Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2024, 13(3), 1002-1007
Published Online March 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2024.133094

泰勒公式在考研题中的妙用

杨慧芝

四川建筑职业技术学院，基础教学部数学教研室，四川 成都

收稿日期：2024年2月27日；录用日期：2024年3月21日；发布日期：2024年3月27日

摘 要

高等数学是众多专业考研时的必考科目，泰勒公式在高等数学中至关重要。在考研数学中，泰勒公式频繁出现，主要集中在求极限和求高阶导数的题型中。求极限和求高阶导数的方法有多种，但如果能使用泰勒公式求解，往往都可以很大程度降低计算量。本文基于考研数学真题，系统地讨论了带有佩亚诺余项的麦克劳林公式在求极限中，以及泰勒级数在求高阶导数中的灵活应用。并对解题时泰勒公式展开的次数和余项选取办法作出了详细研究，通过对比泰勒公式和其它方法，展现了泰勒公式的优势，为学生理解掌握其应用奠定了基础。

关键词

泰勒公式，高阶导数，极限

The Magical Use of Talor's Formula in Postgraduate Examination

Huizhi Yang

Mathematics Teaching and Research Office, Sciences Basic Teaching Department, Sichuan College of Architectural Technology, Chengdu Sichuan

Received: Feb. 27th, 2024; accepted: Mar. 21st, 2024; published: Mar. 27th, 2024

Abstract

Advanced mathematics is a required subject for many majors in postgraduate examinations, and Taylor's formula is crucial in advanced mathematics. In postgraduate mathematics examination, Taylor's formula appears frequently, mainly in questions about finding limits and finding high-order derivatives. There are many ways to find limits and higher-order derivatives, but if Taylor's formula can be used to solve it, the amount of calculation can often be markedly reduced. Based on

文章引用: 杨慧芝. 泰勒公式在考研题中的妙用[J]. 应用数学进展, 2024, 13(3): 1002-1007.
DOI: 10.12677/aam.2024.133094

the postgraduate mathematics examination questions, this article systematically discusses the flexible application of Maclaurin's formula with Peano remainder in finding limits, and the flexible application of Taylor series in finding higher-order derivatives. A detailed study was made on the number of expansions of Taylor's formula and the method of selecting remainders when solving problems. By comparing Taylor's formula with other methods, the advantages of Taylor's formula were demonstrated, laying a foundation for students to understand and master its application.

Keywords

Taylor's Formula, Higher-Order Derivatives, Limits

1. 引言

泰勒公式是高等数学中的重要知识点[1]，其中带有佩亚诺余项的泰勒公式，在求极限中应用广泛，具体内容是：

若 $f(x)$ 在包含 x_0 的某开区间 (a,b) 内具有直到 $n+1$ 阶的导数，则对任一 $x\in(a,b)$，有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^n(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x), \tag{1}$$

其中

$$R_n(x)=o(x-x_0)^n\text{。} \tag{2}$$

(2)称为佩亚诺余项。

如果取 $x=0$，(1)也可以写成：

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^n(0)}{n!}x^n+o(x^n) \tag{3}$$

(3)称为带有佩亚诺余项的麦克劳林公式。

$f(x)$ 的泰勒级数展开式为：

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^n(0)}{n!}x^n+\cdots(-R<x<R) \tag{4}$$

其中 R 为收敛半径。(4)在求高阶导数中应用广泛。

近年来，许多学者对泰勒公式在高等数学解题中的应用进行了深入研究。例如，瞿杏元讨论了分式未定式极限的多种求法，其中泰勒便是其中一种重要的方法[2]。徐佳文和朱莉萨研究了泰勒公式在级数的敛散性判别和不定式的计算等方面的应用[3]。龚冬保、张梦燕等学者以考研真题为载体，讨论了泰勒公式在考研数学试题中的应用[4] [5]。

本文将继续深入研究泰勒在考研题中的妙用，以考研真题作为案例，分析在不同题型中使用泰勒展开的次数选取和余项选取方法，总结在考研数学中使用泰勒公式的技巧。

2. 引入知识

2.1. 洛必达法则

设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 满足条件：

1) $\lim\limits_{x\to c} f(x)=\lim\limits_{x\to c} g(x)=0$ 或 $\lim\limits_{x\to c} f(x)=\lim\limits_{x\to c} g(x)=\infty$，

2) $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $\overset{o}{U}(a)$ 内可导，

3) $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在或为 ∞，

则 $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$。

2.2. 常见的泰勒公式

$$\mathrm{e}^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+o\left(x^n\right),$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}+o\left(x^{2m-1}\right),$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^m\frac{x^{2m}}{(2m)!}+o\left(x^{2m}\right),$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o\left(x^n\right),$$

