Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2024, 13(4), 1723-1737**
Published Online April 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2024.134163

Hans汉斯

具有共同冲击和错误定价的最优再保险与投资策略

孔于榕，马世霞*，张雨浓

河北工业大学理学院，天津

收稿日期：2024年3月28日；录用日期：2024年4月23日；发布日期：2024年4月30日

摘 要

本文考虑了在错误定价模型下具有有限记忆和共同冲击的保险公司的最优再保险和投资策略问题。假设保险公司使用具有共同冲击依赖性的二维泊松过程来描述盈余过程，允许保险公司购买比例再保险且在金融市场进行投资来分散其风险。金融市场由无风险资产，市场指数和一对错误定价的股票组成。然后，在考虑与业绩相关的资本流入/流出的情况下，采用随机时滞微分方程来描述保险公司的财富过程。保险公司的目标是最大化终端财富和平均绩效财富组合的均值－方差效用，应用博弈论框架内的带时滞的随机控制理论，得到了最优再保险和投资策略的解析表达式。最后，通过数值例子对模型参数进行了敏感性分析。

关键词

错误定价，共同冲击，随机时滞微分方程，再保险和投资策略，均值－方差准则

Optimal Reinsurance and Investment Strategies with Common Shocks and Mispricing

Yurong Kong, Shixia Ma*, Yunong Zhang

School of Science, Hebei University of Technology, Tianjin

Received: Mar. 28th, 2024; accepted: Apr. 23rd, 2024; published: Apr. 30th, 2024

Abstract

This paper considers the problem of optimal reinsurance and investment strategies for insurance

*通讯作者。

文章引用: 孔于榕，马世霞，张雨浓. 具有共同冲击和错误定价的最优再保险与投资策略[J]. 应用数学进展，2024, 13(4): 1723-1737. DOI: 10.12677/aam.2024.134163

companies with limited memory and common shocks under the mispricing model. Assume that insurers use a two-dimensional Poisson process with common shock dependence to describe the surplus process, allowing insurers to purchase proportional reinsurance and invest in financial markets to diversify their risk. Financial markets are made up of risk-free assets, market indices and a pair of mispriced stocks. Then, taking into account performance-related capital inflows/outflows, stochastic delay differential equations are used to describe the wealth process of insurance companies. The objective of insurance company is to maximize the mean-variance utility of the combination of terminal wealth and average performance wealth. The analytical expressions of optimal reinsurance and investment strategies are obtained by using stochastic control theory with time delay within the framework of game theory. Finally, a numerical example is given to analyze the sensitivity of the model parameters.

Keywords

Mispricing, Common Shock, Stochastic Delay Differential Equation, Reinsurance and Investment Strategies, Mean-Variance Criteria

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/

Open Access

1. 引言

保险市场对经济社会稳定发展的重要性日益凸显。作为保险市场的主要参与者，保险公司业务的稳定性至关重要。投资与再保险是保险公司规避风险、获取利润、实现稳定经营的两个重要措施。近年来，关于随机控制理论在最优投资与再保险的问题上引起人们的广泛关注。一方面保险公司需要购买再保险分散其承保风险以减小其破产概率；另一方面，保险公司需要将其盈余投资于金融市场来赚取收益，故优化保险公司的再保险和投资策略是保险人必须关注的问题。

学者们从不同的目标角度研究了保险公司的最优再保险与投资问题，如 Liang 等[1]考虑了以破产概率最小化为目标的最优投资–再保险问题；Guan 和 Liang [2]研究了以终端财富预期效用最大化为目标的最优问题；Wang 等[3]研究了均值方差准则下的最优再保险和投资问题。除了不同的决策目标外，许多学者还从其他几个方面研究了最优投资–再保险策略。首先，模型不确定性在金融和保险领域广泛存在，因此，一些学者研究了模糊性对最优投资–再保险的影响，如 Chen 和 Yang [4]考虑了对于模糊厌恶保险人的稳健最优投资再保险策略问题；Wang 和 Zhang 等[5]研究了模型不确定下的两家竞争保险公司之间的一类鲁棒非零和随机微分博弈的再保险和投资问题。其次，由于并非绝对成熟的市场存在交易摩擦，保险公司可以通过错误定价获利，即利用一对股票之间的价格差异获利，一些学者对该现象进行了研究，如 Gu 等[6]研究了具有均值回归和错误定价的保险公司的最优稳健再保险投资策略；Wang 和 Deng 等[7]研究了均值–方差准则下定价错误的保险公司最优再保险投资策略。再次，由于过去的信息总是或多或少地影响着保险人或投资者的决策。例如，在投资股票时，投资者不仅关注当前的股票价格，还关注过去一段时间的股票价格趋势。在模型中考虑过去的信息有助于我们做出更合理的决策。A 和 Li [8]以及 Zhang 和 Chen [9]研究了带有延迟的最优超额损失投资再保险策略。此外，在现实中，一些保险业务之间通常是相互依赖的，例如，交通事故可能会造成财产损失、医疗索赔以及死亡索赔，这些再保险业务之间通常是相互依赖的，因此考虑相依风险是十分必要的，如 Bi 和 Liang 等[10]研究了均值方差准则下两类相依保险业务间的最优问题。

受上述参考文献的启发，本文考虑了在错误定价模型下具有有限记忆和共同冲击的保险公司的最优再保险和投资策略问题。与现有文献相比较，本文的创新点如下：(i) 将错误定价模型和相依风险模型结合起来，并且考虑过去财富的影响来研究最优投资再保险问题；(ii) 在均值方差准则下获得了最优投资再保险策略。

2. 模型的建立

2.1. 余额过程

假设保险公司的余额过程遵循下述 C-L 模型：

$$dR(t)=c_0dt-d\sum_{i=1}^{N_1(t)+N(t)}X_i-d\sum_{i=1}^{N_2(t)+N(t)}Y_i \tag{1}$$

其中，$c_0>0$ 为保费率，保费率 $c>0$ 是一个正的常数，根据期望值原则来计算 $c_0=(\lambda+\lambda_1)\mu_1(1+\eta_1)+(\lambda+\lambda_2)\mu_2(1+\eta_2)$，其中 $\eta_1>0$，$\eta_2>0$ 是保险公司的安全负荷；随机变量 X_i 代表第一类索赔发生时第 i 次索赔的大小，$\{X_i,i\ge1\}$ 假定是独立同分布的随机变量序列且有相同的分布函数 $F_X(\cdot)$，有限一阶矩 $E(X_i)=\mu_1>0$，二阶矩 $E(X_i^2)=\nu_1$；随机变量 Y_i 代表第二类索赔发生时第 i 次索赔的大小，$\{Y_i,i\ge1\}$ 假定是独立同分布的随机变量序列且有相同的分布函数 $F_Y(\cdot)$，有限一阶矩 $E(Y_i)=\mu_2>0$，二阶矩 $E(Y_i^2)=\nu_2$；$\{N_1(t),t\ge0\}$，$\{N_2(t),t\ge0\}$，$\{N(t),t\ge0\}$ 是三个相互独立的泊松过程，其强度分别为 λ_1、λ_2、λ。$\{X_i,i\ge1\}$，$\{Y_i,i\ge1\}$，$\{N_1(t),t\ge0\}$，$\{N_2(t),t\ge0\}$，$\{N(t),t\ge0\}$ 是相互独立的。

为了计算方便，记

$$a_1=(\lambda+\lambda_1)\mu_1,\ b_1^2=(\lambda+\lambda_1)\nu_1$$

$$a_2=(\lambda+\lambda_2)\mu_2,\ b_2^2=(\lambda+\lambda_2)\nu_2$$

保险公司通过购买比例再保险来分散风险，$0<q_i(t)<1$ 为时刻 t 时保险公司对第 i 类索赔的自留水平，其中 $i=1,2$。加入再保险策略 $q_i(t)$ 后，我们采用了期望值保费原则来计算再保险保费，即

$$\begin{aligned}c_1&=(1-q_1(t))(1+\theta_1)(\lambda+\lambda_1)\mu_1+(1-q_2(t))(1+\theta_2)(\lambda+\lambda_2)\mu_2\\&=(1-q_1(t))(1+\theta_1)a_1+(1-q_2(t))(1+\theta_2)a_2\end{aligned} \tag{2}$$

其中，$\theta_1>\eta_1$，$\theta_2>\eta_2$。

那么加入再保险后保险公司的余额过程 $X^q(t)$ 可表示为：

$$\begin{aligned}dX^q(t)&=[c_0-c_1]dt-q_1(t)d\sum_{i=1}^{N_1(t)+N(t)}X_i-q_2(t)d\sum_{i=1}^{N_2(t)+N(t)}Y_i\\&=\left[(1+\theta_1)q_1(t)a_1+\xi_1a_1+(1+\theta_2)q_2(t)a_2+\xi_2a_2\right]dt\\&\quad-q_1(t)d\sum_{i=1}^{N_1(t)+N(t)}X_i-q_2(t)d\sum_{i=1}^{N_2(t)+N(t)}Y_i\end{aligned} \tag{3}$$

