Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2024, 13(4), 1630-1636**
Published Online April 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2024.134154

概率论的发展简史及在医疗领域的简单应用

胡贵新*

河南理工大学数学与信息科学学院，河南 焦作

收稿日期：2024年3月25日；录用日期：2024年4月22日；发布日期：2024年4月29日

摘　要

概率论是研究随机现象统计规律性质的学科，历经三百多年的曲折发展，现已形成了一套较为完整的理论体系。本文从概率论发展的四个时期，古典概率时期、初等概率时期、分析概率时期和高等概率时期，阐述概率论的产生历程和发展背景，最后通过两个具体案例，简单介绍概率论相关知识在医疗领域的简单应用。

关键词

概率论的发展，贝叶斯公式，核酸检测，中心极限定理，新冠mRNA疫苗

The Brief History of the Development of Probability Theory and Its Simple Applications in the Medical Fields

Guixin Hu*

School of Mathematics and Information Science, Henan Polytechnic University, Jiaozuo Henan

Received: Mar. 25th, 2024; accepted: Apr. 22nd, 2024; published: Apr. 29th, 2024

Abstract

Probability theory, as a mathematical discipline that studies the quantitative laws of random phenomena, has now formed a complete theoretical system after more than 300 years of tortuous development. This paper discusses the process of the origin and development of probability theory from four periods: classical probability, elementary probability, analytical probability, and high probability. Finally we briefly introduce some simple applications in the fields of medical treat-

*通讯作者。

文章引用: 胡贵新. 概率论的发展简史及在医疗领域的简单应用[J]. 应用数学进展, 2024, 13(4): 1630-1636.
DOI: 10.12677/aam.2024.134154

ment by two examples.

Keywords

Development of Probability Theory, Bayes Formula, Nucleic Acid Testing, Central Limit Theorem, New Crown mRNA Vaccine

1. 引言

1933 年，柯尔莫哥洛夫在《概率论的基本概念》一书中，以勒贝格测度为理论基础，给出了概率的公理化定义，概率论从此便发展成了数学分支中一门严谨的数学学科，从此人们就可以用数学的工具来处理随机的问题。概率论与分析学的结合，大大促进了分析概率论的发展。近 30 年来，概率论不断与其他学科交叉融合，从而形成了许多新的学科分支，如半鞅的随机分析、大偏差、粒子系统与随机场、随机动力系统、量子概率、数理金融学和随机排队理论等。今日概率论已融入数学科学的主流，且逐步走向前沿而引领数学的发展，如 2006 年 K. Ito 获首届 Gauss 奖；同年 W. Werner 和 A. Okounkov 获 Fields 奖；2007 年，S. R. S. Varadhan 获得 Abel 奖，其研究工作皆隶属于概率论范畴。

我国在概率论方面的研究不足一百年，1896 年，我国出版了由华衡芳和傅兰雅翻译的中国第一部概率论著作《决疑数学》，这标志着我国开始较为系统地研究概率论，将其作为一门重要的学科[1]。1915 年，中国学者在《科学》月刊上发表了融入中国传统数值算法的概率论与数理统计的研究。作为国内概率论先驱者之一，许宝騄先生在西南联大开设的“数理统计”讨论班是我国第一个有关概率论的课程。1956 年，在全国科技发展规划中，概率统计被列为数学学科的重点发展方向之一，同年，中国建立了首个概率统计教研室，为中国概率论学科的发展打下了坚实的基础。目前，概率论在中国的研究已形成规模，例如在马尔可夫过程、测度值马尔可夫过程、马尔可夫骨架过程等领域中国学者都取得了具有国际先进水平的科研成果。如陈木法运用耦合技巧解决了一系列特征值估计问题，彭实戈院士提出了 G-数学期望的概念，在倒向随机微分方程方向取得了原创性研究成果等。2010 年，彭院士应邀 ICM2010 上作了题为 Backward Stochastic Differential Equations, Nonlinear Expectation and Their Applications 的大会报告，标志着我国在概率论方面取得的成果得到了世界的认同。鲍丽娟，潘兴侠等[2]对 2000 年至 2022 年有关概率论与数理统计教学改革研究的 986 篇文献进行实证统计分析，发现有关教学方法、教学手段、考核方式等理论研究是新世纪以来我国概率论教学研究的研究中心。了解概率论的发展简史及历史背景，可以更好地探索概率论在一些实际问题中的应用，明确概率论在解决实际问题中的应用[3]。