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o\left(x^n\right)。$$

3. 利用泰勒公式求极限

求极限的方法有许多种，但很多未定式处理起来非常复杂或者计算量巨大，若此时该极限中的一些函数能使用泰勒公式(一般选取带有佩亚诺余项的麦克劳林公式(3))进行展开，往往都可以极大地降低计算难度。而究竟展开到第几项，是使用泰勒公式求极限的难点。为此，可总结两个基本原则：

3.1. 原则 1：展开到系数不为 0 的最低次幂

下面以2019年考研数学(一)选择题第一题为例，展示在使用泰勒公式求极限的原则1。

例1 当 $x\to 0$ 时，若 $x-\tan x$ 与 x^k 是同阶无穷小，则$k=(\ )$

(A) 1.　　(B) 2.　　(C) 3.　　(D) 4.

分析：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\tan x}{x^k}$ 等于非零常数 C，该极限是 $\dfrac{0}{0}$ 型，但 x 的次数未知，用洛必达法则处理起来比较麻烦，使用泰勒非常方便快捷，使用带有佩亚诺余项的麦克劳林公式(3)对分子 $x-\tan x$ 中的 $\tan x$ 进行展开，若展开到一次，则 x 前的系数刚好为 0，而展开到三次方，可以保证 x^3 的系数不为 0，故展开到三次方即可。

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\tan x}{x^k}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\left[x+\dfrac{x^3}{3}+o\left(x^3\right)\right]}{x^k}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\dfrac{x^3}{3}+o\left(x^3\right)}{x^k}=C$

其中 C 为非零常数，$\therefore k=3$。应选 C。

3.2. 原则 2：展开到分子分母同次

下面以 2015 年考研数学(一)解答题第一题和 2014 年考研数学(三)选择题第三题为例，展示在使用泰勒公式求极限的原则 2。

例2 设函数 $f(x)=x+a\ln(1+x)+bx\sin x$， $g(x)=kx^3$。若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x\to0$ 时是等价无穷小，求 a,b,k 的值。

分析：令 $I=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x+a\ln(1+x)+bx\sin x}{kx^3}$，由题意得 I 等于 1，该极限中所涉及的函数可以使用泰勒公式展开。因为是 $\dfrac{0}{0}$ 型，也可以考虑使用洛必达法则。

解法 1：使用带有佩亚诺余项的麦克劳林公式(3)对函数进行展开。而因为待展开函数带参数，无法使用原则 1，故使用原则 2，展开到分子分母同次。

$$\because I=\lim_{x\to0}\frac{x+a\left(x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}\right)+bx\left(x-\dfrac{x^3}{6}\right)+o\left(x^3\right)+bxo\left(x^3\right)}{kx^3}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(1+a)x+\left(b-\dfrac{a}{2}\right)x^2+\dfrac{a}{3}x^3+o\left(x^3\right)+bxo\left(x^3\right)}{kx^3}=1$$

$$\therefore 1+a=0, b-\frac{a}{2}=0, \frac{a}{3}=k$$

$$\therefore a=-1, b=-\frac{1}{2}, k=-\frac{1}{3}.$$

解法 2：洛必达法则。

由 $I=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+\dfrac{a}{1+x}+b\sin x+bx\cos x}{3kx^2}$ 得 $a=-1$。

再由 $I=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\dfrac{1}{1+x}+b\sin x+bx\cos x}{3kx^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{x}{1+x}+b\sin x+bx\cos x}{3kx^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{1}{(1+x)^2}+2b\cos x-bx\sin x}{6kx}$ 得 $b=-\dfrac{1}{2}$。

再由 $I=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{1}{(1+x)^2}-\cos x+\dfrac{1}{2}x\sin x}{6kx}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{1}{(1+x)^2}-\cos x}{6kx}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\dfrac{2}{(1+x)^3}+\sin x}{6k}=-\dfrac{1}{3k}$ 得 $k=-\dfrac{1}{3}$。

很显然，该题使用洛必达法则求解，计算量大，过程繁琐复杂，使用泰勒公式非常方便快捷。

例3 $p(x)=a+bx+cx^2+dx^3$。当 $x\to0$ 时，若 $p(x)-\tan x$ 是比 x^3 高阶的无穷小量，则下列选项错误的是( )

(A) $a=0$ (B) $b=1$ (C) $c=0$ (D) $d=\dfrac{1}{6}$

分析：令 $I=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{p(x)-\tan x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a+bx+cx^2+dx^3-\tan x}{x^3}$，由题意得 I 等于 0，该极限中所涉及的函数可以使用泰勒公式展开。因为是 $\dfrac{0}{0}$ 型，也可以考虑使用洛必达法则。

