

基于饱和发生率的游客人数模型的 dynamics 分析

刘 娇¹, 金银芳^{2*}, 金银来^{1*}

¹临沂大学数学与统计学院, 山东 临沂

²临沂大学学报编辑部, 山东 临沂

收稿日期: 2024年3月19日; 录用日期: 2024年4月18日; 发布日期: 2024年4月25日

摘要

本文将具有饱和发生率的传染病动力学SIRS模型应用于旅游业研究, 获得了游客人数动力学模型。通过对该模型系统的动力学性质分析, 获得了平衡点类型及全局渐近稳定的条件, 分析了游客人数变化的趋势。进一步通过模拟在不同因素影响下的游客人数变化趋势发现, 提高旅游吸引力、降低游客拥挤系数、延长旅游时长、提高可能再次旅游的概率皆可增加游客人数, 并据此为旅游业的健康和可持续发展提供了建议。

关键词

饱和发生率, SIRS模型, 平衡点, 全局渐近稳定性

Dynamic Analysis of Tourist Number Model Based on Saturation Incidence Rate

Jiao Liu¹, Yinfang Jin^{2*}, Yinlai Jin^{1*}

¹School of Mathematics and Statistics, Linyi University, Linyi Shandong

²Journal Editorial Department, Linyi University, Linyi Shandong

Received: Mar. 19th, 2024; accepted: Apr. 18th, 2024; published: Apr. 25th, 2024

Abstract

This article applied the SIRS model of infectious disease dynamics with saturation incidence rate to tourism industry research and obtained a dynamic model of tourist numbers. By analyzing the

*通讯作者。

dynamic properties of the model system, the types of equilibrium points and the conditions for global asymptotic stability were obtained, and the trend of changes in tourist numbers was analyzed. Further simulation of the trend of tourist numbers under different factors revealed that increasing tourism attractiveness, reducing tourist congestion, extending tourism duration, and increasing the probability of re-tourism can all increase the number of tourists. Based on this, suggestions are provided for the healthy and sustainable development of the tourism industry.

Keywords

Saturation Occurrence Rate, SIRS Model, Equilibrium Point, Global Asymptotic Stability

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

随着国内疫情防控政策逐步优化，旅游市场逐渐复苏，过去三年累积的旅游意愿得到了快速释放，从需求方面有力推进了旅游经济的快速复苏。2023年各季度居民出游意愿维持在90%以上，随着旅游业的日益发展，高效准确预测游客人数及变化趋势对景区的科学管理与规划具有指导作用，对于制定有效的战略、提高经济效益、减少风险以及促进可持续发展都具有重要的战略意义。我国旅游方面的预测分析起始于20世纪80年代中期，针对旅游人数预测，国内大多采用GM(1,1)模型，时间序列模型和BP神经网络模型等[1][2][3]。

本文将传染病动力学中的SIRS模型作为理论工具，研究游客人数变化模型。由于旅游发生率受多方面的影响，易达到饱和状态。因此，将具有饱和发生率的传染病动力学SIRS模型与游客人数结合在一起，分析了游客人数变化的趋势。应用微分方程定性及稳定性理论，探究平衡点的存在性及稳定性，给出了基本再生数，通过构造Dulac函数探究极限环的不存在性并讨论不同因素对游客人数变化的影响。最后通过模拟在不同因素影响情况下游客人数变化的趋势，为旅游业的健康和可持续发展提供建议。

2. 基于饱和发生率的游客人数模型

假设总人口数为 N 且 N 不变， $S(t)$ ， $I(t)$ ， $R(t)$ 分别代表 t 时刻未去某旅游目的地的人数，正在某旅游目的地的游客人数，从该地结束旅游的游客人数，出生率和死亡率相等皆为 b ， δ 表示可能再次旅游的比例系数， β 表示该地对游客的吸引力系数， α 表示“游客拥挤”系数(游客人数增多对个体的影响系数)， $\frac{1}{\gamma}$ 表示平均旅游时长。建立如下基于饱和发生率的游客人数模型[4]：

