Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2024, 13(3), 1058-1066**
Published Online March 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2024.133100

无限维量子系统上并发的单配性

穆志琴，段周波*

太原理工大学数学学院，山西 太原

收稿日期：2024年2月27日；录用日期：2024年3月21日；发布日期：2024年3月28日

摘　要

我们证明了在纯两体态上约化密度矩阵的严格凹函数给出的任何纠缠测度在纯三体态上都是单配性的。这包括一类重要的两体纠缠测度，它约化为纠缠的(冯・诺依曼)熵。此外，我们证明了无限维并发测度在纯三体态上是单配的，在混合三体态上也是单配的。为了证明我们的结果，我们使用了最近提出的无不等式纠缠的单配性的定义[Gour和Guo，Quantum 2，81 (2018)]。我们的结果促进了纠缠的单配性是量子纠缠的一个属性，而不是纠缠的一些特定测度的属性的概念。

关键词

并发，单配性，无限维

Monogamy of the Concurrence for Infinite-Dimensional Systems

Zhiqin Mu, Zhoubo Duan*

School of Mathematics, Taiyuan University of Technology, Taiyuan Shanxi

Received: Feb. 27th, 2024; accepted: Mar. 21st, 2024; published: Mar. 28th, 2024

Abstract

We show that any measure of entanglement that on pure bipartite states is given by a strictly concave function of the reduced density matrix is monogamous on pure tripartite states. This includes the important class of bipartite measures of entanglement that reduce to the (von Neumann) entropy of entanglement. Moreover, we show that infinite-dimensional concurrence is monogamous on pure tripartite and mixed tripartite states. To prove our results, we use the definition of monogamy without inequalities, recently put forward [Gour and Guo, Quantum 2, 81 (2018)]. Our

*通讯作者。

文章引用: 穆志琴, 段周波. 无限维量子系统上并发的单配性[J]. 应用数学进展, 2024, 13(3): 1058-1066.
DOI: 10.12677/aam.2024.133100

results promote the concept that monogamy of entanglement is a property of quantum entanglement and not an attribute of some particular measures of entanglement.

Keywords

Concurrence, Monogamy, Infinite-Dimensional

1. 介绍

量子纠缠是量子理论中最反直觉的现象之一。在量子力学的早期，它被认为是“量子力学的特征性质，这一性质使量子力学完全背离经典思维[1]。”另一方面，近年来它被确定为许多量子信息处理任务的关键资源[2] [3] [4]。与经典关联不同，它的一个关键特征是，它不能在多体之间自由共享。这就是所谓的单配性定律[5]，也是纠缠和量子力学本身的基本特征之一[6]。自从 Coffman、Kundu 和 Wootters 证明了三量子位态的第一个定量单配性关系[7]以来，这种共享关系已经得到了广泛的探索。

纠缠单配性研究中的一个重要问题是确定给定的纠缠测度是否是单配的。对于多量子位系统，几乎所有已知的纠缠测度都是单配性的。这些包括形成纠缠，并发[8] [9]，纠缠，负性，凸延伸负性，Tsallis-q 纠缠熵，Rényi-α 纠缠熵，压缩纠缠和单向可蒸馏纠缠，它们被证明是单配的[10]。然而，对于高维系统，对这种共享性知之甚少。到目前为止，除了单向可蒸馏纠缠和压缩纠缠，我们只知道 G-并发[11]在所有有限维中都是单配的[12]。根据参考文献[12] (也参见下面的等式(3))中给出的定义可知后者是单配的。也就是说，高维系统中其他纠缠测度的单配性仍然是未知的，即使是众所周知的测度，如并发。

设 $\mathcal{H}^A\otimes\mathcal{H}^B\otimes\mathcal{H}^C\equiv\mathcal{H}^{ABC}$ 是有限维的三体 Hilbert 空间，其中 A,B,C 是复合量子系统的三个子系统，且 $\mathcal{S}\left(\mathcal{H}^{ABC}\right)\equiv\mathcal{S}^{ABC}$ 是作用于 $\mathcal{H}^{ABC}$ 的密度矩阵集。回想一下，纠缠测度 E 的原始单配关系定量地显示为以下形式的不等式：

$$E\left(\rho^{A|BC}\right)\geq E\left(\rho^{AB}\right)+E\left(\rho^{AC}\right) \tag{1}$$

其中竖线表示测量(二分)纠缠的二分分裂。然而，等式(1)对许多纠缠测度无效。这可能会给人这样的印象，即纠缠的单配性不是纠缠本身的属性，而是用于量化纠缠的函数的属性。

