

具有疫苗接种的COVID-19传播模型的动力学分析

赵勇盛*, 张 蒙

北京建筑大学理学院, 北京

收稿日期: 2024年3月9日; 录用日期: 2024年4月1日; 发布日期: 2024年4月10日

摘 要

自COVID-19出现以来, 毒株不断变异, 毒性变小、传播性增强, 多数专家认为我们将与COVID-19长期共存。由于是否出现重症患者很大程度取决于个体免疫力, 因此处于高危人群的老人和儿童长期面临威胁。此外由于没有治疗COVID-19的特效药物, 加之多次感染新冠会对人体带来诸多后遗症, 因此许多国家都在研发和接种针对最新变异毒株可以有效减少患重症和死亡的新型疫苗。并且由于毒株变异和免疫逃逸, 我们将持续研发有效且快速生效的新型疫苗。因此本文提出了一个具有疫苗接种时滞的SVIAR传染病模型, 计算了模型的控制再生数, 研究了模型的动力学特征。文末的数值模拟验证了理论结果, 并且分析了疫苗接种率和疫苗生效时间对疫情防控的影响, 给出了对应的疫苗接种策略。

关键词

COVID-19, 疫苗接种, 时滞微分系统, 全局稳定性, 数值模拟

Dynamical Analysis of a COVID-19 Transmission Model with Vaccination

Yongsheng Zhao*, Meng Zhang

School of Science, Beijing University of Civil Engineering and Architecture, Beijing

Received: Mar. 9th, 2024; accepted: Apr. 1st, 2024; published: Apr. 10th, 2024

Abstract

Since the emergence of COVID-19, the viral strains have continuously mutated, with reduced virulence and enhanced transmissibility. Most experts believe that we will coexist with COVID-19 in

*通讯作者。

the long term. As the severity of infection largely depends on individual immunity, older adults and children in high-risk groups face prolonged threats. Additionally, due to the lack of specific drugs for treating COVID-19, and considering that multiple infections with the novel coronavirus can lead to various lingering effects, many countries are developing and administering novel vaccines targeting the latest mutant strains to effectively reduce severe cases and fatalities. Furthermore, due to ongoing viral mutations and immune evasion, we will continue to research and develop efficient and rapidly effective new vaccines. Therefore, this article proposes an SVIAR infectious disease model with vaccination delays, calculates the model's basic reproduction number, investigates its dynamic characteristics, and validates theoretical results through numerical simulations. The analysis also explores the impact of vaccination rates and vaccine efficacy duration on epidemic control, providing corresponding vaccination strategies.

Keywords

COVID-19, Vaccination, Delay Differential System, Global Stability, Numerical Simulation

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

自 2019 年 COVID-19 首次出现以来, 截止到目前已经出现了众多的变异毒株, 其中 JN.1 变异株作为全球占比迅速增加的流行毒株, 截止到 2023 年 12 月其占比已经高达 30%, 被全球超过至少 59 个国家和地区检测到, 主要分布在欧美地区。目前我国主流毒株仍为 EG.5 及其亚分支, 但感染最新的 JN.1 毒株的人数也在增加。JN.1 毒株作为新冠病毒奥密克戎 BA.2.86 变异株的第二代亚分支, 其毒性减弱、传播性更强, 这也是一种自然选择的现象。因此有不少专家表示我们应当习惯于与新冠病毒长期共存。由于感染者症状的类型和严重程度通常更多地取决于个体免疫力, 并且一项研究表明既往新冠感染与多种症状的患病率和严重程度增加有关[1]。因此作为免疫力较为低下的高风险人群, 老人和小孩仍有患重症以及诸多后遗症的风险。鉴于目前没有可以治疗 COVID-19 的特效药物。疫苗接种成为了我们疫情防控的重要手段。因此全球各个国家和地区都在致力于疫苗的研发和接种, 并不断扩大疫苗接种覆盖率以此建立群体免疫[2]。根据最新声明, 国际药品监管当局联盟(ICMRA)成员和世卫组织 COVID-19 疫苗组成技术咨询小组(TAG-CO-VAC)都认为 SARS-CoV-2 病毒似乎正在进化与之前病毒不同。因此有必要更新 COVID-19 疫苗的组成。此外欧洲药品管理局去年建议批准了针对奥密克戎 XBB.1.5 的改良 COVID-19 疫苗[3]。综上所述, 由于病毒的变异和免疫逃逸, 疫苗的效力也受到一定影响[4]-[9]。因此, 研发和接种新型疫苗是应对 COVID-19 大流行的紧迫任务。也可以有效保障老人儿童等高危人群的生命健康。

在[10][11][12]中的学者构建不同的舱室模型来研究疫苗接种对传染病动力学的影响, 这些模型都能反映出疫苗接种的对传染病防控的作用和意义。在[13][14]中的学者在认为 COVID-19 传播过程中无症状感染者对疫情传播起到了重要作用, 因此模型中至少应该加入无症状感染者这一显著特征。考虑到 COVID-19 在疫情传播过程中的延迟现象, 在[15][16][17][18][19]中的学者建立了具有时滞的 COVID-19 传播模型, 研究了时滞对疫情传播的影响, 使结果更加直接和准确。在[20]中的学者建立了具有疫苗接种时滞的 COVID-19 传播模型, 表明不同的疫苗生效时间对疾病能否有效控制起到了重要作用。