其中，$\xi_1=\eta_1-\theta_1$，$\xi_2=\eta_2-\theta_2$。

2.2. 金融市场

保险公司还可以利用自己的盈余在金融市场投资来增加财富。假设保险公司可投资于由储蓄账户，

市场指数以及由错误定价模型描述的风险资产组成的金融市场。

(1) 储蓄账户的价格过程为：

$$dS(t)=rS(t)dt \quad S(0)=s_0 \tag{4}$$

(2) 市场指数的价格过程为：

$$dP_m(\mathrm{t})=(r+\mu_m)dt+\sigma_m dW_m(\mathrm{t}) \tag{5}$$

其中，市场风险保费 μ_m 和市场波动系数 σ_m 都是正常数，$W_m(t)$ 是一个标准的布朗运动。

(3) 一对错误定价的股票的价格过程为：

$$\frac{dS_1(t)}{S_1(t)}=(r+\mu)dt+bdZ_1(t)-k_1L(t)dt+\sigma d\bar{W}(t) \tag{6}$$

$$\frac{dS_2(t)}{S_2(t)}=(r+\mu)dt+bdZ_2(t)+k_2L(t)dt+\sigma d\bar{W}(t) \tag{7}$$

(i) μ，b，k_1，k_2 都是正常数，$bdZ_i(t)$ 描述了金融市场中第 i 只股票的风险，其中 $i=1,2$。

(ii) $Z_1(t)$，$Z_2(t)$，$W_m(t)$，$\bar{W}(t)$ 是相互独立的。

(iii) $k_jL(t)$ 表示错误定价对第 j 只股票的影响，$j=1,2$。

$L(t)$ 是两只股票间的错误定价，定义为：

$$L(t)=\ln\frac{S_1(t)}{S_2(t)} \tag{8}$$

基于方程(1.6)和(1.7)，利用标准的伊藤公式，可以发现错误定价 $L(t)$ 的动态过程满足以下方程

$$\begin{aligned}dL(t)=&-(k\_1+k\_2)L(t)\\&+b\left[dZ\_1(t)-dZ\_2(t)\right]\end{aligned} \tag{9}$$

2.3. 带延迟的财富过程

由于有限记忆特征，保险公司所采取的再保险和投资策略受外生资本的影响，用 $Y(t)$ 和 $G(t)$ 表示保险公司在过去时段 $[t-h,t]$ 财富过程的综合延迟信息和点态延迟信息即

$$Y(t)=\int_{-h}^{0}e^{\beta s}X(t+s)ds \qquad G(t)=X(t-h) \tag{10}$$

其中，对于 $\forall t\in[0,T]$，正常数 β 为平均参数，h 为延迟参数，平均财富的初始值为 $Y(0)=\dfrac{x_0\left(1-e^{-\beta h}\right)}{\beta}$。用 $f\left(t,X(t)-Y(t),X(t)-G(t)\right)$ 表示保险公司的资本流入(出)量，其为平均绩效和绝对绩效的线性加权和，即：

$$\begin{aligned}&f\left(t,X(t)-Y(t),X(t)-G(t)\right)\\&=\alpha_1\left(X(t)-Y(t)\right)+\alpha_2\left(X(t)-G(t)\right)\end{aligned} \tag{11}$$

其中，α_1 和 α_2 均为正常数。

假设保险公司在 t 时刻投资于市场指数的资产为 $\pi_m(t)$，投资于第一只股票的资产为 $\pi_1(t)$，投资于第二只股票的资产为 $\pi_2(t)$，在考虑加入延迟后，保险公司在再保险和投资策略 $\Pi(t)=\left(q_1(t),q_2(t),\pi_m(t),\pi_1(t),\pi_2(t)\right)$ 下的财富过程为：

$$
\begin{aligned}
dX^{\pi}(t) &= dX^{q}(t)+\pi_m(t)\frac{dP_m(t)}{P_m(t)}+\pi_1(t)\frac{dS_1(t)}{S_1(t)}+\pi_2(t)\frac{dS_2(t)}{S_2(t)} \\
&+\left[X^{\pi}(t)-\pi_m(t)-\pi_1(t)-\pi_2(t)\right]\frac{dS(t)}{S(t)}-f\left(t,X(t)-Y(t),X(t)-G(t)\right) \\
&=\begin{bmatrix}(1+\theta_1)q_1(t)a_1+\xi_1a_1+(1+\theta_2)q_2(t)a_2+\xi_2a_2+aX(t)+\mu_m\pi_m+\mu(\pi_1+\pi_2)\\ -k_1\pi_1l+k_2\pi_2l+\alpha_1Y+\alpha_2G\end{bmatrix}dt \qquad (12) \\
&+\pi_m\sigma_m dW_m(t)+b\pi_1dZ_1(t)+b\pi_2dZ_2(t)+\sigma(\pi_1+\pi_2)d\bar{W}(t) \\
&-q_1(t)d\sum_{i=1}^{N_1(t)+N(t)}X_i-q_2(t)d\sum_{i=1}^{N_2(t)+N(t)}Y_i-\left[\alpha_1\left(X(t)-Y(t)\right)+\alpha_2\left(X(t)-G(t)\right)\right]
\end{aligned}
$$

其中 $a=r-\alpha_1-\alpha_2$，π_1、π_2、π_m 分别代表 $\pi_1(t)$、$\pi_2(t)$、$\pi_m(t)$。

定义 1 (可行策略)

一个投资－再保险策略 $\pi=\left(q_1(t),q_2(t),\pi_m(t),\pi_1(t),\pi_2(t)\right)_{t\in[0,T]}$ 被称为是可行的，如果满足以下条件：

(1) $\pi(t)$ 是 $\{F_t\}$ -逐步可测过程；

(2) $\forall t\in[0,T]$，$q_i(t)\in[0,1]$；

(3) $E\left(\int_o^T\|\pi(s)\|^2ds\right)<\infty$，其中 $\|\pi(t)\|^2=q_1^2(t)+q_2^2(t)+\pi_m^2(t)+\pi_1^2(t)+\pi_2^2(t)$；

(4) 对 $\forall(t,x,l,y)\in[0,T]\times R\times R\times[-1,+\infty)$，$\left(\pi,X^{\pi}(t)\right)$ 是随机微分方程(12)的唯一强解。

记所有可行策略的集合为 Π。在本文中，保险公司的目标是在均值－方差准则下寻找最优投资-再保险策略，即最大化 $J^{\pi}(t,x,l,y)$，其定义为：

$$
J^{\pi}(t,x,l,y)=E_{t,x,l,y}\left[X^{\pi}(T)+\alpha Y^{\pi}(T)\right]-\frac{\gamma}{2}Var_{t,x,l,y}\left[X^{\pi}(T)+\alpha Y^{\pi}(T)\right]
$$

其中 $(t,x,l,y)\in[0,T]\times R\times R\times[-1,+\infty)$，$\gamma>0$ 是风险厌恶系数。由于均值－方差准则下的最优问题是时间不一致的，因此为了解决这个问题，根据 *Björk* 等[11]，定义如下均衡策略：

定义 2 (均衡策略)

对 $\forall(t,x,l,y)\in[0,T]\times R\times R\times[-1,+\infty)$，考虑可行策略 π^*，选择任意一个固定的 $\hat{\pi}\in\Pi$，对任意可行策略 π 和 $\varepsilon>0$，定义一个新策略 π_ε

$$
\pi_\varepsilon(t,x,l,y)=\begin{cases}\hat{\pi}(t,x,l,y),t\le s\le t+\varepsilon\\ \pi^*(t,x,l,y),t+\varepsilon\le s\le T\end{cases}
$$

若 $\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}inf\dfrac{J\left(t,x,l,y,\pi^*\right)-J\left(t,x,\nu,s_1,z,\pi_\varepsilon\right)}{\varepsilon}\ge0$，对所有的 $\pi\in\Pi$，那么 π^* 被称为均衡策略，均衡值函数为 $J^{\pi^*}(t,x,l,y)$。

为了得到拓展的 HJB 方程，定义如下算子，对 $\forall(t,x,l,y)\in[0,T]\times R\times R\times[-1,+\infty)$，$\forall\phi(t,x,l,y)\in C^{1,2,2,1}\left([0,T]\times R\times R\times[-1,+\infty)\right)$，定义