此外，在参考文献[13]中，忠实性与单配性的问题是通过表明许多纠缠测度，如形成纠缠，不能满足某种形式的关系

$$E\left(\rho^{A|BC}\right)\geq f\left[E\left(\rho^{AB}\right),E\left(\rho^{AC}\right)\right] \tag{2}$$

其中 $f:\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ 是独立于基础 Hilbert 空间的维数的某个固定函数，且它是连续的，并满足 $f\left(x,y\right)\geq\max\left\{x,y\right\}$，且在 x 和 y 的某些范围内有严格不等式。尽管有这个显著的结果，我们在这里证明，形成纠缠以及许多其他根据凸延伸定义的纠缠测度，都符合最近在参考文献[12]提出的单配性定义。

根据参考文献[12]中关于单配性的定义(无不等式)，纠缠测度 E 是单配的，如果对于满足解纠缠条件的任何 $\rho^{ABC}\in\mathcal{S}^{ABC}$，有

$$E\left(\rho^{A|BC}\right)=E\left(\rho^{AB}\right) \tag{3}$$

我们得到 $E\left(\rho^{AC}\right)=0$。根据这个定义，如果系统 A 和复合系统 BC 之间的纠缠与系统 A 与 B 之间的纠缠一样多，那么系统 A 与 C 之间就没有纠缠可共享。

显然，这个定义抓住了纠缠单配性的本质，也许不足为奇的是，通过用 E^{α} 替换 E (对一些 $\alpha>0$) [12]，可以得到类似于(1)的一族单配性关系。更准确地说，根据这个定义，连续测度 E 是单配性的，当且仅当存在 $0<\alpha<\infty$ 使得

$$E^{\alpha}\left(\rho^{A|BC}\right)\geq E^{\alpha}\left(\rho^{AB}\right)+E^{\alpha}\left(\rho^{AC}\right), \tag{4}$$

对于作用在状态空间 $\mathcal{H}^{ABC}$ 上的所有 ρ^{ABC}，其固定的 $\dim\mathcal{H}^{ABC}=d<\infty$ (见参考文献[12]中的定理 1)。注意，公式(4)可以用与(2)相似的形式表示，其中 $f\left(x,y\right)=\left(x^{\alpha}+y^{\alpha}\right)^{1/\alpha}$。然而，我们在这里强调(4)不是(2)的特例，因为指数因子 α 取决于 Hilbert 空间的基本维数。注意，没有先验的物理理由来假设指数因子在维度上是普遍的和独立的。

在本文中，我们证明了几乎所有的纠缠单调在纯三体态上都是单配的，在混合三体态上也是单配的。我们的结果表明，单配性确实是纠缠的一种属性，而不是某种纠缠测量的结果。

函数 $E:\mathcal{S}^{AB}\to\mathbb{R}_{+}$ 称为纠缠测度，如果

1) 对于任何可分密度矩阵 $\sigma^{AB}\in\mathcal{S}^{AB}$，有 $E\left(\sigma^{AB}\right)=0$；

2) E 在局部运算和经典通信(LOCC)下表现单调。也就是说，对于任何给定的 LOCC 映射 Φ，我们都有

$$E\left[\Phi\left(\rho^{AB}\right)\right]\leq E\left(\rho^{AB}\right),\forall\rho^{AB}\in\mathcal{S}^{AB}。$$

此外，在 LOCC 下平均不增加的凸纠缠测度称为纠缠单调[14]。

设 E 是对两体态纠缠的一个度量。与 E 相关的形成纠缠度量 E_F 定义为

$$E_F\left(\rho^{AB}\right)\equiv\min\sum_{j=1}^{n}p_jE\left(\left|\psi_j\right\rangle\left\langle\psi_j\right|^{AB}\right), \tag{5}$$

其中最小值取自 $\rho^{AB}=\sum_{j=1}^{n}p_j\left|\psi_j\right\rangle\left\langle\psi_j\right|^{AB}$ 的所有纯态分解。即 E_F 是 E 的凸延伸。Vidal 在参考文献[14]证明了如果下面的凹性条件成立，上面的 E_F 是混合两体态上的纠缠单调。对于一个纯态 $\left|\psi\right\rangle^{AB}\in\mathcal{H}^{AB}$，$\rho^{A}=\mathrm{Tr}_B\left|\psi\right\rangle\left\langle\psi\right|^{AB}$ 定义函数 $h:\mathcal{S}^{A}\to\mathbb{R}_{+}$：

$$h\left(\rho^{A}\right)\equiv E\left(\left|\psi\right\rangle\left\langle\psi\right|^{AB}\right)。 \tag{6}$$