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \frac{-\beta S(t)I(t)}{1+\alpha I(t)} + bN - bS(t) + \delta R(t) \\ \frac{dI}{dt} = \frac{\beta S(t)I(t)}{1+\alpha I(t)} - bI(t) - \gamma I(t) \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I(t) - bR(t) - \delta R(t) \end{cases} \quad (1)$$

令 $R(t) = N - S(t) - I(t)$, 代入(1)中的前两式得:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \frac{-\beta S(t)I(t)}{1+\alpha I(t)} + (b+\delta)N - (b+\delta)S(t) - \delta I(t) \\ \frac{dI}{dt} = \frac{\beta S(t)I(t)}{1+\alpha I(t)} - bI(t) - \gamma I(t) \end{cases} \quad (2)$$

其中 $(S, I) \in D = \{(S, I) | 0 \leq S \leq N, 0 \leq I \leq N, S + I \leq N\}$ 。

3. 模型分析

3.1. 平衡点分析

令

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \frac{-\beta S(t)I(t)}{1+\alpha I(t)} + (b+\delta)N - (b+\delta)S(t) - \delta I(t) = 0 \\ \frac{dI}{dt} = \frac{\beta S(t)I(t)}{1+\alpha I(t)} - bI(t) - \gamma I(t) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

可解得平衡点为:

$$M_1(N, 0), M_2 \left(\frac{(b+\gamma)[(b+\gamma+\delta)+(b+\delta)\alpha N]}{\beta(b+\gamma+\delta)+(b+\delta)(b+\gamma)\alpha}, \frac{(b+\delta)(\beta N - b - \gamma)}{\beta(b+\gamma+\delta)+(b+\delta)(b+\gamma)\alpha} \right) = (S^*, I^*)$$

情况 1: $\frac{\beta N}{b+\gamma} < 1$ 。

此时, D 内只有唯一的平衡点 M_1 , 其线性近似系统的系数矩阵为 $\begin{pmatrix} -b-\delta & -\beta N - \delta \\ 0 & \beta N - b - \gamma \end{pmatrix}$, 特征根为

$$\lambda_1 = -b - \delta < 0, \quad \lambda_2 = \beta N - b - \gamma < 0。$$

所以 M_1 在 D 内全局渐进稳定, 无论 $S(t)$ 为多少, $I(t)$ 都会消失。

情况 2: $\frac{\beta N}{b+\gamma} > 1$ 。

$$\text{此时, } 0 < S^* = \frac{(b+\gamma)[(b+\gamma+\delta)+(b+\delta)\alpha N]}{\beta(b+\gamma+\delta)+(b+\delta)(b+\gamma)\alpha} < \frac{(b+\gamma+\delta)\beta N + (b+\delta)(b+\gamma)\alpha N}{\beta(b+\gamma+\delta)+(b+\delta)(b+\gamma)\alpha} = N,$$

$$\begin{aligned} 0 < I^* &= \frac{(b+\delta)(\beta N - b - \gamma)}{\beta(b+\gamma+\delta)+(b+\delta)(b+\gamma)\alpha} < \frac{(b+\gamma+\delta)\beta N - (b+\delta)(b+\gamma)}{\beta(b+\gamma+\delta)+(b+\delta)(b+\gamma)\alpha} \\ &< \frac{(b+\gamma+\delta)\beta N + (b+\delta)(b+\gamma)\alpha N}{\beta(b+\gamma+\delta)+(b+\delta)(b+\gamma)\alpha} = N \end{aligned}$$

所以 $0 \leq S^* \leq N$, $0 \leq I^* \leq N$, 于是 M_1, M_2 都是 D 内的平衡点。

系统在 M_1 处的线性近似系统的系数矩阵为 $\begin{pmatrix} -b-\delta & -\beta N - \delta \\ 0 & \beta N - b - \gamma \end{pmatrix}$ 。