通过上述学者们的研究以及结合实际案例, 本文创建了一个具有无症状感染者以及疫苗接种的

SVIAR 传染病模型,用于研究 COVID-19 的传播,并对有症状感染者和无症状感染者的传播率进行区分。为使模型更符合实际情况,在模型中引入了时滞,考虑了疫苗从接种到产生抗体的时间间隔对疾病传播的影响。

本文行文结构如下,第二节中建立了 COVID-19 传播模型并列出每个参数所代表的含义;第三节中求出系统的无病平衡点和地方病平衡点;第四节利用 Lyapunov 方法证明了模型平衡点的全局动力学性质;第五节对模型进行数值模拟以检验理论分析的正确性和可靠性;第六节归纳结论给出疫苗接种策略。

2. 模型建立

根据 COVID-19 在人群中的传播特性,我们建立了一个 SVIAR 的数学模型用于研究 COVID-19 疫苗接种,其中 $S(t)$ 表示易感者人群, $V(t)$ 表示疫苗接种人群, $I(t)$ 表示有症状感染者人群, $A(t)$ 表示无症状感染者人群, $R(t)$ 表示恢复者人群,本文构造 COVID-19 传播模型为:

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = \Lambda - \psi S(t) - \beta S(t)(I(t) + \sigma A(t)) - \mu S(t), \\ \frac{dV(t)}{dt} = \psi S(t - \tau) - \mu V(t), \\ \frac{dI(t)}{dt} = (1 - \rho)\beta S(t)(I(t) + \sigma A(t)) - \mu I(t) - \delta I(t), \\ \frac{dA(t)}{dt} = \rho\beta S(t)(I(t) + \sigma A(t)) - \mu A(t) - \eta A(t), \\ \frac{dT(t)}{dt} = \delta I(t) + \eta A(t) - \mu R(t). \end{cases} \quad (1)$$

我们假设模型(1)中所有的参数都是正的,各个参数的定义参见表 1。

Table 1. The definition of parameters in a model

表 1. 模型中参数的定义

参数	定义
Λ	人类自然出生率
ψ	疫苗接种率
β	感染率
σ	无症状感染者传播概率的调节因子
μ	自然死亡率
δ	有症状感染者恢复率
η	无症状感染者恢复率
ρ	无症状感染者比率

设 $C = C([- \tau, 0], \mathbb{R}_+^5)$ 是 Banach 空间,所有连续函数的上确界范数从区间 $[- \tau, 0]$ 映射到 \mathbb{R}_+^5 , 定义:

$$C_+ = \left\{ \phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4, \phi_5)^T \in C : \phi \geq \mathbf{0} \right\}.$$

对于模型(1)的适定性和耗散性我们有如下定理:

定理 2.1 系统(1)过任意初值 $\phi \in C_+$ 的解 $u(t) = (u_1(t), u_2(t), u_3(t), u_4(t), u_5(t))^T$ 唯一存在,并且是非负

的, 在 \mathbb{R}_+^5 最终有界。

证明 参考[20] [21]中时滞微分方程的基本理论, 系统(1)经过初值 $\phi \in \mathbb{R}_+^5$ 的解在其最大存在区间 $[0, T_\phi)$ 上是唯一的。

下面我们证明经过初值 $\phi \in \mathbb{R}_+^5$ 的解在其最大存在区间 $[0, T_\phi)$ 是非负的。对于任意的 $\alpha \in (0, T_\phi)$ 以及任意的 $\varepsilon > 0$, 可知模型:

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = \Lambda - \psi S(t) - \beta S(t)(I(t) + \sigma A(t)) - \mu S(t), \\ \frac{dV(t)}{dt} = \psi S(t - \tau) - \mu V(t) + \varepsilon, \\ \frac{dI(t)}{dt} = (1 - \rho)\beta S(t)(I(t) + \sigma A(t)) - \mu I(t) - \delta I(t) + \varepsilon, \\ \frac{dA(t)}{dt} = \rho\beta S(t)(I(t) + \sigma A(t)) - \mu A(t) - \eta A(t) + \varepsilon, \\ \frac{dR(t)}{dt} = \delta I(t) + \eta A(t) - \mu R(t) + \varepsilon. \end{cases} \quad (2)$$

通过 $\phi \in C_+$ 的解为 $u(t, \varepsilon) = (u_1(t, \varepsilon), u_2(t, \varepsilon), u_3(t, \varepsilon), u_4(t, \varepsilon), u_5(t, \varepsilon))^T$, 基于时滞微分方程解对参数的连续依赖性[20] [21], $u(t, \varepsilon)$ 在 $[0, \alpha)$ 上是一致存在的, 并且关于参数 ε 连续。当 $u_i(0, \varepsilon) = 0, i = (1, 2, 3, 4, 5)$, 有 $\dot{u}_i(0, \varepsilon) > 0$, 于是我们可以得到 $u(t, \varepsilon) \gg \mathbf{0}, t \in (0, \alpha)$ 。从而对于 $t \in [0, \alpha)$, 有 $u(t) \gg \mathbf{0}$ 。由 α 的任意性, 我们可以得到 $u(t) \geq \mathbf{0}, t \in (0, T_\phi)$ 。