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}^{\pi}\phi(t,x,l,y) &= \phi_t+\phi_x\begin{bmatrix}ax+\mu_m\pi_m+\mu(\pi_1+\pi_2)-k_1\pi_1l+k_2\pi_2l+\bar{\alpha}_1y+\alpha_2g\\ +(1+\theta_1)q_1(t)a_1+\xi_1a_1+(1+\theta_2)q_2(t)a_2+\xi_2a_2\end{bmatrix} \\
&-\phi_l(k_1+k_2)l+\phi_y\left(x-\beta y-e^{-\beta h}g\right) \\
&+\frac{1}{2}\phi_{xx}\left[\pi_m^2\sigma_m^2+b^2\left(\pi_1^2+\pi_2^2\right)+\sigma^2(\pi_1+\pi_2)^2\right]+\phi_{ll}b^2+\phi_{xl}b^2(\pi_1-\pi_2)
\end{aligned}
$$

$$+\lambda_1 E\left[\phi\left(t,x-q_1X_i,l,y\right)-\phi\left(t,x,l,y\right)\right]+\lambda_2 E\left[\phi\left(t,x-q_2Y_i,l,y\right)-\phi\left(t,x,l,y\right)\right]$$
$$+\lambda E\left[\phi\left(t,x-q_1X_i-q_2Y_i,l,y\right)-\phi\left(t,x,l,y\right)\right] \tag{13}$$

3. 最优投资与再保险问题

在本节中，给出最优问题，求解最优投资和再保险策略，验证定理及 *EHJB* 方程。根据动态规划原理，给出验证定理如下：

定理 1 (验证定理)

$\exists V(t,x,l,y)$ 和 $g(t,x,l,y)\in C^{1,2,2,1}\left([0,T]\times R\times R\times[-1,+\infty)\right)$，满足如下条件：

对于 $\forall(t,x,l,y)\in\left([0,T]\times R\times R\times[-1,+\infty)\right)$，

$$\sup_{\pi\in\Pi}\left\{\mathcal{L}^{\pi}V(t,x,l,y)-\frac{\gamma}{2}\mathcal{L}^{\pi}g^2(t,x,l,y)+\gamma g(t,x,l,y)\mathcal{L}^{\pi}g(t,x,l,y)\right\}=0 \tag{14}$$

$$\mathcal{L}^{\pi^*}g(t,x,l,y)=0,\qquad g(T,x,l,y)=x+\alpha y \tag{15}$$

$$V(T,x,l,y)=x+\alpha y \tag{16}$$

$$\pi^*:=\arg\sup_{\pi\in\Pi}\left\{\mathcal{L}^{\pi}V(t,x,l,y)-\frac{\gamma}{2}\mathcal{L}^{\pi}g^2(t,x,l,y)+\gamma g(t,x,l,y)\mathcal{L}^{\pi}g(t,x,l,y)\right\} \tag{17}$$

那么，最优均衡值函数 $J^{\pi^*}(t,x,l,y)=V(t,x,l,y)$，$E\left[X^{\pi^*}(T)\right]=g(t,x,l,y)$，$\pi^*$ 是最优投资与再保险策略。

由于该定理类似于 Kryger 和 Steffensen [12]，因而在此省略该定理的证明。

对于任一可行策略 $\pi^*=\left(q_1(t),q_2(t),\pi_m(t),\pi_1(t),\pi_2(t)\right)_{t\in[0,T]}$， *HJB* 方程满足：

$$\begin{aligned}
&\sup_{\pi\in\Pi}\left\{V_t+V_x\begin{bmatrix}ax+\mu_m\pi_m+\mu(\pi_1+\pi_2)-k_1\pi_1 l+k_2\pi_2 l+\bar{\alpha}_1 y+\bar{\alpha}_2 g+(1+\theta_1)q_1(t)a_1+\xi_1 a_1\\+(1+\theta_2)q_2(t)a_2+\xi_2 a_2\end{bmatrix}\right\}\\
&-V_l(k_1+k_2)l+V_y\left(x-\beta y-e^{-\beta h}g\right)+\frac{1}{2}\left(V_{xx}-\gamma g_x^2\right)\left[\sigma_m^2\pi_m^2+b^2\left(\pi_1^2+\pi_2^2\right)+\sigma^2(\pi_1+\pi_2)^2\right]\\
&+\left(V_{ll}-\gamma g_l^2\right)b^2+\left(V_{xl}-\gamma g_x g_l\right)b^2(\pi_1-\pi_2)\\
&+\lambda\left\{E\left[V(t,x-q_1X_i-q_2Y_i,l,y)-V(t,x,l,y)\right]-\frac{\gamma}{2}E\left(g^2(t,x-q_1X_i-q_2Y_i,l,y)\right)\right\}\\
&+\lambda\frac{\gamma}{2}E\left(g^2(t,x,l,y)\right)+\gamma gE\left[g(t,x-q_1X_i-q_2Y_i,l,y)-g(t,x,l,y)\right]\\
&+\lambda_1\left\{E\left[V(t,x-q_1X_i,l,y)-V(t,x,l,y)\right]-\frac{\gamma}{2}E\left[g^2(t,x-q_1X_i,l,y)-g^2(t,x,l,y)\right]\right\}\\
&+\lambda_1\left\{\gamma gE\left[g(t,x-q_1X_i,l,y)-g(t,x,l,y)\right]\right\}+\lambda_2\left\{E\left[V(t,x-q_2Y_i,l,y)-V(t,x,l,y)\right]\right\}\\
&-\lambda_2\left\{\frac{\gamma}{2}E\left[g^2(t,x-q_2Y_i,l,y)-g^2(t,x,l,y)\right]-\gamma gE\left[g(t,x-q_2Y_i,l,y)-g(t,x,l,y)\right]\right\}
\end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned}
&g_t+g_x\begin{bmatrix}ax+\mu_m\pi_m+\mu(\pi_1+\pi_2)-k_1\pi_1 l+k_2\pi_2 l+\bar{\alpha}_1 y+\bar{\alpha}_2 g+(1+\theta_1)q_1(t)a_1+\xi_1 a_1\\+(1+\theta_2)q_2(t)a_2+\xi_2 a_2\end{bmatrix}\\
&-g_l(k_1+k_2)l+g_y\left(x-\beta y-e^{-\beta h}g\right)+\frac{1}{2}g_{xx}\left[\sigma_m^2\pi_m^2+b^2\left(\pi_1^2+\pi_2^2\right)+\sigma^2(\pi_1+\pi_2)^2\right]\\
&+g_{ll}b^2+g_{xl}b^2(\pi_1-\pi_2)+\lambda_1 E\left[g(t,x-q_1X_i,l,y)-g(t,x,l,y)\right]\\
&+\lambda_2 E\left[g(t,x-q_2Y_i,l,y)-g(t,x,l,y)\right]+\lambda E\left[g(t,x-q_1X_i-q_2Y_i,l,y)-g(t,x,l,y)\right]=0
\end{aligned} \tag{19}$$

引理 1 根据第 2 部分给出的参数 λ，λ_1，λ_2，μ_1，μ_2，ν_1，ν_2，有

$$b_1^2 b_2^2 > \lambda^2 \mu_1^2 \mu_2^2 \qquad \frac{\lambda\mu_1\mu_2}{b_2^2}\frac{a_2}{a_1} < 1 < \frac{b_1^2}{\lambda\mu_1\mu_2}\frac{a_2}{a_1} \tag{20}$$

考虑到 $q_1(t) \ge 0$ 和 $q_2(t) \ge 0$，根据引理 1，我们将讨论下述三种情况：

(1) 如果 $\theta_1 < \frac{\lambda\mu_1\mu_2}{b_2^2}\frac{a_2}{a_1}\theta_2$，有 $n_1 < 0$，$n_2 \ge 0$；

(2) 如果 $\frac{\lambda\mu_1\mu_2}{b_2^2}\frac{a_2}{a_1}\theta_2 \le \theta_1 \le \frac{b_1^2}{\lambda\mu_1\mu_2}\frac{a_2}{a_1}\theta_2$，有 $n_1 \ge 0$，$n_2 \ge 0$；

(3) 如果 $\theta_1 > \frac{b_1^2}{\lambda\mu_1\mu_2}\frac{a_2}{a_1}\theta_2$，有 $n_1 \ge 0$，$n_2 < 0$。

注 1 这里 $n_1 = \frac{a_1\theta_1 b_2^2 - a_2\theta_2\lambda\mu_1\mu_2}{b_1^2 b_2^2 - \lambda^2\mu_1^2\mu_2^2}$，$n_2 = \frac{a_2\theta_2 b_1^2 - a_1\theta_1\lambda\mu_1\mu_2}{b_1^2 b_2^2 - \lambda^2\mu_1^2\mu_2^2}$。在此只详细讨论(2)的情况，其他两种情况可以类似推导得出。