特征根为 $\lambda_1 = -b - \delta < 0$, $\lambda_2 = \beta N - b - \gamma > 0$, 故 M_1 为鞍点。

系统在 M_2 处的线性近似系统的系数矩阵为

$$\begin{pmatrix} \frac{-\beta I^*}{1+\alpha I^*} - (b+\delta) & \frac{-\beta S^*}{(1+\alpha I^*)^2} - \delta \\ \frac{\beta I^*}{1+\alpha I^*} & \frac{\beta S^*}{(1+\alpha I^*)^2} - (b+\gamma) \end{pmatrix} \quad (4)$$

其特征方程为 $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ ，特征根为 $\lambda_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$ ，其中，

$$p = \frac{\beta I^*}{1+\alpha I^*} + (b+\delta) - \frac{\beta S^*}{(1+\alpha I^*)^2} + (b+\gamma),$$

$$\begin{aligned} q &= \left[\frac{-\beta I^*}{1+\alpha I^*} - (b+\delta) \right] \left[\frac{\beta S^*}{(1+\alpha I^*)^2} - (b+\gamma) \right] - \left[\frac{-\beta S^*}{(1+\alpha I^*)^2} - \delta \right] \frac{\beta I^*}{1+\alpha I^*} \\ &= (b+\delta) \left[\frac{\beta I^*}{1+\alpha I^*} - \frac{\beta S^*}{(1+\alpha I^*)^2} + (b+\gamma) \right] + \frac{\beta I^* \gamma}{1+\alpha I^*} \end{aligned}$$

(3)中的第二式 $\div I$ 得 $\frac{\beta S}{1+\alpha I} - (b+\gamma) = 0$ ，故 $\frac{1}{1+\alpha I} = \frac{b+\gamma}{\beta S}$ ，将其代入 p, q 得

$$p = \frac{(b+\gamma)I^*}{S^*} + (b+\delta) - \frac{(b+\gamma)^2}{\beta S^*} + (b+\gamma), \quad q = (b+\delta) \left[\frac{(b+\gamma)I^*}{S^*} - \frac{(b+\gamma)^2}{\beta S^*} + (b+\gamma) \right] + \frac{I^* \gamma (b+\gamma)}{S^*}.$$

将 S^* 代入 $\frac{(b+\gamma)^2}{\beta S^*}$ 得， $\frac{(b+\gamma)^2}{\beta S^*} = \frac{(b+\gamma)[\beta(b+\gamma+\delta) + (b+\delta)(b+\gamma)\alpha]}{\beta[(b+\gamma+\delta) + \alpha(b+\delta)N]} < (b+\gamma)$ 。

因此 $p > 0, q > 0$ ，故 M_2 的特征根具有负实部，该平衡点是渐近稳定的。

3.2. 极限环分析

取 Dulac 函数 $B = \frac{1}{I}$ 。

$$\text{令} \begin{cases} P(S, I) = \frac{-\beta S(t)I(t)}{1+\alpha I(t)} + (b+\delta)N - (b+\delta)S(t) - \delta I(t) \\ Q(S, I) = \frac{\beta S(t)I(t)}{1+\alpha I(t)} - bI(t) - \gamma I(t) \end{cases}, \text{ 则}$$

$$\frac{\partial(BP)}{\partial S} + \frac{\partial(BQ)}{\partial I} = -\frac{\beta}{1+\alpha I} - \frac{(b+\delta)}{I} - \frac{\beta \alpha S}{(1+\alpha I)^2} < 0.$$

由平面定性理论可知，系统无闭轨。

3.3. 主要结论

定义基本再生数 $R_0 = \frac{\beta N}{b+\gamma}$ 。

定理. 当 $R_0 < 1$ 时，系统(2)在 D 内只有唯一的平衡点 M_1 ，其在 D 内是全局渐近稳定的，无论 $S(t)$ 为多少， $I(t)$ 都会逐渐消失。