接下来证明模型(1)的有界性, 定义函数 $H(t) = S(t) + V(t + \tau) + I(t) + A(t) + R(t)$, 对函数 $H(t)$ 进行求导可得:

$$\begin{aligned} \frac{dH(t)}{dt} &= \frac{dS(t)}{dt} + \frac{dV(t + \tau)}{dt} + \frac{dI(t)}{dt} + \frac{dA(t)}{dt} + \frac{dR(t)}{dt} \\ &= \Lambda - \mu S(t) - \mu V(t) - \mu I(t) - \mu A(t) - \mu R(t) = \Lambda - \mu H(t). \end{aligned}$$

取极限可以得到:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} H(t) = \frac{\Lambda}{\mu}$$

所以有 $u(t)$ 最终是有界的。由时滞微分方程解的延拓定理[22] [23] [24]知 $T_\phi = \infty$ 。于是定理 2.1 得证。其中模型的可行域为:

$$\Omega = \left\{ (S, V, I, A, R) \in \mathbb{R}_+^5 : S + V + I + A + R \leq \frac{\Lambda}{\mu} + \varepsilon; \varepsilon > 0 \right\}$$

3. 阈值动力学

很容易得到系统(1)有一个无病平衡点 $E_0 = \left(\frac{\Lambda}{\psi + \mu}, \frac{\psi\Lambda}{\mu(\mu + \psi)}, 0, 0, 0 \right)^T$, 利用下一代矩阵的方法求出控制再生数:

$$R_c = \frac{(1 - \rho)\beta\Lambda}{(\mu + \delta)(\mu + \psi)} + \frac{\sigma\rho\beta\Lambda}{(\mu + \eta)(\mu + \psi)}.$$

接下来令(1)式右侧为零, 并通过化简可以得到系统的地方病平衡点, 因此当且仅当 $R_c > 1$ 时, 系统存在唯一的地方病平衡点 $E^* = (S^*, V^*, I^*, A^*, R^*)^T$ 。其中:

$$\begin{aligned} S^* &= \frac{(\mu+\eta)(\mu+\delta)}{(1-\rho)(\mu+\eta)\beta + \rho\beta\sigma(\mu+\delta)}, \quad V^* = \frac{\psi(\mu+\eta)(\mu+\delta)}{\mu(1-\rho)(\mu+\eta)\beta + \rho\beta\sigma(\mu+\delta)}, \\ I^* &= \frac{\Lambda}{k_1\mu} \left(1 - \frac{(\mu+\psi)(\mu+\eta)(\mu+\delta)}{\Lambda(1-\rho)(\mu+\eta)\beta + \rho\beta\sigma\Lambda(\mu+\delta)} \right) = \frac{\Lambda}{\mu k_1} \left(1 - \frac{1}{R_c} \right), \\ A^* &= \frac{\rho(\mu+\delta)}{(1-\rho)(\mu+\eta)} I^*, \quad R^* = \left[\frac{\delta}{\mu} + \frac{\eta\rho(\mu+\delta)}{\mu(1-\rho)(\mu+\eta)} \right] I^*, \\ k_1 &= \frac{\rho(\mu+\delta)(\mu+\eta) + (1-\rho)(\mu+\eta)(\mu+\delta)}{\mu(1-\rho)(\mu+\eta)}. \end{aligned}$$

4. 全局稳定

在本节中我们将利用 Lyapunov 函数法来讨论模型(1)的无病平衡点和地方病平衡点的全局稳定性, 即全局渐近稳定。设 $u(t)$ 是模型(1)经过任何一个初始值 $\phi \in \mathbb{R}_+^5$ 的解, 定义 $\omega(\phi)$ 是 ϕ 关于模型(1)的 ω -极限集。记 $g(x) = x - 1 = \ln x, x > 0$ 。于是我们对于无病平衡点 E_0 有如下的结果。

定理 4.1 对任意的 $\tau \geq 0$, 当 $R_c \leq 1$ 时, 无病平衡点 E_0 在 \mathbb{R}_+^5 中是 GAS, 当 $R_c = 1$ 时, 是全局吸引的。

证明: 首先, 我们证明当 $R_c \leq 1$ 时, E_0 是全局吸引的。由定理 2.1 可以得知, $\omega(\phi) \subseteq \mathbb{R}_+^5$ 是紧的, 记:

$$\Omega = \{ \phi \in \mathbb{R}_+^5 : \phi_1(0) > 0 \}$$

我们在 Ω 上定义如下 V 函数:

$$V(\phi) = S_0 g\left(\frac{\phi_1}{S_0}\right) + \frac{\Lambda\beta}{(\mu+\psi)(\mu+\delta)} \phi_3 + \frac{\Lambda\beta\sigma}{(\mu+\psi)(\mu+\eta)} \phi_4 \quad (3)$$

当 $t \geq 1$ 时, V 沿着 u_t 的导数为:

$$\dot{V}(u_t) = -(\mu+\psi) \left(-2 + \frac{S}{S_0} + \frac{S_0}{S} \right) + \beta S(t) (I(t) + \sigma A(t)) (R_c - 1) \leq 0. \quad (4)$$