本文以赌博中分赌金的问题来阐述概率论的起源，然后从古典概率、初等概率、分析概率和高等概率四个发展阶段，来阐述概率论的发展历程[4]，然后本文通过医疗领域中的两个问题，进行分析论证，阐述概率论相关知识在实际问题中的应用价值。

2. 概率论的产生背景及发展

概率论是数学的一个重要分支，其历史可追溯到十七世纪中期。其发展史可以划分为四个阶段，分别是古典概率时期、初等概率时期、分析概率时期和高等概率时期。

2.1. 古典概率时期

人们对概率论的早期研究可追溯到十七世纪中叶的一个赌博问题。据史记记载，赌博中掷骰子的历史可追溯到公元前 2000 年的埃及[5]。文艺复兴时期，阿拉伯数字和计算技术在欧洲被广泛传播和应用，使得欧洲在科学研究方面取得了很大进步，资本主义工业也得到迅猛发展。人们关注到诸如残次品、材料损耗、航海天气预测等不可避免的问题没有办法解决，为解决这类问题，有了概率论的雏形。

真正刺激概率论的产生和发展，是数学家们对一个赌博者所提出问题的思考和总结。1654 年，法国一位赌徒德・梅尔向著名数学家帕斯卡请教一个流传至今的“分赌本”问题：假设甲、乙两个赌徒的赌技相同，两人相约谁先赢 S 局，谁就赢得所有赌本，已知甲已经赢了 $a(a<S)$ 局，乙赢了 $b(b<S)$ 局，但其中一人因故要提前结束赌约，问在此次赌约中，赌本该如何进行分配[4]？帕斯卡写信给自己的好友——著名数学家费马，两人在通信中就此问题展开了一系列的讨论，并提出数学期望的概念。至 1655 年，惠更斯对两人“分赌本”的书信内容进行分析总结，将其内容撰写入《论赌博中的计算》一书中，成了概率论发展史上的第一本著作，后人认为帕斯卡、费马、惠更斯为概率论的奠基人。十七世纪末，伯努利归纳总结前人的结论，完善了惠更斯未解决的问题，使概率论成了一门独立的数学分支。伯努利的《猜度术》一书于 1713 年出版发行。在该书中，伯努利首次阐述了伯努利大数定理：设 S_n 为重伯努利试验中事件 A 发生的次数，p 为每次试验中 A 出现的概率，则对任意的 ε，有

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n}-p\right|<\varepsilon\right)=1。$$

伯努利将只有两个可能结果的试验称之为独立重复试验，迄今，许多的有关概率论的著作将独立重复试验概型称为伯努利概型。

2.2. 初等概率时期

十八世纪，在棣莫弗、浦丰、贝叶斯、泊松等著名数学家们的共同努力下，概率论得到了较大的发展。随着分析学的发展，数学家开始尝试运用分析的方法来研究随机事件的概率，产生了随机变量的概念。最早研究正态分布随机变量的数学家棣莫弗，首次定义了独立事件的乘法定理，并将其他研究成果写入 1718 年发表的《机会的学说》一书中。1763 年，贝叶斯出版《论有关机遇问题》一书，给出了古典概率的早期定义、贝叶斯公式和贝叶斯假设(参考[6]和[7])，阐述了“执果循因”的问题，即“逆概率事件问题”，贝叶斯当时给出的定理假设条件不够完善，以至于一些学者并不认同。直到二十世纪以后，一些学者将其进行完善，使得贝叶斯方法在很多领域得到了广泛地应用，并形成了贝叶斯学派，使其成为数学研究中不可忽视的力量。1777 年出版的《或然性算术实验》一书中，蒲丰(Buffon)提出的一种计算圆周率 π 的方法——随机投针法，即著名的蒲丰投针问题，给出了几何概率的定义，推广了古典概率的范围，后人依据此实验，给出了广泛应用的近似计算方法——蒙特卡罗方法[4]。这一时期，数学家们得出了很多有关概率论的经典理论，解决一些随机问题的研究方法。