当 $R_0 > 1$ 时, 系统(2)在 D 内有两个平衡点 M_1 和 M_2 , 其中 M_1 为鞍点, M_2 在 D 内是全局渐近稳定的, 随着时间的推移, $S(t)$, $I(t)$, $R(t)$ 最终趋于稳定的数值。

运用 MATLAB 软件验证结论的准确性。

基于上述理论模型, 通过模拟选择下文所使用的数据, 以便模拟检验理论的预测效果。

例 1. 选择的参数如下:

$$S_0 = 3000000, I_0 = 2000, R_0 = 100, \beta = 2.5 \times 10^{-7}, \alpha = 0.01, b = 0.007, \gamma = 1.2, \delta = 0.01$$

$$S_0 = 3000000, I_0 = 2000, R_0 = 100, \beta = 3 \times 10^{-7}, \alpha = 0.015, b = 0.007, \gamma = 1.3, \delta = 0.012$$

$$S_0 = 3000000, I_0 = 2000, R_0 = 100, \beta = 3.5 \times 10^{-7}, \alpha = 0.02, b = 0.007, \gamma = 1.4, \delta = 0.015$$

经计算可得基本再生数 $R_0 < 1$, 变化情况如图 1 所示, 随着时间的推移, $S(t)$ 趋于稳定的数值, $I(t)$ 和 $R(t)$ 逐渐趋于零。

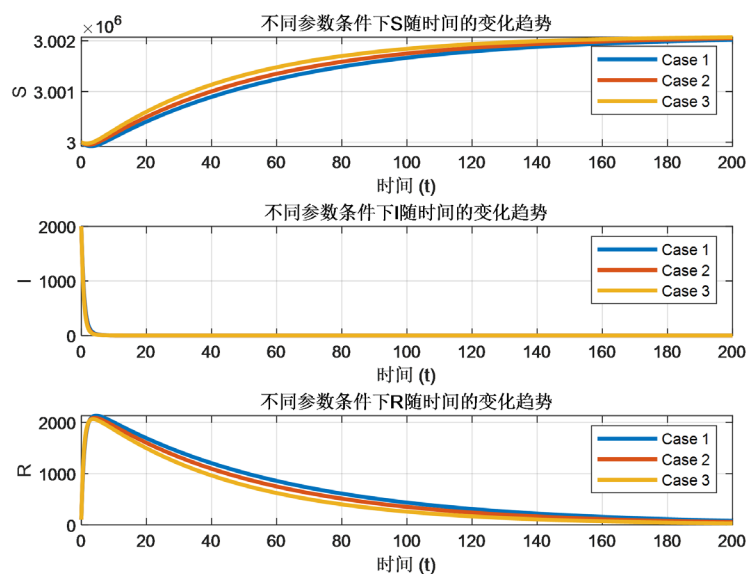


Figure 1. $R_0 < 1$

图 1. $R_0 < 1$

例 2. 选择的参数如下:

$$S_0 = 3000000, I_0 = 2000, R_0 = 100, \beta = 0.25, \alpha = 0.01, b = 0.007, \gamma = 1.2, \delta = 0.05$$

$$S_0 = 3000000, I_0 = 2000, R_0 = 100, \beta = 0.3, \alpha = 0.015, b = 0.007, \gamma = 1.3, \delta = 0.06$$

$$S_0 = 3000000, I_0 = 2000, R_0 = 100, \beta = 0.35, \alpha = 0.02, b = 0.007, \gamma = 1.4, \delta = 0.07$$

经计算可得基本再生数 $R_0 > 1$, 变化情况如图 2 所示, 随着时间的推移, $S(t)$ 逐渐趋于零, $I(t)$ 和 $R(t)$ 趋于稳定的数值。