结合(3)式和(4)式, 我们可以得到 $\omega(\phi) \subseteq \Omega$ 。因此对 $R_c \leq 1$, V 在 $\{u_t : t \leq 1\} \subseteq \Omega$ 是 Lyapunov 函数。由[25]中推 3.3, 可得 $\forall \phi \in \omega(\phi)$ 有 $\dot{V}(\phi) = 0$ 。

假设 $u_t = (S(t), V(t), I(t), A(t), R(t))^T$ 是系统(1)过任意 $\phi \in \omega(\phi)$ 的解。由于 $\omega(\phi)$ 的不变性, 我们可以得出结论, 对于所有的 $t \in \mathbb{R}$, $u_t \in \omega(\phi)$ 。所以得到, 对任意的 $t \in \mathbb{R}$, $\dot{V}(u_t) = 0$ 。因此, 从(6)可知, 所有 $t \in \mathbb{R}$ 的 $S(t) = S^0$ 。因此, 它认为 $I(t) = A(t) = R(t) = 0$, $V = V^0$ 当所有 $t \in \mathbb{R}$ 。因此, $\omega(\phi) = \{E_0\}$ 。

接下来, 我们证明 E^0 是稳定的。由于系统(1)的第二和第五个方程是独立的, 因此系统(1)的其余三个方程可以构成一个独立的子系统。通过(3)、(4)和([26], 引理 4.1), 我们可以证明该子系统的无病平衡

点 $E_0 = \left(\frac{\Lambda}{\psi+\mu}, \frac{\psi\Lambda}{\mu(\phi+\psi)}, 0, 0, 0 \right)^T$ 是稳定的。利用([26], 定理 4.3)中类似的论证, 我们可以得到 E^0 是稳定

的。因此, 当 $R_c \leq 1$ 时, 无病平衡点 E_0 在 R_+^5 中是全局渐近稳定的。

下面我们论证地方病平衡点的 E^* 的全局稳定性, 以下是我们的结果:

定理 4.2 对任意的 $\tau \geq 0$, 当 $R_c > 1$ 时, 地方病平衡点 E^* 在 $M = \{\phi \in R_+^5 : \phi_3 > 0\}$ 中是 GAS。

证明: 由定理 3.1 可得, 当 $R_c < 1$ 时, 模型(1)不存地方病平衡点 E^* , 因此可以得到 E^* 在 M 中是全局渐进稳定的必有 $R_c > 1$ 。接下来我们证明当 $R_c > 1$ 时, 地方病平衡点 E^* 在 M 中是全局渐进稳定的。设 $u(t)$ 是模型(1)经过任何一个初始值 $\phi \in M$ 的解。显然 M 是系统(1)的正向不变集, 且 $u(t) \gg 0, t > 0$ 。记 $\Omega_2 = \{\phi \in R_+^5 : \phi \gg 0\}$ 。显然 $\Omega_2 \subseteq M$ 。定义如下 V 函数:

$$V = S^* g\left(\frac{\phi_1}{S^*}\right) + \frac{I^*}{(1-\rho)(I^* + \sigma A^*)} I^* g\left(\frac{\phi_3}{I^*}\right) + \frac{\sigma A^*}{\rho(I^* + \sigma A^*)} A^* g\left(\frac{\phi_4}{A^*}\right) \quad (5)$$

让模型(1)右侧为 0 并经过化简可以得到:

$$\begin{aligned} \mu + \psi &= \frac{\Lambda}{S^*} - \beta(I^* + \sigma A^*) \\ \mu + \eta &= \frac{\rho \beta S^* (I^* + \sigma A^*)}{A^*} \\ \mu + \delta &= \frac{(1-\rho) \beta S^* (I^* + \sigma A^*)}{I^*} \end{aligned}$$

当 $t \geq 1$ 时, V 沿着 u_t 的导数为:

$$\dot{V} = -\Lambda \left[g\left(\frac{S^*}{S(t)}\right) + g\left(\frac{S(t)}{S^*}\right) \right] - \beta S(t) \frac{\sigma(A(t)I^* - A^*I(t))^2}{(I^* + \sigma A^*)A(t)I(t)} \leq 0. \quad (6)$$

当且仅当 $S(t) = S^*, I(t) = I^*, A(t) = A^*$ 时成立。因此 $\dot{V} \leq 0$ 。当且仅当 $S(t) = S^*, I(t) = I^*, A(t) = A^*, R(t) = R^*$ 时等号成立。

通过(5)、(6)和系统(1)的第二、第五个方程, 我们可以得到 $\omega(\phi) \subseteq \Omega$ 。因此对 $R_c \leq 1, V$ 在 $\{u_t : t \leq 1\} \subseteq \Omega$ 是 Lyapunov 函数。由[25]中推论 3.3, 可得 $\forall \phi \in \omega(\phi)$ 有 $\dot{V}(\phi) = 0$ 。

假设 $u_t = (S(t), V(t), I(t), A(t), R(t))^T$ 是系统(1)过任意 $\phi \in \omega(\phi)$ 的解。由于 $\omega(\phi)$ 的不变性, 我们可以得出结论, 对于所有的 $t \in \mathbb{R}, u_t \in \omega(\phi)$ 。所以得到, 对任意的 $t \in \mathbb{R}, \dot{V}(u_t) = 0$ 。因此, 从(9)可知, $S(t) = S^* A(t)I^* = A^*I(t)$, 对于所有的 $t \in \mathbb{R}$ 。因此:

$$\begin{aligned} A^* \dot{I}(t) &= A^* (1-\rho) \beta S(t) (I(t) + \sigma A(t)) - (\mu + \delta) I(t) A^* \\ &= A(t) I^* (1-\rho) \beta S(t) (I(t) + \sigma A(t)) - (1-\rho) \beta S(t) (I(t) + \sigma A(t)) I(t) A^* = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