解法 1：使用泰勒公式。本题待展开函数前也带参数，无法使用原则 1，故使用原则 2，展开到分子

分母同次。

$$\because \tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + o\left(x^3\right)$$

$$\therefore I = \lim_{x\to 0}\frac{a+(b-1)x+cx^2+\left(d-\frac{1}{3}\right)x^3+o\left(x^3\right)}{x^3} = 0$$

$$\therefore a = 0, b = 1, c = 0, d = \frac{1}{3}\text{。应选 D}$$

解法 2：使用洛必达法则。

$$\because \lim_{x\to 0}\left[p(x)-\tan x\right] = 0 \therefore a = 0.$$

$$\therefore p(x)-\tan x = bx + cx^2 + dx^3 - \tan x,$$

$$\because \lim_{x\to 0}\frac{p(x)-\tan x}{x} = 0 \ \therefore b-1=0 \text{ 即 } b=1.$$

$$\because \lim_{x\to 0}\frac{p(x)-\tan x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{(x-\tan x)+cx^2+dx^3}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x-\tan x}{x^2}+c = c = 0 \therefore c = 0.$$

$$\because \lim_{x\to 0}\frac{p(x)-\tan x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{(x-\tan x)+dx^3}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\sec^2 x}{3x^2}+d = d-\frac{1}{3} = 0 \therefore d = \frac{1}{3}.$$

在该题中，如果使用洛必达法则，需要使用隐含的条件：“$p(x)-\tan x$ 是比 x^3 高阶，则比 x、x^2 都要高阶”，很多学生容易忽略这点，并且还需要多次使用洛必达法求解，计算过程过于繁琐，而使用泰勒公式可以一步得出结果。

4. 利用泰勒公式求高阶导数

求高阶导数往往需要频繁使用复合函数求导法则和求导四则运算法则，过程非常繁琐计算量大，如果使用泰勒公式进行展开再求导，往往可以很大程度降低计算量。一般采用泰勒级数展开式(4)对函数进行展开。

下面以2010年考研数学(二)填空题第三题为例：

例 3 函数 $y=\ln(1-2x)$ 在 $x=0$ 处的 n 阶导数 $y^n(0)=$____。

分析：本题可以采用数学归纳法，也可以使用泰勒公式进行展开再求导。

解法 1：使用泰勒公式展开成级数，泰勒级数在 $x=0$ 处的 n 阶导刚好为 x^n 前的系数乘以 $n!$。

$$\because \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + \cdots,$$

$$\therefore \ln(1-2x) = -2x - \frac{2^2x^2}{2} - \frac{2^3x^3}{3} - \cdots - \frac{2^nx^n}{n} + \cdots.$$

$$\therefore f^n(0) = -\frac{2^n n!}{n} = -2^n(n-1)!.$$

解法 2：归纳法。

$y' = -\dfrac{2}{1-2x}, y'' = -\dfrac{2^2}{(1-2x)^2}, y''' = -\dfrac{2^3\cdot 2!}{(1-2x)^3}, \cdots$，归纳得：$y^n = -\dfrac{2^n\cdot(n-1)!}{(1-2x)^n}$，$\therefore y^n(0) = -2^n(n-1)!$

显然，使用泰勒公式展开，计算量较小。

5. 小结

本文以考研真题作为载体，探讨了使用泰勒公式来解决一些未定式求极限、求高阶导数等问题。展现了泰勒公式在使用时的技巧性，虽然灵活，但计算量往往更小，解题效率更高。泰勒公式的应用在历年考研数学中出现的概率很大，因此对于考研学生来说，熟练掌握泰勒公式的应用就显得尤为重要。本文概括了使用泰勒公式的技巧和方法，力求使学生掌握对于各个重要板块知识点的综合应用。

参考文献

[1] 同济大学数学系. 高等数学[M]. 第 6 版. 北京: 高等教育出版社, 2014: 139-142.

[2] 瞿杏元. 关于分式未定式极限的多解模式研究[J]. 应用数学进展, 2023, 12(2): 488-493.

[3] 徐佳文, 朱莉萨. 泰勒公式在实分析上的探究与应用[J]. 吉林工程技术师范学院学报, 2020(7): 91-94.

[4] 张梦燕, 杨小樱, 何桃顺. 泰勒定理在考研数学中的应用[J]. 四川文理学院学报, 2023, 33(2): 31-38.

[5] 龚冬保. 泰勒公式在解题中的妙用——从 2008 年的几道数学考研题说起[J]. 高等数学研究, 2008(5): 64.