4. 基于饱和和发生率的游客人数模型的影响因素的分析

4.1. 旅游吸引力系数 β 对游客人数的影响

旅游目的地对游客的吸引力通常被称为“旅游吸引力”, 这是指一个地方所具有的特定特征、资源、活动或体验, 能够引起游客兴趣、激发他们的欲望, 并促使他们选择该地作为旅行目的地。目的地的独

特性和吸引力是决定游客数量的重要因素。通过数值模拟不同旅游吸引力系数 β 条件下游客人数变化的结果如图3所示。

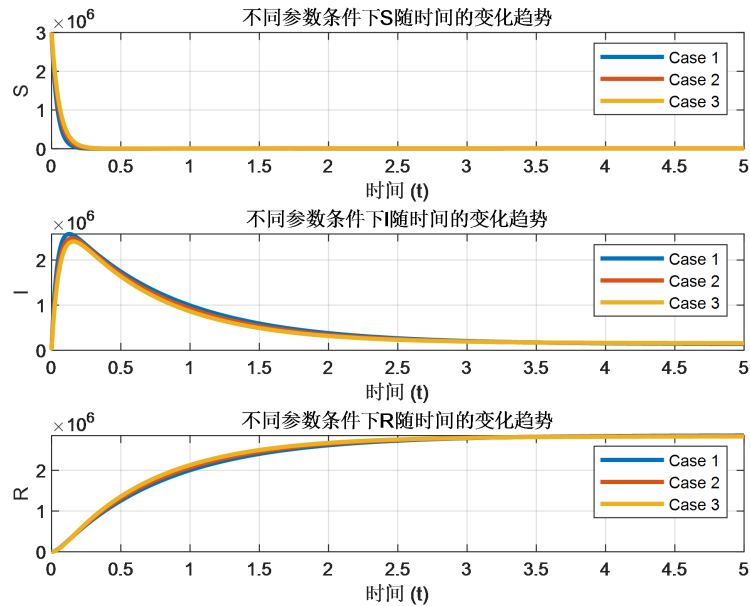


Figure 2. $R_0 > 1$

图 2. $R_0 > 1$

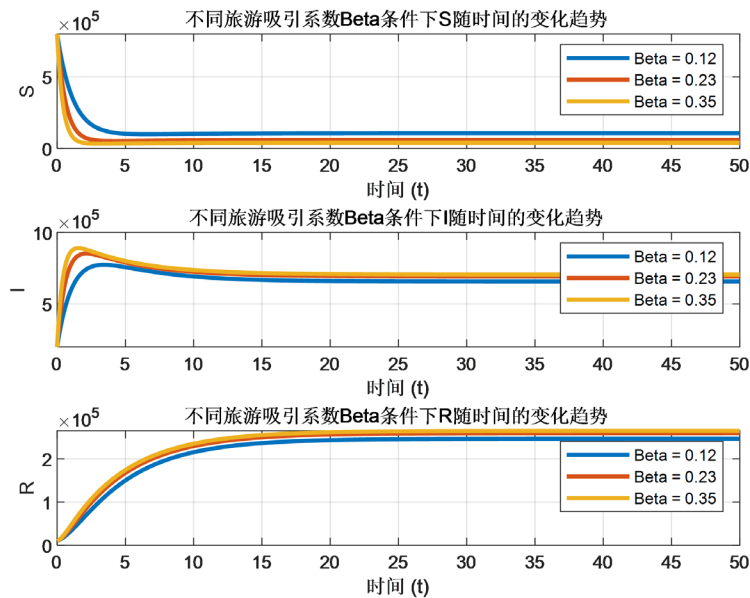


Figure 3. Different tourist attraction coefficients

图 3. 不同旅游吸引力系数

由图可知，旅游吸引力系数 β 越大，游客人数 $I(t)$ 越多，因此可以通过提高旅游目的地的吸引力来提高游客人数。例如突出目的地的独特性和特色，强调其与众不同之处。推广目的地的文化元素，包括传