其中我们用到了 $\mu + \delta = \frac{(1-\rho) \beta S^* (I^* + \sigma A^*)}{I^*}$ 。这意味着 $I(t)$ 是 \mathbb{R} 上的一个常数。进一步, 我们得到了函数 $A(t)$ 是 \mathbb{R} 上的常数。由模型(1)和 $\omega(\phi)$ 的不变性原理可知 $V(t)$ 和 $R(t)$ 为上的常值函数, 又因为已证得平衡点的唯一性, 因此, $\omega(\phi) = \{E^*\}$ 。

接下来, 我们证明了 E^* 是稳定的。由于系统(1)的第二和第五个方程是独立的, 因此系统(1)的其余三个方程可以构成一个独立的子系统。通过(5)、(6)和([26], 引理 4.1), 我们可以证明该子系统的平衡态 E^* 是稳定的。通过使用([26], 定理 4.3)中类似的论证, 我们可以得到 E^* 是稳定的。因此, 当 $R_c \leq 1$ 时, 无病平衡点 E^* 在 R_+^5 中是全局渐近稳定的。

5. 数值模拟

这一节我们的目的是验证理论结果, 因此将要对模型(1)进行数值模拟, 我们关注的重点是疫苗接种和时滞对 COVID-19 传播的影响。因此, 我们将旨在探讨参数和对 COVID-19 动态传播的影响。我们选

取了一组参数:

$$\Lambda = 3, \psi = 0.4, \beta = 0.518, \sigma = 0.8, \mu = 0.33, \delta = 0.8, \eta = 0.037, \rho = 0.037.$$

我们选定初始值:

$$S^0 = 4000, I^0 = 1000, A^0 = 300, R^0 = 400.$$

接下来我们进行数值模拟:

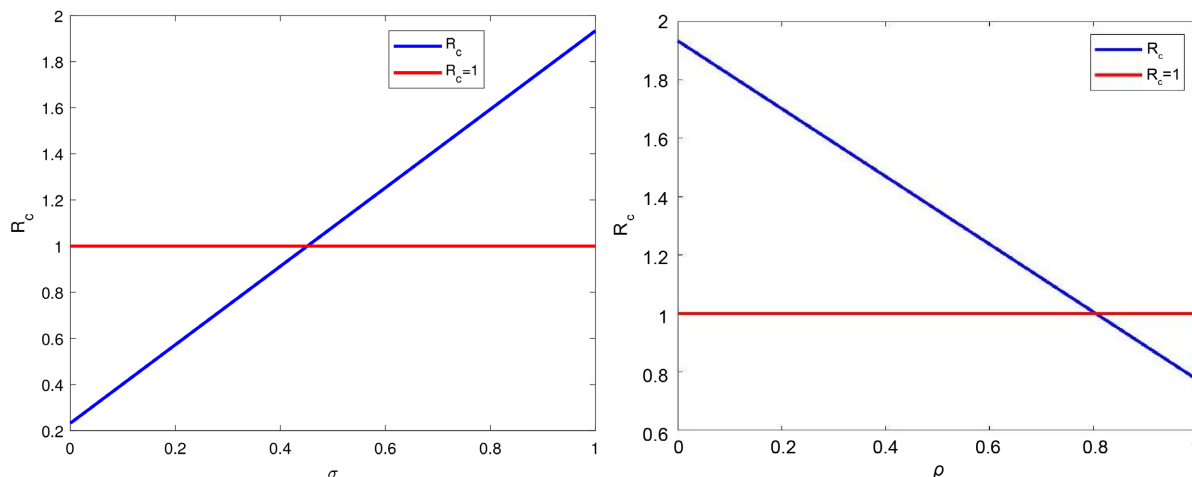


Figure 1. The correlation of R_c to σ and ρ

图 1. R_c 与 σ 和 ρ 的关系

图 1 表示, 保持其他参数不变, R_c 的值随着 σ 和 ρ 变化而变化的情况, 当 σ 不断增大的时, R_c 的值从小于 1 慢慢增大到大于 1, 即无症状感染者传播概率的调节因子越大, 无症状感染者个数越多, COVID-19 的传播率越高; 当 ρ 不断增大时, R_c 的值从大于 1 慢慢增大到小于 1。即无症状感染者所占比例越大, COVID-19 的传播率越低, 由此可以验证定理 4.1, 当 ρ 的值不断增大时, σ 不断减小时传播率越低, 并且当 σ 和 ρ 变换到某一值时, R_c 的值会小于 1, 在这一点上, COVID-19 会在某区域内被消灭。