注意，由于 E 在局部酉下是不变的，我们必有

$$h\left(U\rho^{A}U^{\dagger}\right)=h\left(\rho^{A}\right), \tag{7}$$

对于作用在 $\mathcal{H}^{A}$ 上的任何酉算子 U。如果 h 也是凹的，即

$$h\left[\lambda\rho_1+\left(1-\lambda\right)\rho_2\right]\geq\lambda h\left(\rho_1\right)+\left(1-\lambda\right)h\left(\rho_2\right), \tag{8}$$

对于任意态 ρ_1,ρ_2 和任意 $0\leq\lambda\leq1$，则(5)中定义的 E_F 是一个纠缠单调。

2. 无限维系统的并发

设 $\left|\psi\right\rangle\in\mathcal{S}^{AB}$ 其中 $\dim\mathcal{H}^{A}=\dim\mathcal{H}^{B}=+\infty$ 为纯态。回想一下，$\left|\psi\right\rangle$ 的并发 $C\left(\left|\psi\right\rangle\right)$ 被定义为[15]

$$C\left(\left|\psi\right\rangle\right)=\sqrt{2\left(1-\mathrm{tr}\,\rho_{\mathrm{A}}^{2}\right)}。 \tag{9}$$

其中 $\rho_A = \mathrm{Tr}_B\left(|\psi\rangle\langle\psi|\right)$。对于混合状态 $\rho \in \mathcal{S}^{AB}$ [15]，

$$C(\rho) = \inf_{\{p_i, |\psi_i\rangle\}} \sum_i p_i C\left(|\psi_i\rangle\right), \tag{10}$$

其中下确界取自 ρ 的所有可能系综 $\{p_i, |\psi_i\rangle\}$。

我们知道，对于有限维系统，纠缠的单配性与协作纠缠密切相关。给定有限维系统的两体纠缠 E 的测度，其对应的协作纠缠 $E_c^{AB|C}$ 是三体混合态 ρ_{ABC} 上的纠缠测度，给出如下[16]：

$$E_c^{AB|C}\left(\rho^{ABC}\right) = \max \sum_{j=1}^{n} p_j E\left(\rho_j^{AB}\right), \tag{11}$$

其中最大值取自所有产生概率为 p_j 的两体态 ρ_j^{AB} 的三体 LOCC 协议。按照同样的思路，E_c 可以扩展到 $E = C$ 的无限维情况：

$$C_c^{AB|C}\left(\rho^{ABC}\right) = \sup \sum_{j=1}^{n} p_j C\left(\rho_j^{AB}\right), \tag{12}$$

其中上确界取自所有产生概率为 p_j 两体态 ρ_j^{AB} 三体 LOCC 协议。下面的定理证明了解纠缠条件和协作纠缠之间的联系。

2.1. 引理

设 $\rho^{ABC} \in \mathcal{S}^{ABC}$ 其 $\dim \mathcal{H}^{ABC} = \infty$ 是满足解纠缠条件(3) (可能是混合的)三体态。那么，

$$C\left(\rho^{AB}\right) = C_c^{AB|C}\left(\rho^{ABC}\right)。 \tag{13}$$

证明：任意小的 ϵ，在 ρ^{ABC} 上存在由 LOCC 得到的系综 $\left\{\rho_j^{AB}, p_j\right\}$ 满足：

$$\sum_j p_j C\left(\rho_j^{AB}\right) + \epsilon > C_c^{AB|C}\left(\rho^{ABC}\right)。 \tag{14}$$

因为 C 两体纠缠单调，所以它不能平均增加：

$$C\left(\rho^{A|BC}\right) \geq \sum_j p_j C\left(\rho_j^{AB}\right) > E_c^{AB|C}\left(\rho^{ABC}\right) - \epsilon。 \tag{15}$$

另一方面，根据定义 $C\left(\rho^{AB}\right) \leq C_c^{AB|C}\left(\rho^{ABC}\right)$，因此与(3)我们得到(13)。

2.2. 定义

设 $\rho \in \mathcal{S}^{AB}$ 其 $\dim \mathcal{H}^A = \dim \mathcal{H}^B = +\infty$ 为混合态。我们称

$$C_a(\rho) := \sup_{\{p_i, |\psi_i\rangle\}} \sum_i p_i C\left(|\psi_i\rangle\right), \tag{16}$$