统艺术、音乐、手工艺品、节庆等，文化体验也是吸引游客的关键之一。还可以提升目的地的基础设施和便利性，确保游客能够舒适、方便地游览，制定吸引人的活动和体验，如冒险运动、文化课程、生态旅游等。综合上述途径提高旅游目的地的吸引力，使其成为游客心目中的理想旅行地点。

4.2. “游客拥挤”系数 α 对游客人数的影响

尽管旅游目的地的吸引力可以促使人们选择某个地方进行旅游，但在旅游人数增多的情况下，个体的旅游意愿可能受到一些制约。如果一个旅游目的地变得拥挤，导致景点、公共设施和交通工具过度拥挤，游客可能感到不舒适，从而降低他们的旅游意愿。随着旅游人数的增加，一些目的地可能会提高价格，包括酒店、门票、餐饮等，高昂的费用可能使一些个体望而却步，降低他们的旅游意愿。大量游客可能导致服务质量下降，例如长时间等待、服务员不堪重负等。这些因素可能让游客对旅游体验产生负面印象，降低他们的意愿再次选择该目的地。通过数值模拟不同“游客拥挤”系数 α 条件下游客人数变化的结果如图4所示。

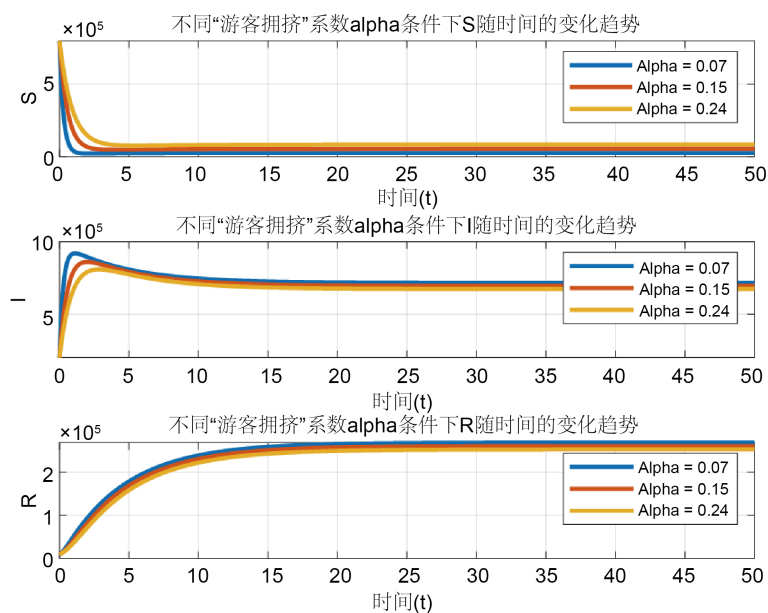


Figure 4. Different tourist crowding coefficients

图4. 不同游客拥挤系数

由图可知，“游客拥挤”系数 α 越小，游客人数 $I(t)$ 越多，因此可以通过减小“游客拥挤”系数 α 来提高游客人数。例如，制定合理的游客数量限制，特别是对于一些容易受到拥挤影响的景点和地区，设计更为高效的游客流程，减少拥挤时段的等待时间。这可以通过引入先进的技术、在线购票、预约系统等来实现，提高游客体验。改善交通条件，更便捷的交通条件有助于拓展潜在的游客市场，通过提高航班、铁路、公路等交通工具的频次和质量，可以吸引更多游客。

4.3. 旅游时长 $\frac{1}{\gamma}$ 对游客人数的影响

一般情况下，旅游时长对游客人数的影响取决于多种因素，包括目的地的吸引力、旅游类型、季节性因素以及游客的个人限制和偏好。有一些情况下，较长的旅游时长可能会吸引更多的游客，特别是对

于那些寻求深度文化体验、冒险旅行或长途度假的人群。这些游客可能更愿意花更多的时间在一个目的地，以更全面地了解当地文化、历史和风土人情。然而，对于一些短期的度假目的地或者强调主题性质的旅游活动，游客可能更倾向于短暂的停留，但可能会在一年内进行多次短途旅行。通过数值模拟该模型在不同的旅游时长条件下的变化情况如图 5 所示。