为了解决(15)和(18)，我们尝试构造下列形式的解：

$$V(t,x,l,y) = A(t)(x+\alpha y) + B(t)l^2 + C(t)l + D(t) \tag{21}$$

$$g(t,x,l,y) = \bar{A}(t)(x+\alpha y) + \bar{B}(t)l^2 + \bar{C}(t)l + \bar{D}(t) \tag{22}$$

其中满足边界条件 $A(T) = \bar{A}(T) = 1$，$B(T) = \bar{B}(T) = 0$，$C(T) = \bar{C}(T) = 0$，$D(T) = \bar{D}(T) = 0$。则关于函数 V 和函数 g 各个变量的偏导数如下：

$$V_t = A_t(x+\alpha y) + B_t l^2 + C_t l + D_t \quad V_x = A \quad V_l = 2Bl + C \tag{23}$$

$$V_y = A\alpha \quad V_{ll} = 2B \quad V_{xx} = V_{xl} = 0 \tag{24}$$

$$g_t = \bar{A}_t(x+\alpha y) + \bar{B}_t l^2 + \bar{C}_t l + \bar{D}_t \quad g_x = \bar{A} \quad g_l = 2\bar{B}l + \bar{C} \tag{25}$$

$$g_y = \bar{A}\alpha \quad g_{ll} = 2\bar{B} \quad g_{xx} = g_{xl} = 0 \tag{26}$$

其中 V，g，A，B，C，D，$\bar{A}$，$\bar{B}$，$\bar{C}$，$\bar{D}$ 分别是 $V(t,x,l,y)$，$g(t,x,l,y)$，$A(t)$，$B(t)$，$C(t)$，$D(t)$，$\bar{A}(t)$，$\bar{B}(t)$，$\bar{C}(t)$，$\bar{D}(t)$ 的缩写。

经过简单的化简，把上述所有偏导代入式(18)化简得：

$$\sup_{\pi\in\Pi}\left\{\begin{array}{l}
A_t(x+\alpha y) + B_t l^2 + C_t l + D_t + A\begin{pmatrix} ax + \mu_m\pi_m + \mu(\pi_1+\pi_2) - k_1\pi_1 l + k_2\pi_2 l + \bar{\alpha}_1 y + \alpha_2 g \\ +(1+\theta_1)q_1(t)a_1 + \xi_1 a_1 + (1+\theta_2)q_2(t)a_2 + \xi_2 a_2 \end{pmatrix} \\
-(2Bl+C)(k_1+k_2)l + A\alpha\left(x - \beta y - e^{-\beta h}g\right) - \frac{\gamma}{2}\bar{A}^2\left[\sigma_m^2\pi_m^2 + b^2\left(\pi_1^2+\pi_2^2\right) + \sigma^2(\pi_1+\pi_2)^2\right] \\
-\lambda_1\mu_1 q_1 A - \gamma\bar{A}\left(2\bar{B}l+\bar{C}\right)b^2(\pi_1-\pi_2) - \lambda_1\gamma\mu_1 q_1\bar{A}\left[\bar{A}(x+\alpha y) + \bar{B}l^2 + \bar{C}l + \bar{D}\right] \\
+\left[2B - \gamma\left(2\bar{B}l+\bar{C}\right)^2\right]b^2 - \frac{\gamma}{2}\lambda_1\left[\nu_1 q_1^2\bar{A}^2 - 2\bar{A}q_1\mu_1\left(\bar{A}(x+\alpha y) + \bar{B}l^2 + \bar{C}l + \bar{D}\right)\right] \\
-\lambda_2\mu_2 q_2 A - \lambda_2\gamma\mu_2 q_2\bar{A}\left[\bar{A}(x+\alpha y) + \bar{B}l^2 + \bar{C}l + \bar{D}\right] - \lambda(\mu_1 q_1 + \mu_2 q_2)A \\
-\frac{\gamma}{2}\lambda_2\left[\nu_2 q_2^2\bar{A}^2 - 2\bar{A}q_2\mu_2\left(\bar{A}(x+\alpha y) + \bar{B}l^2 + \bar{C}l + \bar{D}\right)\right] \\
-\frac{\gamma}{2}\lambda\left[\left(\nu_1 q_1^2 + \nu_2 q_2^2\right)\bar{A}^2 + 2\mu_1\mu_2 q_1 q_2\bar{A}^2 - 2\bar{A}(q_1\mu_1 + q_2\mu_2)\left(\bar{A}(x+\alpha y) + \bar{B}l^2 + \bar{C}l + \bar{D}\right)\right] \\
-\lambda\gamma(\mu_1 q_1 + \mu_2 q_2)\bar{A}\left[\bar{A}(x+\alpha y) + \bar{B}l^2 + \bar{C}l + \bar{D}\right]
\end{array}\right\} = 0 \tag{27}$$

根据式(27)的结果求解最优再保险策略，其求解过程如下：令

$$f\left(t,q_1,q_2\right)=A\left(1+\theta_1\right)a_1q_1+A\left(1+\theta_2\right)a_2q_2-\lambda_1\mu_1q_1A-\frac{\gamma}{2}\lambda_1\nu_1q_1^2\bar{A}^2-\lambda_2\mu_2q_2A$$
$$-\frac{\gamma}{2}\lambda_2\nu_2q_2^2\bar{A}^2-\lambda\mu_1q_1A-\lambda\mu_2q_1A-\frac{\gamma}{2}\lambda\nu_1q_2^2\bar{A}^2-\frac{\gamma}{2}\lambda\nu_2q_2^2\bar{A}^2-\gamma\lambda\mu_1\mu_2q_1q_2\bar{A}^2 \tag{28}$$

关于 q_1， q_2 求偏导得：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial q_1}=Aa_1\left(1+\theta_1\right)-A\lambda_1\mu_1-\gamma\lambda_1\mu_1q_1\bar{A}^2-A\lambda\mu_1-\gamma\lambda\nu_1q_1\bar{A}^2-\gamma\lambda\mu_1\mu_2q_2\bar{A}^2\\ \dfrac{\partial f}{\partial q_2}=Aa_2\left(1+\theta_2\right)-A\lambda_2\mu_2-\gamma\lambda_2\mu_2q_2\bar{A}^2-A\lambda\mu_2-\gamma\lambda\nu_2q_2\bar{A}^2-\gamma\lambda\mu_1\mu_2q_1\bar{A}^2\\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial q_1^2}=-\gamma\lambda_1\nu_1\bar{A}^2-\gamma\lambda\nu_1\bar{A}^2\\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial q_2^2}=-\gamma\lambda_2\nu_2\bar{A}^2-\gamma\lambda\nu_2\bar{A}^2\\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial q_1\partial q_2}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial q_2\partial q_1}=-\gamma\lambda\mu_1\mu_2\bar{A}^2\end{cases} \tag{29}$$

从式(29)可以得到如下 Hessian 矩阵：

$$\begin{pmatrix}\dfrac{\partial^2 f}{\partial q_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial q_1\partial q_2}\\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial q_2^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial q_2\partial q_1}\end{pmatrix}=-\gamma\bar{A}^2\begin{pmatrix}b_1^2 & \lambda\mu_1\mu_2\\ \lambda\mu_1\mu_2 & b_2^2\end{pmatrix} \tag{30}$$

通过式(30)，显而易见该矩阵是负定的，因此最优再保险策略 $q_1^*\left(t\right)$ 和 $q_2^*\left(t\right)$ 满足下列方程：

$$\begin{cases}Aa_1\theta_1-\gamma b_1^2q_1\bar{A}^2-\gamma\lambda\mu_1\mu_2q_2\bar{A}^2=0\\ Aa_2\theta_2-\gamma b_2^2q_2\bar{A}^2-\gamma\lambda\mu_1\mu_2q_1\bar{A}^2=0\end{cases} \tag{31}$$

关于(31)式对 q_1 和 q_2 求一阶条件得：

$$\begin{cases}q_1^*\left(t\right)=\dfrac{n_1A\left(t\right)}{\gamma\bar{A}^2\left(t\right)}\\ q_2^*\left(t\right)=\dfrac{n_2A\left(t\right)}{\gamma\bar{A}^2\left(t\right)}\end{cases} \tag{32}$$

