Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2024, 13(4), 1690-1695
Published Online April 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2024.134160

Hans汉斯

信号系统中冲击函数另一种图形化表示的研究

凌洪涛

安徽国际商务职业学院信息工程学院，安徽 合肥

收稿日期：2024年3月27日；录用日期：2024年4月23日；发布日期：2024年4月30日

摘 要

冲击函数又叫冲击信号，是信号系统和通信原理中常用的理想采样信号，最初是用来描述某些物理现象需要用一个超级短的时间，单取值极大现象的一种函数。单位冲击函数的图像就是一个冲击脉冲，但是如果单位冲击函数乘以一个常数以后，这样的冲击函数的图形仍然是一个冲击脉冲，而两个冲击脉冲无法在图形上区分冲击的大小，两者在图像的表示上一模一样。本文通过对冲激函数进行变量代换，然后再进行极坐标变换，最后在极坐标下，对冲击函数进行图形化表示，从而实现在图形上区别不同大小的冲击函数。进而提出将除以0看成一种广义变换，该变换的结果就是冲击函数这一猜想，并验证这一猜想。

关键词

冲激函数，信号系统，通信原理

Research on Another Graphical Representation of Impulse Functions in Signal Systems

Hongtao Ling

Information Engineering College of Anhui Institute of International Business, Hefei Anhui

Received: Mar. 27th, 2024; accepted: Apr. 23rd, 2024; published: Apr. 30th, 2024

Abstract

The impact function, also called the impact signal, is an ideal sampling signal commonly used in signal systems and communication principles. It was originally used to describe certain physical phenomena that require a super short time and a single maximum value. The graph of the unit shock function is a shock pulse, but if the unit shock function is multiplied by a constant, the graph of such a shock function is still a shock pulse, and the two shock pulses cannot graphically distinguish the size of the

文章引用: 凌洪涛. 信号系统中冲击函数另一种图形化表示的研究[J]. 应用数学进展, 2024, 13(4): 1690-1695.
DOI: 10.12677/aam.2024.134160

shock. The representation of the images is exactly the same. This paper realizes graphically distinguishing impact functions of different sizes by substituting variables for the impulse function, then performing polar coordinate transformation, and finally graphically representing the impulse function in polar coordinates. Then the conjecture that dividing by 0 is regarded as a generalized transformation, and the result of the transformation is the impact function is proposed, and this conjecture is verified.

Keywords

Impulse Function, Signal System, Communication Principles

1. 引言

在信号处理和通信原理中，单位冲击函数(通常表示为 $\delta(t)$)扮演着至关重要的角色([1], p. 16)。它描述了一个理想化的物理现象，即在超级短的时间内发生且幅度极大的信号。其在整个时间轴上的积分等于1，无论是国内郑君里的教材还是美国奥本海姆的教材都只讨论了单位冲击函数的情况[2]。然而，当单位冲击函数乘以一个常数时，虽然冲击的“强度”发生变化，但其图形表征仍然是一个冲击脉冲，这就带来了一个问题：在传统的直角坐标系下，我们无法从图形上区分不同大小的冲击函数。为了解决这一问题，本文提出了一种新的方法来可视化冲击函数的大小。通过进行变量代换，然后实施极坐标变换，我们可以在极坐标系下绘制出冲击函数的图像。在这种方法中，不同的冲击强度可以表现为不同的曲线形状，从而允许我们在图形上直观地区分它们。这种图形化表示不仅有助于理解冲击函数的性质，还可能对信号处理的教学和研究提供帮助。此外，文章提出了一个大胆的猜想，即将“除以 0”视为一种广义变换，其结果可以定义为冲击函数。并且文章中给出了相应的说明演示归纳和推导。

2. 冲激函数与图形化表示

冲击函数可以用很多不同的函数形式来定义，其中最常用的是矩形脉冲的形式，所谓矩形脉冲形式是分析矩形脉冲演变成冲激函数过程得到的。具体表现形式如公式(1-1)表示([1], p. 16)

$$\delta(t)=\lim_{\tau\to 0}\frac{1}{\tau}\left[u\left(t+\frac{\tau}{2}\right)-u\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\right] \tag{1-1}$$

公式(1-1)表示在 $t = 0$ 处产生一个广义积分为 1 的冲击。图 1 中的红色表示冲击，

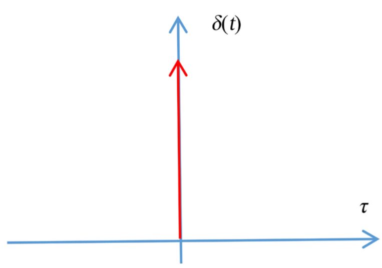

Figure 1. The rectangular coordinate representation of the unit impulse function
图 1. 单位冲击函数的直角坐标表示