为 ρ 的辅助并发，其中上确界取自于 ρ 的所有可能的系综 $\{p_i, |\psi_i\rangle\}$。

根据定义，很显然，一般来说，$C_c^{AB|C} \geq C_a$。

2.3. 推论

设 ρ^{ABC} 是满足解纠缠条件(3)的纯三体态。那么，

$$C\left(\rho^{AB}\right) = C_a\left(\rho^{AB}\right)。 \tag{17}$$

证明：证明直接来自引理 2.1，回顾

$$C\left(\rho^{AB}\right) \leq C_a\left(\rho^{AB}\right) \leq C_c^{AB|C}\left(\rho^{ABC}\right) = C\left(\rho^{A|BC}\right),$$

其中最后一个等式来自引理 2.1。因此，上面所有的不等式都是等式，因为我们假设解纠缠条件 $C\left(\rho^{A|BC}\right)=C\left(\rho^{AB}\right)$。这就完成了证明。

3. 无限维并发的单配性

3.1. 定理

1) 如果 $\rho^{ABC}=|\psi\rangle\langle\psi|^{ABC}$ 是纯的，并且解纠缠条件(3)成立，那么 $\mathcal{H}^B$ 在系统 B_1B_2 上具有同构于 $\mathcal{H}^{B_1^{(x)}}\otimes\mathcal{H}^{B_2^{(x)}}$ 并且局部酉的子空间，

$$|\psi\rangle^{ABC}=|\phi\rangle^{AB_1}|\eta\rangle^{B_2C}, \tag{18}$$

其中 $|\phi\rangle^{AB_1}\in\mathcal{H}^{AB_1}$ 和 $|\eta\rangle^{B_2C}\in\mathcal{H}^{B_2C}$ 是纯态。特别地，ρ^{AC} 是一个乘积态，因此 $C\left(\rho^{AC}\right)=0$，所以 C 在纯三体态上是单配的；

2) 如果 ρ^{ABC} 是一个混合的三体态，并且 $C\left(\rho^{A|BC}\right)=C\left(\rho^{AB}\right)$，则

$$\rho^{ABC}=\sum_x p_x|\psi_x\rangle\langle\psi_x|^{ABC}, \tag{19}$$

其中 $\{p_x\}$ 是某种概率分布，并且对于每个 x，Hilbert 空间 $\mathcal{H}^B$ 具有同构于 $\mathcal{H}^{B_1^{(x)}}\otimes\mathcal{H}^{B_2^{(x)}}$ 的子空间，使得直到系统 B 上是局部酉的，每个纯态 $|\psi_x\rangle^{ABC}$ 由

$$|\psi_x\rangle^{ABC}=|\phi_x\rangle^{AB_1^{(x)}}|\eta_x\rangle^{B_2^{(x)}C} \tag{20}$$

给出。特别地，边缘态 ρ^{AC} 是可分的，因此 C 在混合的三体态上是单配的。

证明：根据推论 2.3，如果解纠缠条件适用于纯三体态 $\rho^{ABC}\equiv|\psi\rangle\langle\psi|^{ABC}$，那么 ρ^{AB} 的所有纯态分解必有相同的平均纠缠。设 $\{p_j,|\psi_j\rangle\}$ 是 ρ_{AB} 的任意纯态分解，其 $n=\mathrm{Rank}\left(\rho^{AB}\right)$，$n\le+\infty$。则

$$C\left(\rho^{AB}\right)\le\sum_{j=1}^{n}p_jC\left(|\psi\rangle\langle\psi|^{AB}\right),$$

其中不等式是由于 C 的凸性，并且等号成立，因为 ρ_{AB} 的所有纯态分解具有相同的平均纠缠。此外，由于 C 是纠缠单调的，我们有

$$C\left(\rho^{AB}\right)\le C\left(|\psi\rangle\langle\psi|^{A|BC}\right)=h\left(\rho^{A}\right)。$$

因此，用 $\rho_j^A\equiv\mathrm{Tr}_B\left(|\psi_j\rangle\langle\psi_j|^{AB}\right)$ 表示，我们得出结论，如果解缠结条件成立，那么我们有

$$\sum_{j=1}^{n}p_jh\left(\rho_j\right)=h\left(\rho^{A}\right)。$$

假设 $\rho^A=\sum_{j=1}^{n}p_j\rho_j^A$ 和 h 是严格凹的，我们得到

$$\rho_j^A=\rho^A,\ j=1,2,\cdots,n。$$

设 $r\equiv\mathrm{Rank}\left(\rho^A\right)\le\dim\mathcal{H}^B$，设 $\mathcal{H}^{B_1}$ 是 $\mathcal{H}^B$ 的 r 维子空间，使得存在纯态 $|\phi\rangle^{AB_1}\in\mathcal{H}^{AB_1}$，其 A 部分的边际为 ρ^A。因此，存在等距 V_j，使得

$$|\psi_j\rangle^{AB}=\left(I^A\otimes V_j\right)|\phi\rangle^{AB_1},\ j=1,2,\cdots,n。$$

