(1+t)^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}\theta(1+t)^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{3}\theta}\int_0^t\mathrm{e}^{\frac{2}{3}\theta(1+s)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}\theta}\mathrm{d}L_s$，对任意 $T>0$，有

$$\begin{aligned}\int_0^T Y_t\mathrm{d}L_t&=\int_0^T\mathrm{e}^{\frac{2}{3}\theta(1+t)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}\theta}\xi_t\mathrm{d}L_t=\int_0^T\mathrm{e}^{\frac{2}{3}\theta(1+t)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}\theta}\xi_T\mathrm{d}L_t+\int_0^T\mathrm{e}^{\frac{2}{3}\theta(1+t)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}\theta}(\xi_t-\xi_T)\mathrm{d}L_t\\&=\xi_T\int_0^T\mathrm{e}^{\frac{2}{3}\theta(1+t)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}\theta}\mathrm{d}L_t-\int_0^T(1+s)^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}\theta(1+s)^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{3}\theta}\int_0^s\mathrm{e}^{\frac{2}{3}\theta(1+t)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}\theta}\mathrm{d}L_t\mathrm{d}L_s\\&=\xi_T\int_0^T\mathrm{e}^{\frac{2}{3}\theta(1+t)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}\theta}\mathrm{d}L_t-\int_0^T m_s\mathrm{d}L_s\end{aligned}$$

当 T 趋于无穷时，由

$$\begin{aligned}&(1+T)^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{4}{3}\theta(1+T)^{\frac{3}{2}}+\frac{4}{3}\theta}E\left|\int_0^T m_sL_s\right|^2=(1+T)^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{4}{3}\theta(1+T)^{\frac{3}{2}}+\frac{4}{3}\theta}(1+h_v)\int_0^T E|m_s|^2\mathrm{d}s\\&=(1+h_v)^2(1+T)^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{4}{3}\theta(1+T)^{\frac{3}{2}}+\frac{4}{3}\theta}\int_0^T(1+s)\mathrm{e}^{-\frac{4}{3}\theta(1+s)^{\frac{3}{2}}+\frac{4}{3}\theta}\int_0^s\mathrm{e}^{\frac{4}{3}\theta(1+u)^{\frac{3}{2}}-\frac{4}{3}\theta}\mathrm{d}u\mathrm{d}s\\&\sim(1+T)^2\mathrm{e}^{-\frac{4}{3}\theta(1+T)^{\frac{3}{2}}+\frac{4}{3}\theta}\end{aligned}$$

可以得到

$$(1+T)^{\frac{1}{4}}\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}\theta(1+T)^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{3}\theta}\int_0^T m_s \mathrm{d}L_s \xrightarrow{L^2} 0$$

综上所述结合引理 4.1，有

$$(1+T)^{-\frac{1}{4}}\mathrm{e}^{\frac{2}{3}\theta(1+T)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}\theta}\left(\hat{\theta}_T-\theta\right)=\frac{(1+T)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{\frac{4}{3}\theta(1+T)^{\frac{3}{2}}-\frac{4}{3}\theta}}{\int_0^T Y_t^2\mathrm{d}t}\frac{\int_0^T Y_t \mathrm{d}L_t}{(1+T)^{-\frac{1}{4}}\mathrm{e}^{\frac{2}{3}\theta(1+T)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}\theta}}\to\frac{2\theta L_1}{\xi_\infty}$$

依分布收敛，其中 L_1 服从无限可分分布，生成三元组为 $\left((2\theta)^{-\frac{1}{2}},K_T^{-1}\nu,0\right)$ 并且 L_1 和 ξ_∞ 相互独立。定理得证。

参考文献

[1] Cranston, M. and Le Jan, Y. (1995) Self-Attracting Diffusion: Two Case Studies. *MathematischeAnnalen*, **303**, 87-93. https://doi.org/10.1007/BF01460980

[2] Durrett, R. and Rogers, L.C.G. (1992) Asymptotic Behavior of Brownian Polymer. *Probability Theory and Related Fields*, **92**, 337-349. https://doi.org/10.1007/BF01300560

[3] Benaïm, M., Ciotir, I. and Gauthier, C.-E. (2015) Self-Repelling Diffusions via an Infinite Dimensional Approach. *Stochastic Partial Differential Equations*: *Analysis and Computations*, **3**, 506-530. https://doi.org/10.1007/s40072-015-0059-5

[4] Benaïm, M., Ledoux, M. and Raimond, O. (2002) Self-Interacting Diffusions. *Probability Theory and Related Fields*, **122**, 1-41. https://doi.org/10.1007/s004400100161

[5] Cranston, M. and Mountford, T.S. (1996) The Strong Law of Large Numbers for a Brownian Polymer. *Annals of Probability*, **24**, 1300-1323. https://doi.org/10.1214/aop/1065725183

[6] Gauthier, C.-E. (2016) Self Attracting Diffusions on a Sphere and Application to a Periodic Case. *Electronic Communications in Probability*, **21**, 1-12. https://doi.org/10.1214/16-ECP4547

[7] Herrmann, S. and Roynette, B. (2003) Boundedness and Convergence of Some Self-Attracting Diffusions. *MathematischeAnnalen*, **325**, 81-96. https://doi.org/10.1007/s00208-002-0370-0

[8] Herrmann, S. and Scheutzow, M. (2004) Rate of Convergence of Some Self-Attracting Diffusions. *Stochastic Processes and Their Applications*, **111**, 41-55. https://doi.org/10.1016/j.spa.2003.10.012

[9] Kleptsyny , V. and Kurtzmann, A. (2012) Ergodicity of Self-Attracting Motion. *Electronic Journal of Probability*, **17**, 1-37. https://doi.org/10.1214/EJP.v17-2121

[10] Mountford, T. and Tarrès, P. (2008) An Asymptotic Result for Brownian Polymers. *Annales de l'IHPProbabilités et Statistiques*, **44**, 29-46. https://doi.org/10.1214/07-AIHP113

[11] Sun, X. and Yan, L. (2021) Asymptotic Behaviour on the Linear Self-Interacting Diffusion Driven by *a*-Stable Motion. *Stochastics*: *An International Journal of Probability and Stochastic Processes*, **93**, 1186-1208. https://doi.org/10.1080/17442508.2020.1869239

[12] Sun, X. and Yan, L. (2022) The Laws of Large Numbers Associated with the Linear Self-Attracting Diffusion Driven by Fractional Brownian Motion and Applications. *Journal of Theoretical Probability*, **35**, 1423-1478. https://doi.org/10.1007/s10959-021-01126-0

[13] Yan, L., Sun, Y. and Lu, Y. (2008) On the Linear Fractional Self-Attracting Diffusion. *Journal of Theoretical Probability*, **21**, 502-516. https://doi.org/10.1007/s10959-007-0113-y

[14] Applebaum, D. (2004) Lévy Processes and Stochastic Calculus. Cambridge University Press, Cambridge. https://doi.org/10.1017/CBO9780511755323

[15] Sato, K. (1999) Lévy Processes and Infinite Divisibility. Cambridge University Press, Cambridge.

[16] Protter, P. (2005) Stochastic Integration and Differential Equations. Vol. 21, Springer, Berlin, Heidelberg and New York. https://doi.org/10.1007/978-3-662-10061-5_6