如果冲击函数的广义积分是常数 k，就会在红色的冲击旁边标注一个 k 来表示冲击函数的广义积分的大小。但是这样的表示对广义积分结果大小的体现不够形象化，因此本文致力于探索出一种更加形象化的冲击函数图形化表示，争取可以用图形形象的区别冲击函数广义积分结果的大小。

此外冲击函数还有其他的演变形式，比如三角形脉冲，双边指数脉冲，钟形脉冲等，但是最终的图形化表现形式都是图 1 的形式。

3. 冲击函数变形导致的图形化冲突

根据公式(1-1)画出的图 1 我们可以知道，如果单位冲击函数乘以一个常数 k 的话，这个冲击函数的图形表示跟图 1 是一样的。唯一的不同是在冲击信号旁边标志一个常数，用来表示乘以常数 k 以后该冲击函数广义积分的结果。如图 2 所示。

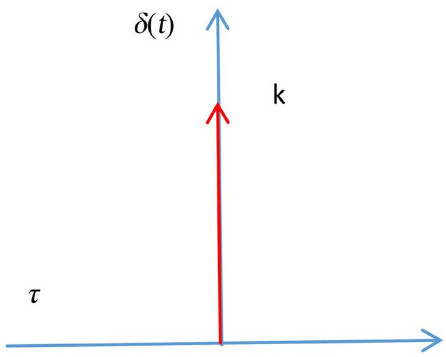

Figure 2. The rectangular coordinate representation of the general impulse function.
图 2. 一般冲击函数的直角坐标表示

通过观察图 1 和图 2 的区别可以发现，除了在冲击信号旁边标记一个常数 k 用来区别该冲击信号的广义积分结果与单位冲击信号的不同，没有办法直接通过图形本身来区分两个冲击信号广义积分结果的区别。因此，本文通过对冲击函数的公式做变换和推导，寻找出一种新的冲击函数的图形化表示方法，这种新的图形化表示方法可以直观的看出不同的广义积分结果的冲击函数的区别。

4. 解决冲击函数图形化表示的数学推导

我们首先回到公式(1-1)

$$\delta(t)=\lim_{\tau\to 0}\frac{1}{\tau}\left[u\left(t+\frac{\tau}{2}\right)-u\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\right] \tag{1-1}$$

公式(1-2)是郑君里的信号系统中关于冲击函数性质应用的一个推导过程。从这个推导的过程中可以发现，变量 t 只是影响冲击函数的位置，通过对变量 t 的影响，可以控制用冲击函数采样函数 $f(t)$某个位置的值。

既然变量 t 只是影响冲击函数的位置，那么可以把 t 看成一个常数。然后变量 τ 是影响冲击函数形成的变量，为了表示方便和变换方便，我们用变量 x 替换变量 τ 就可以得到如公式(1-3)所示的公式。

$$\delta(t)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left[u\left(t+\frac{x}{2}\right)-u\left(t-\frac{x}{2}\right)\right] \tag{1-3}$$

公式(1-3)的变化只是为了将冲击函数表示成我们习惯的直角坐标系的样子是为了后续的变换，本身没有意义，并没有改变冲击函数本身的意义。

下一步，我们将公式(1-3)中的 x 替换成极坐标的形式，也就是用 $x = r\cos\theta$ 来替换从而得到公式(1-4) [3]

$$\delta(t) = \lim_{r\to 0}\frac{1}{r\cos\theta}\left[u\left(t+\frac{r\cos\theta}{2}\right)-u\left(t-\frac{r\cos\theta}{2}\right)\right] \tag{1-4}$$

现在我们得到了冲击函数的极坐标形式，那么下面我们可以通过极坐标形式对冲击函数的图形化做另一个表示。

5. 冲击函数另一种图形化表示

从现在开始我们需要给冲击函数重新画图，但是画出的是极坐标上的图。根据公式(1-4)在 0 到 2π 的每个方向上都有一个冲击那么画出来的图应该布满整个坐标系？但是这是不可能的，因为这样的话极坐标下的广义积分结果与直角坐标下的广义积分不一致。

冲击函数在直角坐标下的广义积分如公式(1-5)所示，其结果等于 1 ([1], p. 19)。

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt = 1 \text{ 且 } \delta(t) = 0 \tag{1-5}$$