现在，设 $\rho^{AB}=\sum_{k=1}^{n}q_k|\phi_k\rangle\langle\phi_k|^{AB}$ 是 ρ 的具有相同数量的元素 n 的另一个纯态分解。同理，存在等距 $\mathcal{W}_k$，使得

$$\left|\phi_k\right\rangle^{AB} = \left(I^A \otimes W_k\right)\left|\phi\right\rangle^{AB_1}, k = 1,2,\cdots,n。$$

另一方面，由于两个系综$\left\{p_j,\left|\psi_j\right\rangle^{AB}\right\}$和$\left\{q_k,\left|\phi_k\right\rangle^{AB}\right\}$对应于相同的密度矩阵$\rho_{AB}$，所以它们必可通过酉矩阵$U = \left(u_{kj}\right)$以如下形式关联：

$$\sqrt{q_k}\left|\phi_k\right\rangle^{AB} = \sum_{j=1}^{n} u_{kj}\sqrt{p_j}\left|\psi_j\right\rangle^{AB} = \left(I^A \otimes \sum_{j=1}^{n} u_{kj}\sqrt{p_j}V_j\right)\left|\phi\right\rangle^{AB_1}。$$

用$X_k \equiv \frac{1}{\sqrt{q_k}}\sum_{j=1}^{n} u_{kj}\sqrt{p_j}V_j, k = 1,2,\cdots,n$来表示。我们有

$$\left(I^A \otimes X_k\right)\left|\phi\right\rangle^{AB_1} = \left(I^A \otimes W_k\right)\left|\phi\right\rangle^{AB_1}。$$

因此我们得出结论，$X_k = W_k$。这意味着X_k对于酉矩阵$U = \left(u_{kj}\right)$的任意选择都是等距的。但是由于$U = \left(u_{kj}\right)$是任意归一化向量。因此，我们得出结论，等距矩阵V_j的任何线性组合都与等距矩阵成比例。我们现在讨论这个性质在V_j形式上的结果。等距V_j可以表示为$V_j = \sum_k \left|v_{jk}\right\rangle\left\langle k\right|$，其中 k 是$\mathcal{H}_1^B$的正交基，对于每个j，$\left\{\left|v_{jk}\right\rangle\right\}_k$是$\mathcal{H}^B$中的正交向量。考虑任意线性组合$\sum_j c_jV_j$。它可以表示为$\sum_{k,j} c_j\left|v_{jk}\right\rangle\left\langle k\right| \equiv \sum_k \left|u_k\right\rangle\left\langle k\right|$，$\left|u_k\right\rangle \equiv \sum_j c_j\left|v_{jk}\right\rangle$。因此，$\sum_j c_j\left|v_{jk}\right\rangle$与等距成比例当且仅当对于所有$k \neq k'$，$\left\langle u_{k'} \middle| u_k\right\rangle = 0$和$\left\|u_k\right\| = \left\|u_{k'}\right\|$。注意到$\left\langle u_{k'} \middle| u_k\right\rangle = \sum_{j,j'} c_jc_{j'}^*\left\langle v_{k'j'} \middle| v_{kj}\right\rangle$。现在，对于一个固定的$k$和$k'$，与等距成比例当且仅当对于所有$k \neq k'$，它必等于零向量。因此，我们得出结论，对于一些独立于k的$d_{jj'}$来说$\left\langle v_{k'j'} \middle| v_{kj}\right\rangle = 0$，$k \neq k'$和$\left\langle v_{k'j'} \middle| v_{kj}\right\rangle = d_{jj'} \neq 1$。注意，我们可以不失一般性地假设$\rho^{AB} = \sum_j p_j\left|\psi_j\right\rangle\left\langle\psi_j\right|^{AB}$是$\rho^{AB}$的谱分解。在这种情况下，我们有