其中，$n_1=\dfrac{a_1\theta_1b_2^2-a_2\theta_2\lambda\mu_1\mu_2}{b_1^2b_2^2-\lambda^2\mu_1^2\mu_2^2}$，$n_2=\dfrac{a_2\theta_2b_1^2-a_1\theta_1\lambda\mu_1\mu_2}{b_1^2b_2^2-\lambda^2\mu_1^2\mu_2^2}$。然后再关于 $\pi_m\left(t\right)$，$\pi_1\left(t\right)$，$\pi_2\left(t\right)$ 求一阶条件得：

$$\begin{cases}\pi_m^*\left(t\right)=\dfrac{2A\mu}{\gamma\bar{A}^2\mu_m^2}\\ \pi_1^*\left(t\right)=\dfrac{2A\mu}{\gamma\bar{A}^2\left(b^2+2\sigma^2\right)}-\dfrac{2\bar{C}}{\bar{A}}-\dfrac{2\left(b^2+\sigma^2\right)Ak_1+2\sigma^2Ak_2}{\gamma\bar{A}^2\left(b^2+2\sigma^2\right)b^2}l-\dfrac{4\bar{B}}{\bar{A}}l\\ \pi_2^*\left(t\right)=\dfrac{2A\mu}{\gamma\bar{A}^2\left(b^2+2\sigma^2\right)}+\dfrac{2\bar{C}}{\bar{A}}+\dfrac{2\left(b^2+\sigma^2\right)Ak_2+2\sigma^2Ak_1}{\gamma\bar{A}^2\left(b^2+2\sigma^2\right)b^2}l+\dfrac{4\bar{B}}{\bar{A}}l\end{cases} \tag{33}$$

将所得的最优投资与再保险策略式(32)和式(33)代入式(27)和式(19)得

$$\begin{aligned}
&A_t\left(x+\alpha y\right)+A\left[\left(a+\alpha\right)x+\left(\bar{\alpha}_1-\alpha\beta\right)y\right]+A\left(\alpha_2-\alpha e^{-\beta h}\right)g+B_t l^2+C_t l+D_t+\frac{2A^2\mu}{\gamma\bar{A}^2\mu_m}\\
&+\frac{4A^2\mu^2}{\bar{A}^2\left(b^2+2\sigma^2\right)}+\frac{2A^2\mu\left(k_2-k_1\right)}{\bar{A}^2b^2}l-\frac{2A^2\mu k_1}{\bar{A}\left(b^2+2\sigma^2\right)}+\frac{2A\bar{C}k_1}{\bar{A}}l\\
&+\frac{2A^2k_1^2\left(b^2+2\sigma^2\right)+2\sigma^2A^2k_1k_2}{\bar{A}^2\left(b^2+2\sigma^2\right)b^2}l^2+\frac{4A\bar{B}\left(k_1+k_2\right)}{\bar{A}}l^2+\frac{2A^2\mu k_2}{\bar{A}^2\left(b^2+2\sigma^2\right)}l\\
&+\frac{2\left(b^2+2\sigma^2\right)A^2k_2^2+2\sigma^2A^2k_1k_2}{\bar{A}^2\left(b^2+2\sigma^2\right)b^2}l^2+a_1\left(1+\theta_1\right)\frac{n_1A^2}{\gamma\bar{A}^2}+a_2\left(1+\theta_2\right)\frac{n_2A^2}{\gamma\bar{A}^2}\\
&+Aa_1\xi_1+Aa_2\xi_2-2B\left(k_1+k_2\right)l^2-2C\left(k_1+k_2\right)l-\frac{2A^2\mu^2\sigma_m^2}{\gamma\bar{A}^2\mu_m^4}-\frac{8A^2\mu^2\sigma^2\gamma}{\bar{A}^2\left(b^2+2\sigma^2\right)^2}\\
&-\frac{2A^2\gamma\sigma^2\left(k_2-k_1\right)^2}{\bar{A}^2b^4}l^2-\frac{8A^2\gamma\mu\sigma^2\left(k_2-k_1\right)}{\bar{A}^2b^2\left(b^2+2\sigma^2\right)}l-\frac{4\gamma A^2\mu^2b^2}{\bar{A}^2\left(b^2+2\sigma^2\right)^2}\\
&-4\gamma\bar{C}^2b^2-\frac{8\gamma A\bar{B}\left(k_1+k_2\right)\left(b^2+3\sigma^2\right)}{\bar{A}\left(b^2+2\sigma^2\right)}l^2-\frac{4\gamma A^2\mu\left(k_2-k_1\right)\left(b^2+\sigma^2\right)}{\bar{A}^2\left(b^2+2\sigma^2\right)^2}l\\
&-\frac{4\gamma A\bar{C}\left(k_1+k_2\right)\left(b^2+3\sigma^2\right)}{\bar{A}\left(b^2+2\sigma^2\right)}l-\frac{2\gamma A^2\left(\left[k_1\left(b^2+2\sigma^2\right)+k_2\sigma^2\right]^2+k_2\left(b^2+2\sigma^2\right)+k_1\sigma^{22}\right)}{\bar{A}^2\left(b^2+2\sigma^2\right)^2b^2}l^2\\
&+2Bb^2+12\bar{B}^2\gamma b^2l^2-4\bar{B}\bar{C}\gamma b^2l-\gamma\bar{C}^2b^2+4\gamma\bar{C}^2b^2+\frac{4A\bar{B}\gamma\left(k_1+k_2\right)\left(b^2+3\sigma^2\right)}{\bar{A}\left(b^2+2\sigma^2\right)}l^2\\
&+\frac{2\gamma A\bar{C}\left(k_1+k_2\right)\left(b^2+3\sigma^2\right)}{\bar{A}\left(b^2+2\sigma^2\right)}l-\frac{\lambda\mu_1\mu_2n_1n_2A^2}{\gamma\bar{A}^2}-a_1\frac{n_1A^2}{\gamma\bar{A}^2}-a_2\frac{n_2A^2}{\gamma\bar{A}^2}-\frac{n_1^2A^2b_1^2}{2\bar{A}^2}-\frac{n_2^2A^2b_2^2}{2\bar{A}^2}=0
\end{aligned}\tag{34}$$

$$\begin{aligned}
&\bar{A}_t\left(x+\alpha y\right)+\bar{A}\left[\left(a+\alpha\right)x+\left(\bar{\alpha}_1-\alpha\beta\right)y\right]+\bar{A}\left(\alpha_2-\alpha e^{-\beta h}\right)g+\bar{B}_tl^2+\bar{C}_tl+\bar{D}_t+\frac{2A\mu}{\gamma\bar{A}\mu_m}\\
&+\frac{4A\mu^2}{\bar{A}\left(b^2+2\sigma^2\right)}+\frac{2A\mu\left(k_2-k_1\right)}{\bar{A}b^2}l+\frac{2A\mu\left(k_2-k_1\right)}{\bar{A}\left(b^2+2\sigma^2\right)}l+\bar{C}\left(k_1+k_2\right)l+2\bar{B}\left(k_1+k_2\right)l^2\\
&+\frac{2A\left(b^2+2\sigma^2\right)\left(k_1^2+k_2^2\right)+4A\sigma^2k_1k_2}{\bar{A}b^2\left(b^2+2\sigma^2\right)}l^2+a_1\theta_1\frac{n_1A}{\gamma\bar{A}}+a_2\theta_2\frac{n_2A}{\gamma\bar{A}}+\bar{A}\xi_1a_1+\bar{A}\xi_2a_2=0
\end{aligned}\tag{35}$$

为了使问题可解，设下列参数满足

$$\alpha_2=\alpha e^{-\beta h}\tag{36}$$

$$\bar{\alpha}_1e^{-\beta h}=\left(\beta+a+\alpha\right)\alpha_2\tag{37}$$

则有 $A\left(\alpha_2-\alpha e^{-\beta h}\right)g=0$。为了获得 A，$\bar{A}$，B，$\bar{B}$，C，$\bar{C}$，D，$\bar{D}$ 的表达式，让 A_t，A，$\bar{A}_t$，$\bar{A}$ 满足下列微分方程：

$$A_t\left(x+\alpha y\right)+A\left(\left(a+\alpha\right)x+\left(\bar{\alpha}_1-\alpha\beta\right)y\right)=0\tag{38}$$

$$\bar{A}_t\left(x+\alpha y\right)+\bar{A}\left(\left(a+\alpha\right)x+\left(\bar{\alpha}_1-\alpha\beta\right)y\right)=0 \tag{39}$$