另外根据公式(1-6)的描述，在二重积分中一个函数在直角坐标系的积分结果和在极坐标下的积分结果是等价的，这个结论也可以推广到冲击函数这样的广义积分中，也就是说冲击函数在直角坐标系中的积分结果和极坐标系下的积分结果是相等的([1], p. 19)。

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta \tag{1-6}$$

公式(1-6)中的 ρ 和公式(1-4)中的 r 是一个意思，其实公式(1-6)也可以写成下面这个样子

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_D f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdrd\theta$$

那么根据公式(1-5)的结果可知，冲击函数的积分结果是 1，那么综合公式(1-5)和(1-6)的结果可知，冲击函数在极坐标的积分结果也应该是 1，而根据公式(1-4)可知，冲击函数在极坐标上的从 0 到 2π 的每个方向上都有一个冲击。那么可以推测出冲击函数在极坐标上应该是一个圆，面积等于冲击函数广义积分的结果。

因此单位冲击函数的极坐标图形可以画成图 3 的样子。图 3 中的圆心点是冲击函数的起点位置，是由 t 决定的，横坐标是 t，极坐标没有标记出来，假设其半径为 r，那么圆的面积就是积分结果，因此 $\pi r^2 = 1$，从而得到圆的半径 r 的值为 $\frac{\sqrt{\pi}}{\pi}$。而广义积分结果为 k 的冲击函数的圆面积应该是 $\pi r^2 = k$，从而得到该冲击函数的半径为 $\frac{\sqrt{k\pi}}{\pi}$，可以大致表示为图 4。显然图 4 中的圆形可以画的大一点，从而直观的区分冲击函数的大小，但是精确的表示仍然需要标记广义积分的大小。

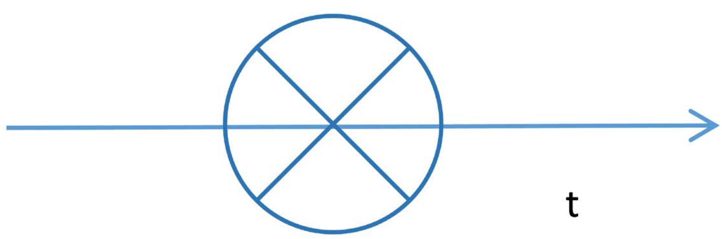

Figure 3. The polar coordinate representation of the unit impulse function
图 3. 单位冲击函数的极坐标表示

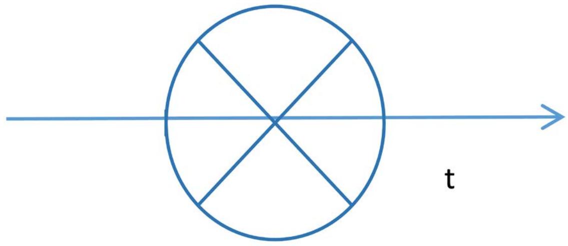

Figure 4. The polar coordinate representation of the general impulse function
图 4. 一般冲击函数的极坐标表示

6. 猜想与应用

在探索冲击函数的另一种图形化表示的过程中，可以得到一些启示。其中第一个启示是，根据冲击函数的定义公式(1-1)，冲击函数的极限情况有点像是一个面积为 1 的矩形被挤压成一条无限长的直线，只是在直角坐标下，无论是面积为 1 的矩形还是面积为 k 的矩形挤压成的直线都是无限长的。如果不积分从直观上是无法区别这两个无限长的直线的区别的。

但是冲击函数在极坐标下的图形表示，可以理解为这个无限成的直线被压成了一个圆，这个圆的面积等于这个无限长的直线的广义积分。

而无论是单位冲击函数的直角坐标公式(1-1)，还是极坐标公式(1-4)，其极限情况下的数学表达都可以看成是 $\frac{1}{0}$。这个时候我们可以做一个猜想用冲击函数去表示一个数除以 0 的结果？

在以往的数学常识中，任何数处于 0 都被认为是没有意义的，因为 1 除以 0 的结果和任意整数 k 除以 0 的结果无法进行大小比较，甚至无法去表示。但是引入了冲击函数以后。我们可以把 1 除以 0 的结果表示成单位冲击函数，即。