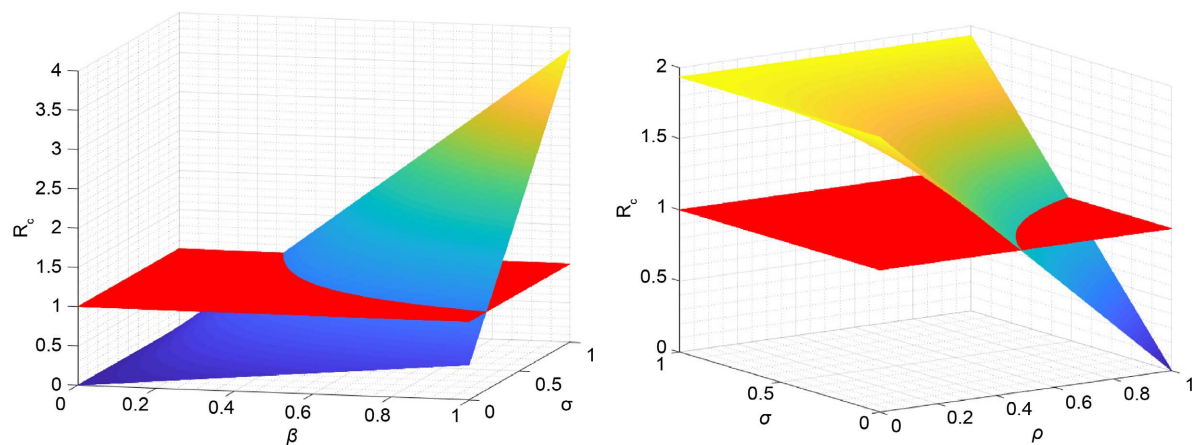


Figure 2. The picture on the left represents the relationship between R_c and (β, σ) , and the picture on the right represents the relationship between R_c and (σ, ρ) , where the red plane represents $R_c = 1$

图 2. 在左侧的图片中表示 R_c 与 (β, σ) 的关系, 在右侧的图片中表示 R_c 与 (σ, ρ) 的关系, 其中红色平面代表 $R_c = 1$

在图 2 中, 我们在左侧图片展示了在三维空间中 R_c 与 (β, σ) 的关系, 在这里, 只有参数 β 和 σ 的值发生变化, 其他参数保持不变。我们可以发现, 传播率 β 和无症状感染者传播概率的调节因子 σ 它们共同决定了 R_c 的趋势。并且对 R_c 有很大影响, 因此, 在 COVID-19 爆发的区域, 应该采取隔离, 佩戴口罩, 错峰出行, 保持社交距离等措施, 从而可以减少病毒传播率。在右侧图片我们展示了三维空间中 R_c 与 (σ, ρ) 的关系, 在这里只有参数 σ 和 ρ 的值发生变化, 其他参数保持不变。我们可以发现, 无症状感染者传播概率的调节因子 σ 和无症状感染者比率 ρ 对 R_c 的影响较为明显, 并且 ρ 越大, 即无症状感染者所占比率越高, 疫情越容易控制, 因此应该采取加强加大筛查力度, 制定科学的核酸检测机制, 及时发现, 尽早隔离治疗等措施, 确保无症状感染者在病情加重之前得到有效治疗。

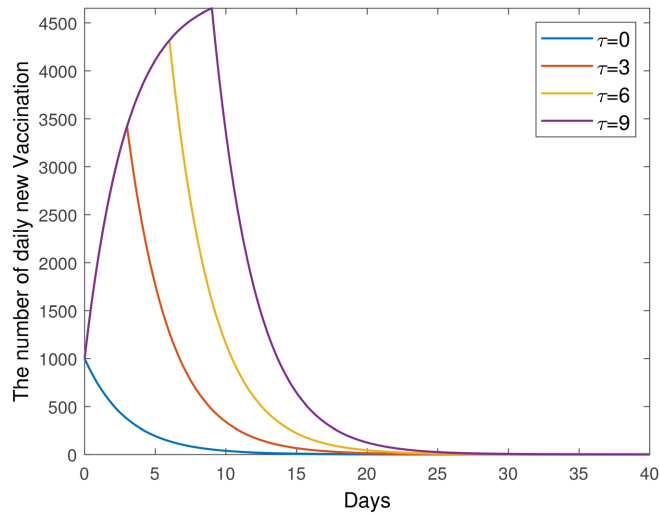


Figure 3. The impact of different Delay τ on the number of vaccinated people V
图 3. 不同时滞 τ 对疫苗接种人数 V 的影响

在图 3 中, 我们固定其它参数值, 考虑不同的时滞, 即不同疫苗的生效时间对疫苗接种人数的影响, 从图中可以看出, 时滞 τ 越大, 即疫苗生效时间越长, 出现拐点的时间越靠后, 所以应该考虑研制生效时间较短的疫苗, 从而可以尽快出现拐点, 使疫情得到有效控制。