$$\begin{aligned}
\left\langle\psi_j \middle| \psi_j\right\rangle^{AB} &= \left\langle\phi\right|^{AB_1}\left(I \otimes \sum_{k,k'}\left|k'\right\rangle\left\langle v_{kj'} \middle| v_{kj}\right\rangle\left\langle k\right|\right)\left|\phi\right\rangle^{AB_1} \\
&= \left\langle\phi\right|^{AB_1}\left(I \otimes \sum_{k}\left|k\right\rangle\left\langle v_{kj'} \middle| v_{kj}\right\rangle\left\langle k\right|\right)\left|\phi\right\rangle^{AB_1} \\
&= \left\langle\phi\right|^{AB_1}\left[I \otimes d_{jj'}\left(\sum_{k}\left|k\right\rangle\left\langle k\right|\right)\right]\left|\phi\right\rangle^{AB_1} \\
&= \left\langle\phi\right|^{AB_1}\left(I \otimes d_{jj'}I^{B_1}\right)\left|\phi\right\rangle^{AB_1} = \delta_{jj'}
\end{aligned}$$

对任何给定的k都成立。我们现在得到了

$$\left\langle v_{k'j'} \middle| v_{kj}\right\rangle = \delta_{jj'}\delta_{kk'}。$$

表示$\mathcal{K} \equiv \mathrm{span}\left\{\left|v_{kj}\right\rangle\right\} \subset \mathcal{H}^B$。那么上面的等式意味着对于$\mathcal{H}^B$的某些子空间$\mathcal{H}^{B_2}$，$\mathcal{K} \cong \mathcal{H}^{B_1} \otimes \mathcal{H}^{B_2}$，特别地，存在一个酉矩阵，$U^B$，将$\mathcal{K}$的基$\left\{\left|v_{kj}\right\rangle\right\}$与$\mathcal{H}^{B_1} \otimes \mathcal{H}^{B_2}$的基$\left\{\left|k\right\rangle^{B_1}\left|j\right\rangle^{B_2}\right\}$联系起来。因此，我们得出结论：

$$V_j = \sum_k \left|v_{jk}\right\rangle\left\langle k\right| = U^B\left(\sum_k \left|k\right\rangle\left\langle k\right|^{B_1} \otimes \left|j\right\rangle^{B_2}\right) = U^B\left(I^{B_1} \otimes \left|j\right\rangle^{B_2}\right)。$$

因此，$\left|\psi_j\right\rangle = \left(I^A \otimes U^B\right)\left|\phi_j\right\rangle^{AB_1}\left|j\right\rangle^{B_2}, j = 1,2,\cdots,n$。因此，$\rho^{AB} = \left(I^A \otimes U^B\right)\left(\left|\phi\right\rangle\left\langle\phi\right|^{AB_1} \otimes \sigma^{B_2}\right)\left(I^A \otimes U^B\right)^\dagger$，

其中 σ^{B_2} 是由 $\sigma^{B_2}=\sum_j p_j|j\rangle^{B_2}|j\rangle^C$ 给出的某个密度矩阵。由于在 $\mathcal{H}^{ABC}$ 的 ρ^{AB} 的所有纯化都是通过 C 上的局部幺正相关联的，我们得出结论，$|\psi\rangle^{ABC}$ 具有等式(18)到局部幺正的形式。因此 ρ^{AC} 是乘积状态，因此 $E(\rho^{AC})=0$。这就完成了第 1 部分的证明。

$\{p_x,|\psi_x\rangle^{ABC}\}$ 是 $\rho^{ABC}=\sum_x p_x|\psi_x\rangle\langle\psi_x|^{ABC}$ 的最优纯态分解，满足

$$C(\rho^{A|BC})=\sum_x p_x C(|\psi_x\rangle^{A|BC})。$$

用 $\rho_x^{AB}\equiv Tr_c(|\psi_x\rangle\langle\psi_x|^{ABC})$ 表示，注意

$$\rho^{AB}\equiv Tr_c(\rho^{ABC})=\sum_x p_x\rho_x^{AB}。$$

因此，若 $C(\rho^{A|BC})=C(\rho^{AB})$，则

$$\sum_x p_x C(|\psi_x\rangle^{A|BC})=C(\rho^{AB})\le\sum_x p_x C(\rho_x^{AB}),$$

其中使用 C 的凸性。

另一方面，因为 C 是对于 x 的纠缠测度，我们有

$$C(|\psi_x\rangle^{A|BC})\ge C(\rho_x^{AB})。$$

结合等式，有这样的结论：

$$C(|\psi_x\rangle^{A|BC})=C(\rho_x^{AB})。$$

因此，第二部分余下证明同第一部分证明一样。

注意，如果上述定理第二部分中的系统 B 的维数不大于 3，那么对于每个 x，我们必须有 $\mathcal{H}^{B_1^{(x)}}$ 或 $\mathcal{H}^{B_2^{(x)}}$ 是一维的。因此，我们得到以下推论。