$$\frac{1}{0} \Rightarrow \delta(t) \tag{1-7}$$

从而推广到

$$\frac{\mathrm{k}}{0} \Rightarrow k\delta(t) \tag{1-8}$$

注意没有用等于号，而是用推出符号。这其实是说明任何一个自然数当其要除以 0 的时候，其实已经不再是常规的算术运算，而是变成了一种变换，这个变换可以表示成

$$zT(k) \Rightarrow k\delta(t) \tag{1-10}$$

公式(1-10)中的这个 z 表示 zero 也就是 0 的意思，T 表示 transform 也就是变换的意思，合在一起就是零变换，该变换的自变量是自然数，因变量是对应的广义积分为 k 的冲击函数。这相当于任何一个数，其做了零变换也就是除以 0，其积分的结果是守恒的，但是积分的形态发生了变换，可以想要成一个质量为 K 矩形铁块被挤压成一个无限长的铁丝，其质量仍然是 k，再把这个铁丝压缩成一个圆形的铁饼，其质量仍然是 k，表现在纯数学上就是积分始终为 k，我们可以把这个现象叫做积分守恒。

下面解决一个棘手的问题，一直以来表述任何数除以 0 没有意义的证明是说 $\frac{1}{0}-\frac{1}{0}=\frac{0}{0}=1$ 是相互矛盾的，所以任何数除以 0 都是没有意义的。这在算术层面是没有问题的。但是当我们把除以 0 看成是零变换就不存在矛盾了，根据零变换的定义公式，$\frac{0}{0} \Rightarrow zT(0) \Rightarrow 0\delta(t)$ 是不矛盾的，这里把分子的 0 仍然

看成是一个数，把除以 0 看成是 0 变换，可以理解为，对 0 这个自然数做 0 变换，得到的结果根据积分守恒是一个广义积分为 0 的冲击函数。也就是说我们不能把 0 除以 0 当成是一个数自己除以自己，这样会陷入到算术运算的惯性思维中。

解决了 0 除以 0 的矛盾问题，那么零变换是复合结合律和分配律的。比如

$$\frac{x+y}{0} \Rightarrow (x+y)\delta(t) \Rightarrow x\delta(t)+y\delta(t) \Rightarrow \frac{x}{0}+\frac{y}{0}$$

同样的乘除也是可以满足的

$$\frac{x/y}{0} \Rightarrow \frac{x}{y}\delta(t) \Rightarrow \frac{x\delta(t)}{y\delta(t)} \Rightarrow \frac{x/0}{y/0}$$

特别情况下，即使 y 为 0 也是成立的，因为 $y=0$ 的时候可以得到

$$\frac{x/0}{0} \Rightarrow \frac{x\delta(t)}{0} \Rightarrow x\delta(t)\delta(t)$$

而由于单个单位冲击函数的广义积分为 1，两个单位冲击函数相乘的广义积分仍然为了，所以上面公式的广义积分结果也是 1。

推导过程根据积分的性质[4]：

$$\int f(x)g(x)dx = \int f(x)dx\int g(x)dx \Rightarrow \int \delta(t)\delta(t)dt = \int \delta(t)dt\int \delta(t)dt = 1$$

也就是说一个自然数不论做多少次零变换，不改变其积分的结果，这也说明零变换是不影响积分守恒的，就像是一个铁丝，无论拉的多细，其质量保持不变，变的直是形态本身。

因此将处于 0 看成一种广义的函数变换是没有问题的。这不仅证明了，除以 0 没有数学意义，也说明了除以 0 可以存在其他意义。

7. 总结

本文为了解决两个广义积分不相等的冲击函数的冲击脉冲无法在图形上区分冲击的大小，两者在图像的表示上一模一样的问题，通过对冲激函数进行变量代换，然后再进行极坐标变换，最后在极坐标下，对冲击函数进行图形化表示，从而实现在图形上区别不同大小的冲击函数。进而引申出利用冲击函数的结果来表示除以 0 带来一些变换的相关猜想，并且验证了该猜想存在一定的可行性，最终给出将除以 0 看成一种变换，这种变换会产生冲击，输入变换的数越大，产生的冲击的广义积分也就越大，在物理意义上显示为冲击脉冲的能量越强。

基金项目

教育厅自然科学研究项目：微电网分布式优化控制策略研究(项目编号：2020XJZR02)。

校级课程思政示范课程：大数据可视化分析(项目编号：2022kcsf13)。

参考文献

[1] 郑君里，等，著．信号与系统(上册) [M]．第 5 版．北京：高等教育出版社, 2000: 16.

[2] 奥本海姆，维尔斯基，著．信号与系统[M]．第二版．刘树棠，译．西安：西安交通大学出版社, 1998: 69.

[3] 同济大学数学系，编．高等数学(上册) [M]．第七版．北京：高等教育出版社, 2014: 278.

[4] 同济大学数学系，编.高等数学(下册) [M]．第七版．北京：高等教育出版社, 2014: 148.