2.3. 分析概率时期

十八世纪被称为数学史上的“分析时代”，随着牛顿和莱布尼茨[6]所创立的微积分学的发展，数学家将其作为研究概率论的工具，其中典型代表就是数学家拉普拉斯，1801 年，拉普拉斯深入地推广了棣莫弗定理，并将其发展成为概率论历史上的第一个中心极限定理，即棣莫弗－拉普拉斯中心极限定理，该定理主要涉及二项分布，故后人将其称作“二项分布的正态近似”。此外，拉普拉斯还巧妙地运用微分和积分方程的理论，对概率论进行深入研究，于 1812 年，发表了《概率的分析理论》一书，介绍了十八世纪以来与概率论相关的理论概念，明确了古典概率的定义，由于本书在概率论发展过程中起着至关

重要作用，后人将拉普拉斯视为奠基概率论基础的第一人。

1832 年，泊松将大数定理推广为更一般情形，总结并证明了泊松大数定理：设 S_n 为 n 次试验中事件 A 出现的次数，而事件 A 在第 i 次试验中出现的概率为 $p_i, i=1,2,\cdots n$，则对任意的 ε，有

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n}-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p_i\right|<\varepsilon\right)=1。$$

显然，当 $p_i = p, i=1,2,\cdots n$ 时，该定理即为伯努利大数定理。进入十九世纪中叶，概率论的发展受到一些影响，一些学者认为概率论只不过是一个数学游戏，将其视为次等科学，以至于概率论在西欧的发展出现了停滞现象。同一时期，概率论的极限理论在俄国得到了很大的突破，1887 年，俄国著名数学家切比雪夫证明了切比雪夫不等式

$$P\left(\left|X-E\left(X\right)\right|<\varepsilon\right)\geq 1-\frac{D\left(X\right)}{\varepsilon^2}。$$

运用矩方法，切比雪夫推广了大数定理：设 $\{X_n\}$ 为一列两两不相关的随机变量序列，若每个 X_i 的方差存在，且有共同的上界，即 $Var\left(X_i\right)\leq c, i=1,2,\cdots,n$，则 $\{X_n\}$ 服从大数定理，即对任意的 $\varepsilon>0$，有

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E\left(X_i\right)\right|<\varepsilon\right)=1。$$

该定理被后人称为切比雪夫大数定理。著名数学家马尔科夫和李亚普诺夫深受切比雪夫的影响。作为切比雪夫最得意的学生，马尔科夫对随机变量序列进行深入的研究，给出了马尔科夫链的相关理论，给出了更一般条件下的中心极限定理，减弱了大数定律和中心极限定理的限制条件，这些研究成果极大地促进了概率论的发展。

2.4. 高等概率时期

经过两百多年的曲折发展，概率论学科产生了许多理论成果和著作，但仍没有成为一个严谨的数学理论系统。直到二十世纪，一些数学家开始注意到这个问题。伯恩斯坦和米泽斯是最早进行概率论公理化研究的数学家。1917 年伯恩斯坦在《哈尔科夫数学学会通讯》(Proceedings of the Kharkov Mathematical Association)发表了其关于概率论公理化的第一篇论文“试析概率论公理化基础”(An essay on the axiomatic foundations of probability theory)，在概率论发展史上首次提出以公理作为概率论的理论前提。随后几年，他致力于概率论逻辑基础研究，于 1927 年出版了《概率论》，被后人作为学习的教材和参考书[5]，构建了第一个概率论的公理化体系。米泽斯的主要工作是概率的频率定义和统计定义的公理化理论。自勒到人们的重视。诸多学者在应用概率方向上开展系统的研究贝格测度理论创立以来，数学家柯尔莫哥洛夫运用该理论研究概率论的相关问题，于 1933 年发表了《概率论基础》一书，给出了概率论的公理化定义[3]，沿用至今，该书被称为概率论发展史上的一个里程碑。