其中 $A(T)$ 和 $\bar{A}(T)$ 满足边界条件 $A(T)=\bar{A}(T)=1$。

基于式(37)的条件，有 $\bar{\alpha}_1-\alpha\beta=\left(a+\alpha\right)\alpha$，因此有

$$A(t)=e^{(a+\alpha)(T-t)}\qquad \bar{A}(t)=e^{(a+\alpha)(T-t)} \tag{40}$$

接下来通过分离有无 l 和 l^2，可以推导出下列方程：

$$\bar{B}_t+2\bar{B}\left(k_1+k_2\right)+\frac{2A\left(b^2+2\sigma^2\right)\left(k_1^2+k_2^2\right)+4A\sigma^2k_1k_2}{\bar{A}\left(b^2+2\sigma^2\right)b^2}=0 \tag{41}$$

$$\bar{C}_t+\frac{2A\mu\left(k_2-k_1\right)}{\bar{A}b^2}+\frac{2A\mu\left(k_2-k_1\right)}{\bar{A}\left(b^2+2\sigma^2\right)}+\bar{C}\left(k_1+k_2\right)=0 \tag{42}$$

$$\begin{aligned}&B_t+\frac{4A\bar{B}\left(k_1+k_2\right)}{\bar{A}}+\frac{2A^2\left(k_1^2+k_2^2\right)\left(b^2+2\sigma^2\right)+4A^2\sigma^2k_1k_2}{\bar{A}^2\left(b^2+2\sigma^2\right)b^2}-2B\left(k_1+k_2\right)\\&-\frac{2A^2\gamma\sigma^2\left(k_2-k_1\right)^2}{\bar{A}^2b^4}+12\gamma\bar{B}^2b^2-\frac{4\gamma A\bar{B}\left(k_1+k_2\right)\left(b^2+3\sigma^2\right)}{\bar{A}\left(b^2+2\sigma^2\right)}\\&-\frac{2\gamma A^2\left[k_1\left(b^2+2\sigma^2\right)+k_2\sigma^2\right]^2+\left[k_2\left(b^2+2\sigma^2\right)+k_1\sigma^2\right]^2}{\bar{A}^2\left(b^2+2\sigma^2\right)^2b^2}=0\end{aligned} \tag{43}$$

$$\begin{aligned}&C_t+\frac{2A^2\mu\left(k_2-k_1\right)}{\bar{A}^2b^2}+\frac{2A^2\mu\left(k_2-k_1\right)}{\bar{A}^2\left(b^2+2\sigma^2\right)}+\frac{2A\bar{C}\left(k_1+k_2\right)}{\bar{A}}-\frac{8A^2\gamma\mu\sigma^2\left(k_2-k_1\right)}{\bar{A}^2b^2\left(b^2+2\sigma^2\right)}\\&-\frac{4\gamma A^2\mu\left(k_2-k_1\right)\left(b^2+\sigma^2\right)}{\bar{A}^2\left(b^2+2\sigma^2\right)^2}-\frac{2\gamma A\bar{C}\left(k_1+k_2\right)\left(b^2+3\sigma^2\right)}{\bar{A}\left(b^2+2\sigma^2\right)}-4\bar{B}\bar{C}\gamma b^2=0\end{aligned} \tag{44}$$

$$\bar{D}_t+\frac{2A\mu}{\gamma\bar{A}\mu_m}+\frac{4A\mu^2}{\bar{A}\left(b^2+2\sigma^2\right)}+a_1\theta_1\frac{n_1A}{\gamma\bar{A}}+a_2\theta_2\frac{n_2A}{\gamma\bar{A}}+\bar{A}\xi_1a_1+\bar{A}\xi_2a_2=0 \tag{45}$$

$$\begin{aligned}&D_t+\frac{2A\mu}{\gamma\bar{A}\mu_m}+\frac{4A\mu^2}{\bar{A}\left(b^2+2\sigma^2\right)}++a_1\theta_1\frac{n_1A}{\gamma\bar{A}}+a_2\theta_2\frac{n_2A}{\gamma\bar{A}}+A\xi_1a_1+A\xi_2a_2-\frac{2A^2\mu^2\sigma_m^2}{\gamma\bar{A}^2\mu_m^4}\\&-\frac{8A^2\mu^2\sigma^2\gamma}{\bar{A}^2\left(b^2+2\sigma^2\right)^2}-\gamma\bar{C}^2b^2+2Bb^2-\frac{n_1^2A^2b_1^2}{2\bar{A}^2}-\frac{n_2^2A^2b_2^2}{2\bar{A}^2}-\frac{\lambda\mu_1\mu_2n_1n_2A^2}{\gamma\bar{A}^2}\end{aligned} \tag{46}$$

其中 $B(T)$，$\bar{B}(T)$，$C(T)$，$\bar{C}(T)$，$D(T)$，$\bar{D}(T)$ 满足边界条件 $B(T)=\bar{B}(T)=C(T)=\bar{C}(T)=D(T)=\bar{D}(T)=0$。

通过求解常微分方程式(41)~(46)得：

$$\bar{B}(t)=\frac{P_1}{2\left(k_1+k_2\right)}\left(e^{-2\left(k_1+k_2\right)(T-t)}-1\right) \tag{47}$$

$$\bar{C}(t)=\frac{P_2}{\left(k_1+k_2\right)}\left(e^{-\left(k_1+k_2\right)(T-t)}-1\right) \tag{48}$$

$$B(t)=-e^{2\left(k_1+k_2\right)(T-t)}\int_t^T e^{-2\left(k_1+k_2\right)(T-s)}Q(s)\,ds \tag{49}$$

$$C(t)=-e^{2(k_1+k_2)(T-t)}\int_t^T e^{-2(k_1+k_2)(T-s)}h(s)ds \tag{50}$$

$$\bar{D}(t)=\left(\frac{2\mu}{\gamma\mu_m}+\frac{4\mu^2}{b^2+2\sigma^2}+\frac{a_1n_1\theta_1+a_2n_2\theta_2}{\gamma}\right)(T-t)+\frac{a_1\xi_1+a_2\xi_2}{a+\alpha}\left[e^{(a+\alpha)(T-t)}-1\right] \tag{51}$$

$$\begin{aligned}D(t)=&\left(\frac{2\mu}{\gamma\mu_m}+\frac{4\mu^2}{b^2+2\sigma^2}+\frac{a_1n_1\theta_1+a_2n_2\theta_2-\lambda\mu_1\mu_2n_1n_2}{\gamma}-\frac{2\mu^2\sigma_m^2}{\gamma\mu_m^4}\right)(T-t)+2b^2\int_t^T B(s)ds\\&-\left(\frac{4\gamma\mu^2}{b^2+2\sigma^2}+\frac{1}{2}\left(n_1^2b_1^2+n_2^2b_2^2\right)\right)(T-t)+\frac{a_1\xi_1+a_2\xi_2}{a+\alpha}\left[e^{(a+\alpha)(T-t)}-1\right]-\gamma b^2\int_t^T\bar{C}^2(s)ds\end{aligned} \tag{52}$$

其中，

$$P_1=\frac{2\left(k_1^2+k_2^2\right)}{b^2}+\frac{4\sigma^2k_1k_2}{\left(b^2+2\sigma^2\right)b^2} \tag{53}$$

$$P_2=\frac{2\mu\left(k_2-k_1\right)}{b^2}+\frac{2\mu\left(k_2-k_1\right)}{b^2+2\sigma^2} \tag{54}$$

$$\begin{aligned}Q(s)=&4\left(k_1+k_2\right)\int_t^T\bar{B}(s)ds+\frac{2\left(k_1^2+k_2^2\right)}{b}+\frac{4\sigma^2k_1k_2}{\left(b^2+2\sigma^2\right)b^2}-\frac{2\gamma\sigma^2\left(k_2-k_1\right)^2}{b^4}\\&+\int_t^T12\gamma b^2\bar{B}^2(s)ds-\int_t^T\frac{4\gamma\left(k_1+k_2\right)\left(b^2+3\sigma^2\right)}{b^2+2\sigma^2}\bar{B}(s)ds\\&-\frac{2\gamma\left(\left[k_1\left(b^2+2\sigma^2\right)+k_2\sigma^2\right]^2+\left[k_2\left(b^2+2\sigma^2\right)+k_1\sigma^2\right]^2\right)}{\left(b^2+2\sigma^2\right)^2b^2}=0\end{aligned} \tag{55}$$

$$\begin{aligned}h(s)=&\frac{2\mu\left(k_2-k_1\right)}{b^2}+\frac{2\mu\left(k_2-k_1\right)}{b^2+2\sigma^2}-\frac{8\gamma\mu\sigma^2\left(k_2-k_1\right)}{b^2\left(b^2+2\sigma^2\right)}-\frac{8\gamma\mu\left(k_2-k_1\right)\left(b^2+\sigma^2\right)}{\left(b^2+2\sigma^2\right)^2}\\&\times2\left(k_1+k_2\right)\int_t^T\bar{C}(s)ds-4\gamma b^2\int_t^T\bar{B}(s)\bar{C}(s)ds-\frac{2\gamma\left(k_1+k_2\right)\left(b^2+3\sigma^2\right)}{b^2+2\sigma^2}\int_t^T\bar{C}(s)ds\end{aligned} \tag{56}$$