3.2. 推论

使用与上述定理相同的符号，如果 $C(\rho^{A|BC})=C(\rho^{AB})$ 和 $\dim\mathcal{H}^B\le 3$，则 ρ^{ABC} 是二可分的，特别是它允许形式

$$\rho^{ABC}=t\sigma^{A|BC}+(1-t)\gamma^{AB|C}, \tag{21}$$

其中 $\sigma^{A|BC}$ 是 $A|BC$ 可分的，$\gamma^{AB|C}$ 是 $AB|C$ 可分的，$t\in[0,1]$。特别地，如果 $\rho^{ABC}=|\psi\rangle\langle\psi|^{ABC}$ 是一个纯态，那么 $|\psi\rangle^{ABC}$ 的形式为 $|\phi\rangle^{AB}|\eta\rangle^C$ 或 $|\phi\rangle^A|\eta\rangle^{BC}$。

最后讨论了纠缠测度的严格凹性。纠缠的许多可操作测度，如纠缠的相对熵、纠缠成本和可蒸馏纠缠，都在两体纯态上约化为根据约化态的冯•诺依曼熵给出的纠缠熵。冯•诺依曼熵 $H(\rho)\equiv-\mathrm{Tr}(\rho\log\rho)$ 已知是严格凹[17]，因此它们在纯三体态上都是单配的。对于 E 为负的特殊情况上述定理的第一部分推广了参考文献[18]中解纠缠定理中证明的类似结果。它证明了许多纠缠测度在纯三体态上是单配的，而它们在等式(5)中定义的凸延伸即证明在混合三体态上也是单配的。

任何函数可以表示为

$$H_g(\rho)=\mathrm{Tr}[g(\rho)]=\sum_j g(p_j), \tag{22}$$

其中 p_j 是 ρ 的特征值，如果 $g''(p)<0$ 对所有 $0<p<1$，则函数是严格凹的。这包括 $q>0$ 的量子 Tsallis-q

熵[19]。特别地，线性熵(或 Tsallis-2 熵)是严格凹的，因此纠缠是单配的纠缠测度，因为它是根据凸延伸定义的。另一个重要的例子是 Rényi-α 熵[20] [21] [22]。对于 Rényi 参数 $\alpha \in [0,1]$，Rényi 熵是严格凹的(参见参考文献[14])，但是一般来说，对于 $\alpha > 1$，Ŕenyi 熵甚至不是凹的(尽管它们是 Schur 凹的)。据作者所知，除了 $\alpha > 1$ 的 α -Rényi 纠缠熵这种情况外，文献中深入研究的所有其他纠缠测度在纯两体态上都对应于约化密度矩阵的严格凹函数。这些包括负性、纠缠、并发、*G*-并发和纠缠的 Tsallis 熵。

总之，我们表明，根据参考文献[12]中提出的无不等式的单配性的新定义，许多被认为不是单配的(不考虑具体的单配性关系[13])的纠缠测度，如形成纠缠，实际上是单配的。这个新定义等价于定量不等式(4)，但关键区别在于，指数因子 α 可以取决于基本维度。因此，这里给出的结果支持单配的非普遍(即维度相关)定义。许多重要纠缠测度不是普遍单配的[13]，这可能让人觉得单配性不能归因于纠缠本身，而是用于量化纠缠的特定度量的属性。此外，如文献[13]所示，纠缠度量不能同时保持忠实性(如文献[13]中所定义的)和普遍单配性。通过采用一个新的单配性定义，我们避免了这些问题，这个新定义允许非普遍单配性关系，同时保持一种定量的表达方式，如(4)。

虽然我们不能证明所有的纠缠测度都是单配的(根据参考文献[12]中的定义)，但我们也不了解任何非单配的连续纠缠度量。可能的情况是，所有的连续纠缠度量都是单配的，这将支持我们的观点，即单配性是纠缠的属性，而不是某些特定函数量化纠缠的属性。

参考文献

[1] Schrodinger, E. (1935) Discussion of Probability Relations between Separated Systems. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **31**, 555-563. https://doi.org/10.1017/S0305004100013554