1955 年，数学家首次提出了“应用概率”的概念，使得概率在社会科学的量化更加精确，越来越受工作，如排队论、马尔科夫决策规划、对策论、信息论等都属于应用概率论的范畴。除此之外，学者还对应用概率和生物统计、药学统计、气象统计等学科进行交叉问题研究。通过对概率论发展简史的阐述，可以培养学生的全面发展和思想品质的培养，推动学生形成正确的人生观、价值观和世界观。在教学过程中构建《概率论》专业课程教学中的育人模式[8]。

3. 概率在医疗行业中的简单应用

为更好阐述概率论在医疗领域中的重要作用，以 2019 年底爆发的全球新冠疫情为背景，运用概率论

的思想和理论来分析医疗领域中的相关问题。

3.1. 贝叶斯公式在新冠肺炎核酸检测问题分析中的应用

在新冠疫情期间，全国各个地市会定期对居民进行核酸检测，其中进行混采时难免会有人被误诊为阳性，而他则需要再做一次单采核酸检测，方可知道是否真正感染病毒。因此，这类现象可以通过数学工具转化为相关的概率问题，即已知“结果”，求“原因”，这类问题恰是概率论中的贝叶斯公式可以解决的。下面通过案例 1 来进行贝叶斯公式在这类问题中的应用。

案例 1 已知在新冠肺炎核酸检测中，新冠患者被检查出阳的概率为 95%。医学研究表明，核酸检测结果也存在 2%的概率误将非新冠患者检查出呈阳性(俗称“假阳性”)。若某一特殊群体患新冠肺炎的概率为 0.05%，求

(1) 其中在某个人的新冠病毒核酸检测结果为阳性的条件下，他确实患病的概率(确诊率)是多少？

(2) 如果“假阳性”的概率降为 0.2%，0.02%和 0%时，确诊率如何变化？

(3) 重复检测能否提高确诊率？

分析：(1) 记 A 表示“核酸检测结果为阳性”，B 表示“检查者患新冠肺炎”，由已知条件可知

$$P(B)=0.0005，P(\bar{B})=0.9995，P(A|B)=0.95，P(A|\bar{B})=0.02$$

由贝叶斯公式得

$$P(B|A)=\frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B)+P(A|\bar{B})P(\bar{B})}=\frac{0.95\times 0.0005}{0.95\times 0.0005+0.02\times 0.9995}\approx 0.0232$$

由此可知，一次检测结果为阳性的条件下，检查者确实患病的概率为 2.32%。

(2) 其他条件不变，仅把“假阳性”的概率 $P(A|\bar{B})$ 分别改为 0.2%，0.02%和 0%，类似于(1)的方法，可以计算出确诊率为 19.2%，70.4%，100%。由此可知，如果我们可以将“假阳性”的概率尽可能地降低，就可以在很大程度上提高确诊率。

(3) 在(1)中得到即使核酸检测结果是阳性，实际患病率仅为 2.32%。针对此种情形，通常会进行多次独立重复的复查。记 A_i 为事件“第 i 次核酸检测结果为阳性”，$i=1,2,\cdots,n$。由贝叶斯公式得

$$\begin{aligned}P(B|A_1A_2)&=\frac{P(A_1A_2|B)P(B)}{P(A_1A_2|B)P(B)+P(A_1A_2|\bar{B})P(\bar{B})}\\&=\frac{P(A_1|B)P(A_2|B)P(B)}{P(A_1|B)P(A_2|B)P(B)+P(A_1|\bar{B})P(A_2|\bar{B})P(\bar{B})}\\&=\frac{0.95^2\times 0.0005}{0.95^2\times 0.0005+0.02^2\times 0.9995}\approx 0.5302\end{aligned}$$

即，若检测者在两次核酸检测的结果都是阳性，则患有新冠的可能性为 53.02%，若第三次的核酸检测结果仍为阳性，此时患有新冠的概率约为 98.17%，说明该检测者患有新冠的可能性非常大了。但也要配合其他项目的检查，才能做出最终的判断。

为遏制传染性病毒的传播，人们研究出了疫苗和治疗药物。但是疫苗和治疗药物真正被广泛普及使用，需要经过大量的试验，运用相关概率论知识处理这些试验中得到的大量数据，进而评估疫苗和治疗药物的有效性是很有必要的。下面通过案例 2 来说明概率论相关理论是如何评估新冠疫苗是否有效。