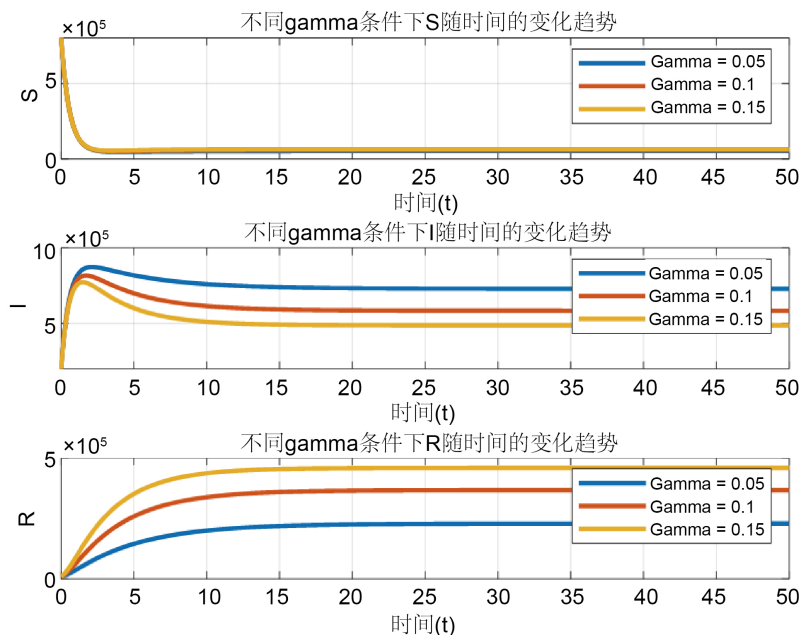


Figure 5. Different travel durations
图 5. 不同的旅游时长

由图可知，在该模型的条件下，旅游时长 $\frac{1}{\gamma}$ 越长，游客人数 $I(t)$ 越多。但总体而言，旅游时长与游客人数之间是存在一定的关联，但两者之间的关系是复杂的，需要考虑多个因素。不同的旅游时长也反映了不同游客群体的需求和偏好。因此，目的地和旅游服务提供商可以通过了解这些趋势来调整自己的策略，以更好地满足不同游客群体的需求。

4.4. 可能再次旅游的概率 δ 对游客人数的影响

游客可能再次去某个旅游地的比例可以对该地的游客人数产生重要影响。该比例越高意味着一个旅游地可以拥有长期稳定的客源，这对于旅游业来说是非常有价值的。因为它不仅意味着吸引新游客，还表示已有客户的保持和忠诚度。如果游客在第一次访问中获得了良好的体验，他们更有可能再次选择同一目的地，从而形成一个良性的循环，形成较高的品牌价值，进而吸引更多游客。通过数值模拟不同概率 δ 条件下游客人数变化的结果如图 6 所示。

由图可知，可能再次旅游的概率 δ 越大，游客人数 $I(t)$ 越多，因此可以通过提高 δ 来增加游客人数。例如通过提供卓越的服务、清洁、便利的设施和友好的工作人员，确保游客在第一次访问时有愉快的体验。定期更新或增加新的景点、活动或体验，保持目的地的吸引力。对游客的反馈进行认真回应，及时解决问题，展示对顾客满意度的关注和承诺，这种积极的态度可以增强游客对品牌的信任，提高再次光顾的可能性。