综上，可以得到最优投资与再保险策略以及最优值函数，整理得到了如下定理：

定理 2 (最优策略)

最优投资策略

$$\pi_m^*(t)=\frac{2\mu}{\gamma\mu_m^2} \tag{57}$$

$$\begin{aligned}\pi_1^*(t)=&\frac{2\mu}{\gamma\left(b^2+2\sigma^2\right)}e^{-(a+\alpha)(T-t)}-\frac{2P_2}{k_1+k_2}e^{-(a+\alpha)(T-t)}\left[e^{-(k_1+k_2)(T-t)}-1\right]\\&-\frac{2P_1}{k_1+k_2}\left(e^{-(k_1+k_2)(T-t)}-1\right)e^{-(a+\alpha)(T-t)}l-\left[\frac{2k_1\left(b^2+\sigma^2\right)+2\sigma^2k_2}{\gamma b^2\left(b^2+2\sigma^2\right)}\right]le^{-(a+\alpha)(T-t)}\end{aligned} \tag{58}$$

$$\pi_2^*(t)=\frac{2\mu}{\gamma\left(b^2+2\sigma^2\right)}e^{-(a+\alpha)(T-t)}+\frac{2P_2}{k_1+k_2}e^{-(a+\alpha)(T-t)}\left[e^{-(k_1+k_2)(T-t)}-1\right]$$

$$+\frac{2P_1}{k_1+k_2}\left(e^{-(k_1+k_2)(T-t)}-1\right)e^{-(a+\alpha)(T-t)}l+\left[\frac{2k_2\left(b^2+\sigma^2\right)+2\sigma^2k_1}{\gamma b^2\left(b^2+2\sigma^2\right)}\right]le^{-(a+\alpha)(T-t)} \tag{59}$$

最优再保险策略

$$q_1^*(t)=\frac{a_1\theta_1b_2^2-a_2\theta_2\lambda\mu_1\mu_2}{\gamma\left(b_1^2b_2^2-\lambda^2\mu_1^2\mu_2^2\right)}e^{-(a+\alpha)(T-t)} \tag{60}$$

$$q_2^*(t)=\frac{a_2\theta_2b_1^2-a_1\theta_1\lambda\mu_1\mu_2}{\gamma\left(b_1^2b_2^2-\lambda^2\mu_1^2\mu_2^2\right)}e^{-(a+\alpha)(T-t)} \tag{61}$$

最优值函数是

$$V(t,x,l,y)=J(t,x,l,y) \tag{62}$$

其中 $P_1(t)$， $P_2(t)$ 见公式(53)和公式(54)。

注 2. 若两类共同冲击的索赔变为一类索赔，不考虑延迟信息，其最优投资策略和再保险策略与文献[7]定理 3.4 相似。

注 3. 若没有错误定价，即 $L(t)\equiv 0$，假设保险公司依旧进行比例再保险，仍投资于市场指数和风险资产，对财富过程进行求解后可以发现最优再保险策略与最优市场指数投资与带错误定价的模型一致，说明错误定价并不影响再保险策略，当没有错误定价时投资于错误定价股票的资金将会返回到账户而不会对其他资产产生影响。

4. 数值分析

本节主要给出最优再保险和投资策略关于各个参数的一些敏感性分析。若无特殊说明，参数取值如下：$\lambda_1=2$，$\lambda_2=3$，$\lambda=1$，$\mu_1=0.2$，$\mu_2=0.2$，$\nu_1=0.3$，$\nu_2=0.3$，$\delta=0.5$，$\theta_1=0.4$，$\eta_1=0.2$，$\theta_2=0.4$，$\eta_2=0.2$，$r=0.02$，$b=0.3$，$\mu=0.05$，$\sigma=0.2$，$\beta=1.5$，$\alpha=0.1$，$a=0.1$，$k_1=0.2$，$k_2=0.6$，$\gamma=1$，$h=0.5$，$T=4$，$t=0$。

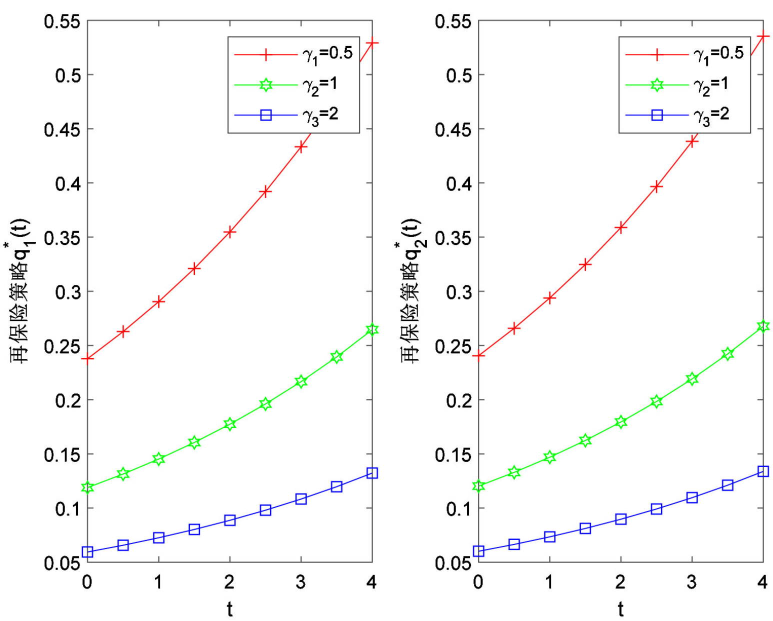

Figure 1. Effect of γ on $q_1^*(t)$ and $q_2^*(t)$
图 1. γ 对 $q_1^*(t)$和 $q_2^*(t)$的影响

图 1 反映了模糊厌恶系数 γ 对 $q_1^*(t)$ 和 $q_2^*(t)$ 的影响。结果表明，保险公司的自留水平 $q_1^*(t)$ 和 $q_2^*(t)$ 随着风险厌恶系数 γ 的增大而减小。风险厌恶程度越高，保险公司的风险厌恶程度越高，因此保险人会购买更多的再保险，这与 γ 的实际经济意义是一致的。