3.2. 中心极限定理在新冠肺炎 mRNA 疫苗有效性问题分析中的应用

案例 2 2020 年 6 月 19 日，中国首个新冠 mRNA 疫苗获批启动临床试验。假设新冠患者自然痊愈率为 0.3，医院检查员任意抽查 100 名注射某种疫苗的患者。根据相关部门规定，治愈患者数若超过 75 人，则判定疫苗是有效的；否则，判定疫苗无效。试求：

(1) 疫苗治愈率为 0.8，但被判定无效的概率是多少？

(2) 疫苗无效但被判定有效的概率是多少？

分析：记 X 为事件“治愈患者数”，由题意得，如果疫苗有效，则

$$P_{有}\left(X=k\right)=C_{100}^{k}\cdot 0.8^{k}0.2^{100-k}，\ k=0,1,2,\cdots,100$$

如果疫苗无效，则有

$$P_{无}\left(X=k\right)=C_{100}^{k}\cdot 0.3^{k}0.7^{100-k}，\ k=0,1,2,\cdots,100$$

(1) 当疫苗治愈率为 0.8 时，由题意可知，治愈患者数不超过 75 人，会被判定为无效。由中心极限定理得无效的概率为

$$P_{无效}=P_{有}\left(X\le 75\right)=P_{有}\left(\frac{X-80}{\sqrt{16}}\le\frac{75-80}{\sqrt{16}}\right)=\varnothing\left(-1.25\right)=1-\varnothing\left(1.25\right)=1-0.8944=0.1056$$

(2) 若疫苗无效，此时的治愈率为自然治愈率 0.3，由题意可知，实际治愈患者人数超过 75 人，被判定为有效，由中心极限定理得有效的概率为

$$P_{有效}=P_{无}\left(X\ge 76\right)=1-P_{无}\left(X\le 75\right)=1-P_{无}\left(\frac{X-30}{\sqrt{21}}\le\frac{75-30}{\sqrt{21}}\right)=1-\varnothing\left(9.82\right)\approx 0$$

由以上分析可知，概率论在医疗领域中有着一定的理论应用价值，概率论在遗传病、血液化验、金融经济等问题中，也都有着类似的应用。

4. 结束语

本文从赌金分配问题追溯概率论的起源，简单介绍概率的四个发展时期，最后用贝叶斯公式和中心极限定理分别阐释了新冠肺炎核酸检测和新冠 mRNA 疫苗有效性问题方面的应用。另外可以运用数学期望、泊松定理、古典概型分析金融投资领域中的一些投资问题，中心极限定理、均匀分布的期望分析生产管理中的一些生活问题。通过以上分析可知，概率论的很多概念和基本理论都有着重要的实际应用价值。

基金项目

河南省本科高校研究性教学改革研究与实践项目(2022SYJXLX033)，河南理工大学青年骨干教师资助计划项目(2020XQG-03)，河南理工大学研究生课程思政示范课项目(2024YSZ01)和河南理工大学教育教学改革研究与实践项目元培名师专项。

参考文献

[1] 徐洪香. 概率论的缘起、发展及其应用[J]. 辽宁工学院学报, 2001(3): 62-63.

[2] 鲍丽娟, 潘兴侠, 郑远广. 我国概率论与数理统计教学改革研究述评[J]. 教育进展, 2023, 13(1): 306-315.

[3] 孙业强, 王娜. 概率论的发展简史及其在生活中的若干应用[J]. 吉林工程技术师范学院学报, 2019, 35(12): 89-92.

[4] 赖景耀. 概率论的起源和发展[J]. 西北师范大学学报(自然科学版), 1984(3): 10-16.

[5] 胡晓飞. 赌博产生的数学——概率论的起源和发展[J]. 科技风, 2013, 228(18): 189.

[6] 杨静. 概率论思想的历史演变[D]: [硕士学位论文]. 石家庄: 河北师范大学, 2003.

[7] Sheynin, O. (1994) Bertrand's Work on Probability. *Archive for History of Exact Sciences*.

[8] 张慧, 朱庆峰, 杨广芬, 等. 《概率论与数理统计》课程思政案例设计及应用[J]. 高等数学研究, 2021, 24(4): 117-120.