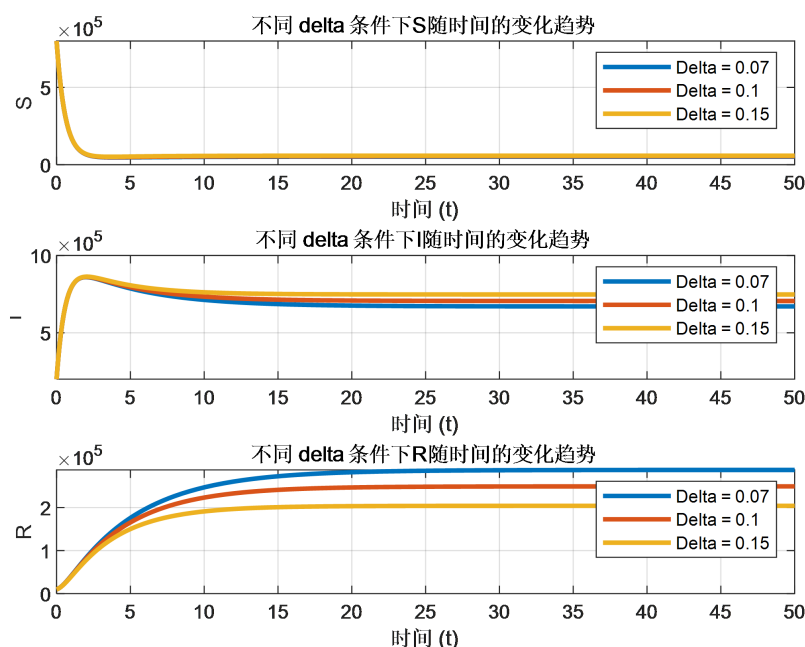


Figure 6. Different probabilities of revisiting
图 6. 不同的可能再次旅游概率

5. 结论

本文将传染病动力学中的 SIRS 模型作为理论工具, 研究游客人数变化模型。应用微分方程稳定性与稳定性理论, 探究平衡点的存在性及稳定性, 给出了基本再生数 R_0 。当 $R_0 < 1$ 时, 系统只有唯一的全局渐近稳定的平衡点 M_1 , 无论 $S(t)$ 为多少, $I(t)$ 都会逐渐消失。当 $R_0 > 1$ 时, 系统有两个平衡点 M_1 和 M_2 , 其中 M_1 为鞍点, M_2 是全局渐近稳定的, 即随着时间的推移, $S(t)$, $I(t)$, $R(t)$ 最终趋于稳定的数值。进一步通过构造 Dulac 函数分析极限环的不存在性。在基于饱和发生率的游客人数模型的基础上, 分析了不同的参数 β , α , γ , δ 对于游客人数的影响, 模拟不同参数变化的情况下 $S(t)$, $I(t)$, $R(t)$ 的变化趋势。结果表明, 提高旅游吸引力、降低游客拥挤系数、延长旅游时长、提高可能再次旅游的概率皆可增加游客人数。因此可以通过提高旅游目的地对游客的吸引力, 推广目的地的文化因素, 制定吸引人的活动; 降低“游客拥挤”带来的负面影响, 设计更为高效的游客流程, 对可能引起拥挤的特定活动或事件实施限制, 以平衡客流量; 不断检测游客数量和旅游时长的情况, 根据实际情况对管理策略进行调整; 完善服务设施和提升服务质量, 确保游客在第一次访问时有愉快的体验等途径增加游客人数, 为旅游业的发展提出了可实施性的建议。

基金项目

山东省自然科学基金(ZR2018MA016, ZR2015AL005)项目支持。

参考文献

- [1] 刘丽梅. 基于灰色系统理论的慢旅游需求预测与分析——以云南丽江古城为例[J]. 西部旅游, 2023(18): 54-56.
- [2] 赵玥. 时间序列分析方法在景点人数预测问题中的应用[D]: [硕士学位论文]. 哈尔滨: 黑龙江大学, 2018.
- [3] 李玥. 基于 ARIMA 模型的旅游人数预测[D]: [硕士学位论文]. 南昌: 江西财经大学, 2019.
- [4] 马知恩, 周义仓, 王稳地, 靳祯. 传染病动力学的数学建模与研究[M]. 北京: 科学出版社, 2004.