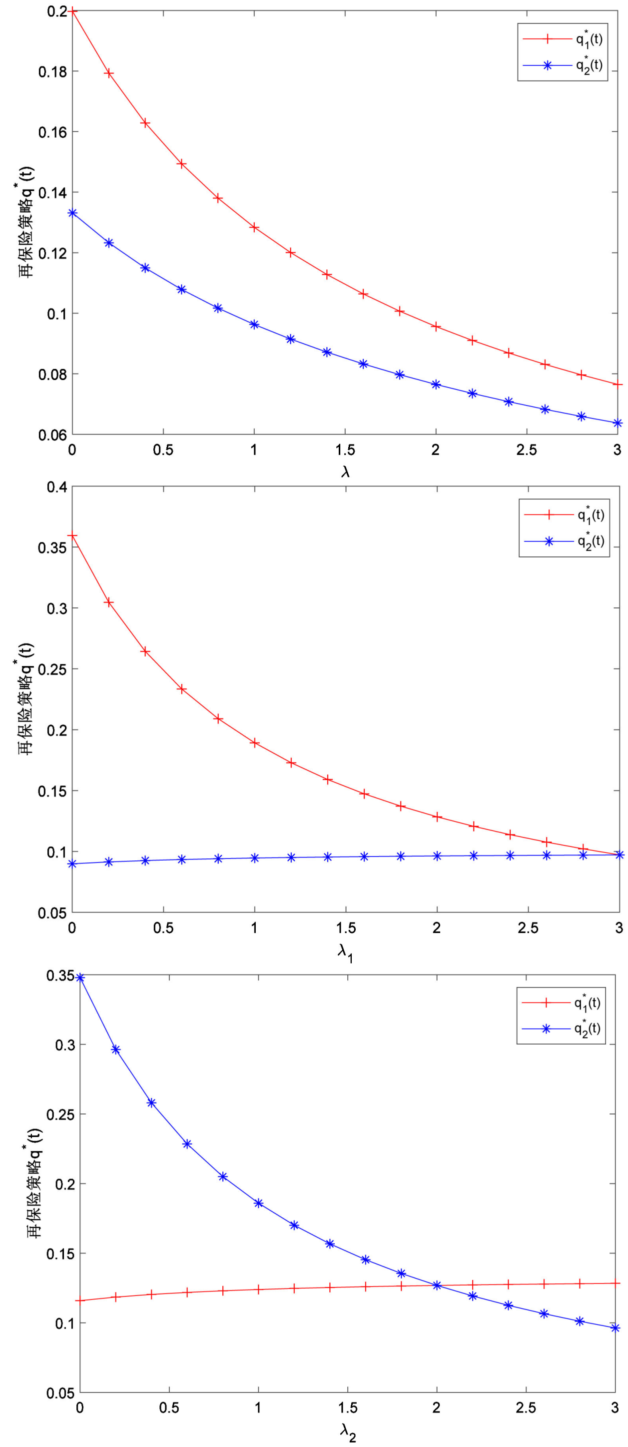

Figure 2. Effect of λ、λ_1 and λ_2 on reinsurance strategies

图 2. λ、λ_1 和 λ_2 对再保险策略的影响

图 2 分别描述了 λ 、λ_1 和 λ_2 对再保险策略的影响。随着 λ 的增加，两条业务线的平均理赔数量增加，为了有效控制保险风险，保险公司将增加两条业务线的再保险购买，即自留水平 $q_1^*(t)$ 和 $q_2^*(t)$ 降低。随着 λ_1 的增大，自留水平 $q_1^*(t)$ 减小， $q_1^*(t)$ 增大。在一定水平的保险整体风险控制的基础上， λ_1 的增加导致一线业务的平均理赔量增加，而二线业务由于平均理赔不变而具有比较优势，从而导致保险人购买第一类再保险的数量增加，而购买第二类再保险的数量减少。随着 λ_2 的增加， $q_2^*(t)$ 减少， $q_1^*(t)$ 增加。其解释与 λ_1 相同。

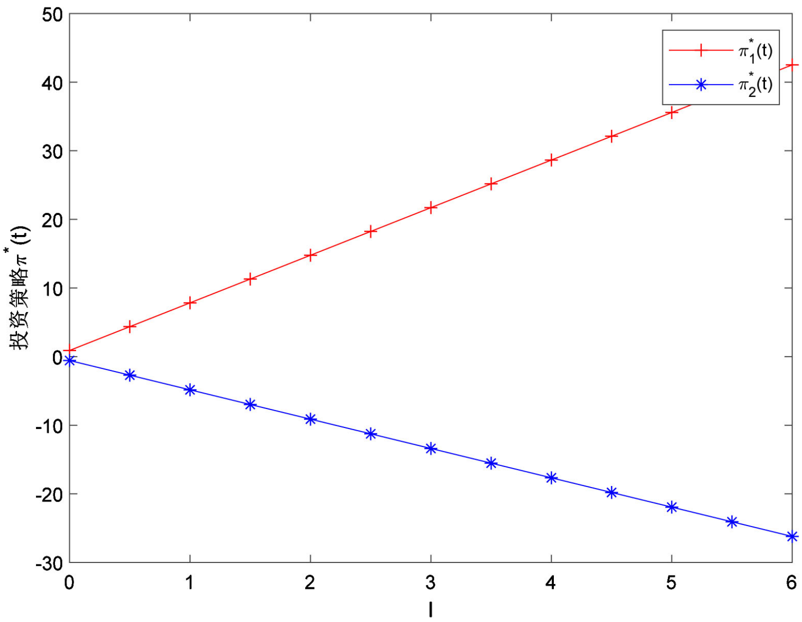

Figure 3. Effect of mispricing 1 on reinsurance strategies
图 3. 错误定价 l 对再保险策略的影响

图 3 反映了错误定价 l 对再保险策略 $\pi_1^*(t)$ 和 $\pi_2^*(t)$ 的影响，可以发现 $\pi_1^*(t)$ 随着 l 的增大而增大，而 $\pi_2^*(t)$ 随着 l 的增大而减少，也就是说，随着错误定价值增大，保险公司将会增大对第一只股票的投资而减少对第二只股票的投资。

5. 结论

本文研究了保险公司在错误定价模型下考虑具有有限记忆和共同冲击的最优再保险和投资策略问题。一方面，在保险市场中，假设保险公司使用具有共同冲击依赖性的二维泊松过程来描述盈余过程，允许保险公司购买比例再保险且在金融市场进行投资来分散其风险，根据数值分析发现共同冲击强度 λ 对再保险策略的影响是一致的，强度 λ_1 和 λ_2 分别对再保险策略的影响是不一致。另一方面，在金融市场中，我们研究了在与业绩相关的资本流入/流出的情况下，价格过程由错误定价模型和市场指数描述的风险资产。在现实中，保险公司会选择不同的股票进行投资来增加财富和获取收益，因此我们选择具有一对股票的错误定价模型来分析研究问题，最后给出了最优投资策略，根据数值分析发现对第一只股票的投资随着错误定价值 l 的增大而增大，对第二只股票的投资随着错误定价值 l 的增大而减少。

在将来，还有很多值得深入研究，比如(1) 本文在金融市场中只考虑加入延迟财富的错误定价模型，还可以在金融市场中加入违约债券；(2) 本文只考虑了在均值方差准则下研究最优问题，因为保险人都是模糊厌恶的，因此还可以考虑模糊对保险公司投资－再保险策略的影响。

致　谢

感谢我的导师马世霞教授，马老师是一位非常认真负责的老师。在整个写作过程中，马老师不仅仅在学业上给予我悉心的指导，同时在生活上给予我很多关怀，在我迷茫时给我指引方向。本文从选题到最终的定稿都离不开马老师的悉心指导，老师严谨的学术态度时刻激励着我，甚至论文中的每一个公式每一个符号都要反复推敲检查，在今后的学习生活中，我一定遵循老师的教诲。在此，向马老师致以我最崇高的敬意与衷心的感谢。

基金项目

国家自然科学基金(12071107)。

参考文献

[1] Liang, X.Q., Liang, Z.B. and Young, V.R. (2020) Optimal Reinsurance under the Mean-Variance Premium Principle to Minimize the Probability of Ruin. *Insurance Mathematics and Economics*, **92**, 128-146. https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2020.03.008

[2] Guan, G.H. and Liang, Z.X. (2014) Optimal Reinsurance and Investment Strategies for Insurer under Interest Rate and Inflation Risks. *Insurance Mathematics and Economics*, **55**, 105-155. https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2014.01.007

[3] Wang, H., Wang, R.M. and Wei, J.Q. (2019) Time-Consistent Investment-Proportional Reinsurance Strategy with Random Coefficients for Mean-Variance Insurers. *Insurance Mathematics and Economics*, **85**, 104-114. https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2019.01.002

[4] Chen, Z.P. and Yang, P. (2020) Robust Optimal Reinsurance-Investment Strategy with Price Jumps and Correlated Claims. *Insurance Mathematics and Economics*, **92**, 27-46. https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2020.03.001

[5] Wang, N., Zhang, N., Jin, Z. and Qian, L.Y. (2021) Reinsurance-Investment Game between Two Mean-Variance Insurers under Model Uncertainty. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **382**, 95-121. https://doi.org/10.1016/j.cam.2020.113095

[6] Gu, A.L., Viens, F.G. and Yao, H.X. (2018) Optimal Robust Reinsurance-Investment Strategies for Insures with Mean Reversion and Mispricing. *Insurance Mathematics and Economics*, **80**, 93-109. https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2018.03.004

[7] Wang, Y.J., Deng, Y.C., Huang, Y., Zhou, J.M. and Xiang, X.Y. (2020) Optimal Reinsurance-Investment Policies for Insurers with Mispricing under Mean-Variance Criterion. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **51**, 53-80. https://doi.org/10.1080/03610926.2020.1844239

[8] A, C.X. and Li, Z.F. (2015) Optimal Investment and Excess-of-Loss Reinsurance Problem with Delay for an Insurer under Heston's SV Model. *Insurance Mathematics and Economics*, **61**, 181-196. https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2015.01.005

[9] Zhang, Q. and Chen, P. (2020) Optimal Reinsurance and Investment Strategy for an Insurer in a Model with Delay and Jumps. *Methodology and Computing in Applied Probability*, **22**, 777-801. https://doi.org/10.1007/s11009-019-09734-4

[10] Bi, J.N., Liang, Z.B. and Xu, F.J. (2016) Optimal Mean-Variance Investment and Reinsurance Problems for the Risk Model with Common Shock Dependence. *Insurance Mathematics and Economics*, **70**, 245-258. https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2016.06.012

[11] Björk, T., Khapko, M. and Murgoci, A. (2017) On Time-Inconsistent Stochastic Control in Continuous Time. *Finance and Stochastics*, **21**, 331-360. https://doi.org/10.1007/s00780-017-0327-5

[12] Kryger, E.M. and Steffensen, M. (2010) Some Solvable Portfolio Problems with Quadratic and Collective Objectives. Social Science Electronic Publishing, University of Copenhagen. https://doi.org/10.2139/ssrn.1577265