Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2024, 13(4), 1853-1861**
Published Online April 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2024.134174

Hans汉斯

含有参数的分数阶微分方程在集合$P_{h,e}$中解的存在唯一性

陈孝虎，张玲玲*，王　慧

太原理工大学数学学院，山西　太原

收稿日期：2024年3月28日；录用日期：2024年4月23日；发布日期：2024年4月30日

摘　要

本文研究了一类含有参数的算子不动点定理，得到了不动点的存在唯一性以及该不动点关于参数的单调性与连续性。以此为基础研究了一类含有参数的分数阶微分方程多点边值问题，最终得到了方程解的存在唯一性和该唯一解关于参数的单调性、连续性。最后举例说明了结果的可行性。

关键词

分数阶微分方程，存在唯一性，不动点定理，多点边值问题

Existence and Uniqueness of Solutions to Fractional Differential Equations with Parameters in Set $P_{h,e}$

Xiaohu Chen, Lingling Zhang*, Hui Wang

School of Mathematics, Taiyuan University of Technology, Taiyuan Shanxi

Received: Mar. 28th, 2024; accepted: Apr. 23rd, 2024; published: Apr. 30th, 2024

Abstract

This paper investigates a class of fixed point theorems with parameter operators, obtaining the existence and uniqueness of fixed points as well as the monotonicity and continuity of the fixed points with respect to the parameters. Building upon this, it explores a class of multi-point boundary value problems for fractional differential equations with parameters, ultimately obtaining the existence

*通讯作者。

文章引用: 陈孝虎, 张玲玲, 王慧. 含有参数的分数阶微分方程在集合 $P_{h,e}$ 中解的存在唯一性[J]. 应用数学进展, 2024, 13(4): 1853-1861. DOI: 10.12677/aam.2024.134174

and uniqueness of solutions to the equations, along with the monotonicity and continuity of the unique solution with respect to the parameters. Finally, examples are provided to illustrate the feasibility of the results.

Keywords

Fractional Differential Equation, Existence and Uniqueness, Fixed-Point Theorems, Multi-Point Boundary Value Problems

1. 引言

分数阶微分方程是微分方程的一个重要分支，因其具有记忆性、遗传性等特点，能更客观准确地描述非线性状态或现象，在处理非线性常微分、偏微分、积分、差分方程问题时具有极高潜力，进入 21 世纪以来，分数阶微积分及分数阶微分方程理论成功应用于药物扩散、信号处理、图像处理、天气预报、粘弹性材料等工程和技术领域[1]-[7]。例如，在图像处理中，通过改变微分的阶数可以增加高频信息同时保留低频信息，从而有效提高图像清晰度。在黏弹性流变问题中，许多复杂黏弹性材料具有记忆特性，使用分数阶模型可克服整数阶模型无法良好拟合试验数据的问题，而且只需较少的参数。因此，分数阶微分方程已成为越来越多学者探讨和研究的重要课题。越来越多的学者被它广泛的应用前景所吸引。

非线性泛函分析理论是研究分数阶微分方程及其边值问题的重要手段，包括上下解方法、解析方法、非线性算子理论、临界点理论等等。大多数学者以此为工具研究分数阶微分方程解的存在性、唯一性、多重性、渐进性等。微分方程中非线性项的性质、边界条件的形式及导数的类型都对方法的选择与应用有着十分重要的影响。其中，不同类型分数阶微分方程边值问题的研究受到了广泛关注，包括分数阶微分方程的两点、三点、多点边值等问题[5]-[18]都引起了人们的兴趣。文献[8]讨论了以下的分数阶微分方程：

$$\begin{cases} D_{0^+}^{\alpha} x(t) + f\left(t, x(t)\right) = 0, \quad t \in [0,1]. \\ x(0) = x'(0) = x(1) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

其中 $D_{0^+}^{\alpha}$ 为黎曼刘维尔型分数阶导数，$2 < \alpha < 3$，通过使用巴拿赫压缩映像原理，作者得到了上面方程解的存在性结论。文献[9]讨论了以下的分数阶微分方程：

$$\begin{cases} D_{0^+}^{\alpha} x(t) + b = f\left(t, x(t), x(t)\right), \quad t \in [0,1]. \\ x(0) = x'(0) = x(1) = x'(1) = 0. \end{cases} \tag{2}$$

其中 $3 < \alpha < 4, b > 0$ 主要在不考虑算子紧性、连续性或者上下解存在的条件下，结合集合 $P_{h,e}$ 中算子的不同凹凸性、单调性等性质，利用锥与半序理论和单调迭代技巧来研究方程的唯一解。