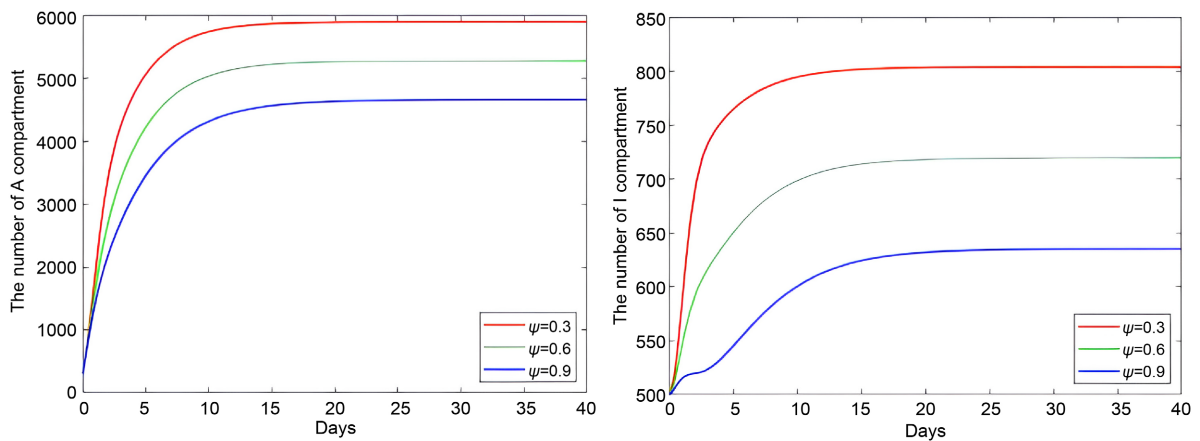


Figure 4. Impact of vaccination rate ψ on I and A
图 4. 疫苗接种率 ψ 对 I 和 A 的影响

在图 4 中, 我们固定其它参数值, 只考虑疫苗接种率 ψ 对于有症状感染者和无症状感染者的影响, 左右两幅图中均可以看出, 疫苗接种率越大, 同一时刻感染者人数越少, 最终达到一个平衡点, 因此, 在疫情防控过程中可以加大疫苗接种率, 从而使疫情得到有效控制。

6. 结论

基于 COVID-19 的传播机制及相关研究, 我们提出了一个具有无症状感染和疫苗接种时滞的传播模型, 并计算了决定 COVID-19 是否灭绝或持续存在的控制再生数 R_c 。研究了无病平衡点 E^0 和地方病平衡点 E^* 相对于 R_c 的全局稳定性。理论研究表明, 当且仅当 $R_c \leq 1$ 成立时, 无病平衡点 E^0 在给定区域是全局渐近稳定的; 当且仅当 $R_c \geq 1$ 成立时, 地方病平衡点 E^* 给定区域是全局渐近稳定的。这表明, 如果 $R_c \leq 1$, COVID-19 可以清除; 如果 $R_c \geq 1$, COVID-19 将持续存在。通过数值模拟我们可以发现, 疫苗接种可以有效地控制疫情的传播, 并且接种率越高, 感染者人数越低, 此外由于不同疫苗接种之后产生抗体的时间不同, 疫苗生效时间越短, 越有利于疫情的防控。最后无症状感染者数量越多, 占比越大, 由于其传播性低于有症状感染者, 所以越有利于尽早的控制疫情。

基于目前 COVID-19 传播特点我们可以采取如下措施: 科研工作者应尽快研制有效的新型疫苗以及针对 COVID-19 的特效药物; 政府应加大宣传力度, 让群众了解当前形式, 让群众做好日常防护措施; 其次对于已接种基本系列疫苗的人群, 推荐接种加强剂, 以增强免疫力, 特别是针对变异毒株; 然后优先保护高风险人群, 比如老年人、患有并发症和免疫功能低下的人群和儿童应优先接种疫苗, 以降低重症和死亡风险; 并且持续监测变异株; 密切关注病毒变异情况, 及时调整疫苗接种策略, 我们每一个人也应该积极响应政府号召, 做好日常防护, 守护当前的防疫成果。

参考文献

- [1] Vivaldi, G., Pfeffer, P.E., Talaei, M., Basera, T.J., Shaheen, S.O. and Martineau, A.R. (2023) Long-Term Symptom Profiles after COVID-19 vs Other Acute Respiratory Infections: An Analysis of Data from the COVIDENCE UK Study. *eClinicalMedicine*, **65**, Article 102251. <https://doi.org/10.1016/j.eclinm.2023.102251>
- [2] 新冠疫苗研究进展及有效疫情防控免疫策略[J]. 前进论坛, 2022(3): 23-24.
- [3] World Health Organization (WHO) (2021) Coronavirus (COVID-19) in China. <https://www.who.int/china/emergencies/covid-19-in-china>
- [4] Ao, D., Lan, T., He, X., Liu, J., Chen, L., Baptista-Hon, D.T., Zhang, K. and Wei, X. (2022) SARS-CoV-2 Omicron Variant: Immune Escape and Vaccine Development. *MedComm*, **3**, Article e126. <https://doi.org/10.1002/mco2.126>
- [5] Bushman, M., Kahn, R., Taylor, B.P., Lipsitch, M. and Hanage, W.P. (2021) Population Impact of SARS-CoV-2 Variants with Enhanced Transmissibility and/or Partial Immune Escape. *Cell*, **184**, 6229-6242. <https://doi.org/10.1016/j.cell.2021.11.026>
- [6] Clemente-Suárez, V.J., Hormeño-Holgado, A., Jiménez, M., Benitez-Agudelo, J.C., Navarro-Jiménez, E., Perez-Palencia, N., Maestre-Serrano, R., Laborde-Cárdenas, C.C. and Tornero-Aguilera, J.F. (2020) Dynamics of Population Immunity Due to the Herd Effect in the COVID-19 Pandemic. *Vaccines*, **8**, Article 236. <https://doi.org/10.3390/vaccines8020236>
- [7] Dyson, L., Hill, E.M., Moore, S., Curran-Sebastian, J., Tildesley, M.J., Lythgoe, K.A., House, T., Pellis, L. and Keeling, M.J. (2021) Possible Future Waves of SARS-CoV-2 Infection Generated by Variants of Concern with a Range of Characteristics. *Nature Communications*, **12**, Article 5730. <https://doi.org/10.1038/s41467-021-25915-7>
- [8] Gonzalez-Parra, G. and Arenas, A.J. (2021) Nonlinear Dynamics of the Introduction of a New SARS-CoV-2 Variant with Different Infectiousness. *Mathematics*, **9**, Article 1564. <https://doi.org/10.3390/math9131564>
- [9] Harvey, W.T., Carabelli, A.M., Jackson, B., et al. (2021) SARS-CoV-2 Variants, Spike Mutations and Immune Escape. *Nature Reviews Microbiology*, **19**, 409-424. <https://doi.org/10.1038/s41579-021-00573-0>
- [10] Pei, Y.Z., Li, S.P., Li, C.G. and Chen, S.Z. (2021) The Effect of Constant and Pulse Vaccination on an SIR Epidemic Model with Infectious Period. *Applied Mathematical Modelling*, **35**, 3866-3878. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2011.02.012>