[2] Nielsen, M.A. and Chuang, I.L. (2011) Quantum Computation and Quantum Information: 10th Anniversary Edition. Cambridge University Press, Cambridge. https://doi.org/10.1017/CBO9780511976667

[3] Wilde, M.M. (2013) Quantum Information Theory. Cambridge University Press, Cambridge. https://doi.org/10.1017/CBO9781139525343

[4] Watrous, J. (2015) Theory of Quantum Information. https://cs.uwaterloo.ca/watrous

[5] Terhal, B.M. (2004) Is Entanglement Monogamous? *IBM Journal of Research and Development*, **48**, 71-78. https://doi.org/10.1147/rd.481.0071

[6] Adesso, G. and Illuminati, F. (2006) Entanglement Sharing: From Qubits to Gaussian States. *International Journal of Quantum Information*, **4**, 383-393. https://doi.org/10.1142/S0219749906001852

[7] Coffman, V., Kundu, J. and Wootters, W.K. (2000) Distributed Entanglement. *Physical Review A*, **61**, Article ID: 052306. https://doi.org/10.1103/PhysRevA.61.052306

[8] Rungta, P. and Caves, C.M. (2003) Concurrence-Based Entanglement Measures for Isotropic States. *Physical Review A*, **67**, Article ID: 012307. https://doi.org/10.1103/PhysRevA.67.012307

[9] Rungta, P., Bužek, V., Caves, C.M., Hillery, M. and Milburn, G.J. (2001) Universal State Inversion and Concurrence in Arbitrary Dimensions. *Physical Review A*, **64**, Article ID: 042315. https://doi.org/10.1103/PhysRevA.64.042315

[10] Zhu, X.N. and Fei, S.M. (2015) Entanglement Monogamy Relations of Concurrence for *N*-Qubit Systems. *Physical Review A*, **92**, Article ID: 062345. https://doi.org/10.1103/PhysRevA.92.062345

[11] Gour, G. (2005) Family of Concurrence Monotones and Its Applications. *Physical Review A*, **71**, Article ID: 012318. https://doi.org/10.1103/PhysRevA.71.012318

[12] Gour, G. and Guo, Y. (2018) Monogamy of Entanglement without Inequalities. *Quantum*, **2**, 81. https://doi.org/10.22331/q-2018-08-13-81

[13] Lancien, C., Martino, S.D., Huber, M., Piani, M., Adesso, G. and Winter, A. (2016) Should Entanglement Measures Be Monogamous or Faithful? *Physical Review Letters*, **117**, Article ID: 060501. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.117.060501

[14] Vidal, G. (2000) Entanglement Monotone. *Journal of Modern Optics*, **47**, 355-376. https://doi.org/10.1080/095003400148268

[15] Guo, Y. and Hou, J. (2013) Concurrence for Infinite-Dimensional Quantum Systems. *Quantum Information Processing*, **12**, 2641-2653. https://doi.org/10.1007/s11128-013-0552-6

[16] Gour, G. and Spekkens, R.W. (2006) Entanglement of Assistance Is Not a Bipartite Measure nor a Tripartite Monotone. *Physical Review A*, **73**, Article ID: 062331. https://doi.org/10.1103/PhysRevA.73.062331

[17] Wehrl, A. (1978) General Properties of Entropy. *Reviews of Modern Physics*, **50**, 221-260. https://doi.org/10.1103/RevModPhys.50.221

[18] He, H. and Vidal, G. (2015) Disentangling Theorem and Monogamy for Entanglement Negativity. *Physical Review A*, **91**, Article ID: 012339. https://doi.org/10.1103/PhysRevA.91.012339

[19] Tsallis, C. (1988) Possible Generalization of Boltzmann-Gibbs Statistics. *Journal of Statistical Physics*, **52**, 479-487. https://doi.org/10.1007/BF01016429

[20] Greenberger, D.M., Horne, M.A. and Zeilinger, A. (1989) Going beyond Bell's Theorem. In: Kafatos, M., Ed., *Bells Theorem*, *Quantum Theory*, *and Conceptions of the Universe*, Kluwer, Dordrecht, 69-72. https://doi.org/10.1007/978-94-017-0849-4_10

[21] Dür, W., Vidal, G. and Cirac, J.I. (2000) Three Qubits Can Be Entangled in Two Inequivalent Ways. *Physical Review A*, **62**, Article ID: 062314. https://doi.org/10.1103/PhysRevA.62.062314

[22] Rényi, A., *et al*. (1961) On Measures of Entropy and Information. In: *Proceedings of the* 4*th Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, University of California Press, Berkeley, 547-561.