-
- [11] Cao, B.Q., Shan, M.J., Zhang, Q.M. and Wang, W.M. (2017) A Stochastic SIS Epidemic Model with Vaccination. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, **486**, 127-143. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2017.05.083>
- [12] Bjornstad, O.N., Shea, K., Krzywinski, M. and Altman, N. (2020) The SEIRS Model for Infectious Disease Dynamics. *Nature Methods*, **17**, 557-558. <https://doi.org/10.1038/s41592-020-0856-2>
- [13] Tan, J., Ge, Y., Martinez, L., Sun, J., Li, C., Westbrook, A. and Huang, H. (2022) Transmission Roles of Symptomatic and Asymptomatic COVID-19 Cases: A Modelling Study. *Epidemiology & Infection*, **150**, Article e171. <https://doi.org/10.1017/S0950268822001467>
- [14] Djilali, S., Benahmadi, L., Tridane, A. and Niri, K. (2020) Modeling the Impact of Unreported Cases of the COVID-19 in the North African Countries. *Biology*, **9**, Article 373. <https://doi.org/10.3390/biology9110373>
- [15] Cooke, K.L. (1979) Stability Analysis for a Vector Disease Model. *Journal of Mathematical Biology*, **9**, 31-42. <https://doi.org/10.1216/RMJ-1979-9-1-31>
- [16] Liu, X. and Ding, Y. (2022) Stability and Numerical Simulations of a New SVIR Model with Two Delays on COVID-19 Booster Vaccination. *Mathematics*, **10**, Article 1772. <https://doi.org/10.3390/math10101772>
- [17] Zhai, S.D., Luo, G.Q., Huang, T., Wang, X., Tao, J.L. and Zhou, P. (2021) Vaccination Control of an Epidemic Model with Time Delay and Its Application to COVID-19. *Nonlinear Dynamics*, **106**, 1279-1292. <https://doi.org/10.1007/s11071-021-06533-w>
- [18] Rong, X.M., Yang, L., Chu, H.D. and Fan, M. (2020) Effect of Delay in Diagnosis on Transmission of COVID-19. *Mathematical Biosciences and Engineering*, **17**, 2725-2740. <https://doi.org/10.3934/mbe.2020149>
- [19] Yang, B., Yu, Z.H. and Cai, Y.L. (2022) The Impact of Vaccination on the Spread of COVID-19: Studying by a Mathematical Model. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, **590**, Article 126717. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2021.126717>
- [20] Shafeeq, S., Abdulkadhim, M.M., Mohsen, A.A., Al-Husseiny, H.F. and Zeb, A. (2022) Bifurcation Analysis of a Vaccination Mathematical Model with Application to COVID-19 Pandemic. *Communications in Mathematical Biology and Neuroscience*, **2022**, Article ID: 86.
- [21] Lv, J., Guo, S., Cui, J., *et al.* (2020) Asymptomatic Transmission Shifts Epidemic Dynamics. *Mathematical Biosciences and Engineering*, **18**, 92-111. <https://doi.org/10.3934/mbe.2021005>
- [22] Ma, Z., Zhou, Y. and Li, C. (2015) *Qualitative and Stability Methods of Ordinary Differential Equations*. 2nd Edition, Science Press, Beijing. (In Chinese)
- [23] Hale, J.K. (1977) *Theory of Functional Differential Equations*. 2nd Edition, Springer, New York. <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-9892-2>
- [24] Hale, J.K. and Verduyn Lunel, S.M. (1993) *Introduction to Functional Differential Equations*. Springer, New York. <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-4342-7>
- [25] Kuang, Y. (1993) *Delay Differential Equations with Applications in Population Dynamics*. Academic Press, Boston.
- [26] Guo, S. and Ma, W. (2019) Remarks on a Variant of Lyapunov-LaSalle Theorem. *Mathematical Biosciences and Engineering*, **16**, 1056-1066. <https://doi.org/10.3934/mbe.2019050>