本文论讨论了如下一类带有参数的 ψ-黎曼刘维尔型分数阶微分方程

$$\begin{cases} D_{a^+}^{\alpha;\psi} x(t) + (-1)^{k-1}\left(f\left(t, x(t)\right) - \lambda q(t)\right) = 0, \quad t \in [a,b]. \\ x_{\psi}^{[i]}(a) = 0, \qquad i = 0,1,\ldots,\mathrm{n}-k-1. \\ x_{\psi}^{[j]}(b) = 0, \qquad j = 0,1,\ldots,k-1. \end{cases} \tag{3}$$

其中 $D_{a^+}^{\alpha;\psi}(.)$ 为 ψ-黎曼刘维尔型分数阶导数，参数 $\alpha>2$， $n-1\le\alpha<n$ 且 $1\le k<n-1$。以及式子：

$$x_{\psi}^{[i]}(\xi)=\left(\frac{d}{\psi'(t)dt}\right)^{i}x(t)\Big|_{t=\xi}$$

相较于(1)和(2)这两个方程，本文将方程的形式上从黎曼刘维尔型分数阶导数推广成了 ψ-黎曼刘维尔型分数阶导数，在选取特定的参数时，本文结果将退化为方程(1)和(2)。因此本文的结论更具有一般性，同时也为处理该类问题时提供了一种新思路。

2. 预备知识

定义 1 [10]令 $\alpha>0$， $\psi(t)$ 是定义在区间 $[a,b]$ 上的严格单调递增的正值函数，且 $\psi\in C^1[a,b]$，则称函数 $u:[a,b]\to R$ 对于另一个函数 $\psi(t)$ 在区间 $[a,b]$ 上的 α 阶 ψ-黎曼刘维尔积分为：

$$I_{a^+}^{\alpha;\psi}u(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x\psi'(s)(\psi(t)-\psi(s))^{\alpha-1}u(s)\,\mathrm{d}\,s$$

定义 2 [10]令 $\alpha>0$， $\psi(t)$ 是定义在区间 $[a,b]$ 上的严格单调递增的正值函数，且 $\psi\in C^n[a,b]$，则称函数 $u:[a,b]\to R$ 对于另一个函数 $\psi(t)$ 在区间 $[a,b]$ 上的 α 阶 ψ-黎曼刘维尔导数为：

$$D_{a^+}^{\alpha;\psi}u(x)=\left(\frac{1}{\psi'(x)}\frac{d}{dx}\right)^{n}I_{a^+}^{n-\alpha;\psi}u(x)$$

其中 $n=[\alpha]+1$。

定义 3 [10] 设 E 是实巴拿赫空间，倘若 P 是 E 中非空凸闭集且满足：

(1)：对任意的 $x\in P$ 且 $\lambda\ge0$ 则有 $\lambda x\in P$。

(2)：如果 $x\in P$ 且 $-x\in P$ 则有 $x=\theta$，其中 θ 表示 E 中零元素。

则称 P 是 E 中的一个锥。并且我们在锥种引入半序概念，即如果 $x,y\in E$，当 $x-y\in P$ 时可记为 $x\ge y$。特别的，如果对于任意满足 $x\ge y\ge\theta$，存在常数 N 使得 $\|y\|\le N\|x\|$ 成立，则称锥 P 为正规锥，其中常数 N 称为正规常数。

定义 4 [9]设 E 是实巴拿赫空间，P 是 E 上的正规锥，设 $\theta\le e<h$，定义集合 $P_{h,e}$ 定义为 $P_{h,e}=\{x\in E\,|\,\exists u,v>0:uh\le x+e\le vh\}$。若算子 $A:P_{h,e}\to E$ 满足对任意的 $x\in P_{h,e},\tau\in(0,1)$，存在 $\varphi(\tau)>\tau(\tau\in(0,1))$ 存在使得：

$$T(\tau(x+e)-e)\ge\varphi(\tau)T(x)+(\varphi(\tau)-1)e$$

则称算子 A 为 $\varphi-(h,e)$ 凹算子。

引理 1 [11]如果 $p,q>0$， $u\in L[a,b]$，则

$$I_{a^+}^{p;\psi}\left(I_{a^+}^{q;\psi}u(x)\right)=I_{a^+}^{p+q;\psi}u(x)$$

$$I_{a^+}^{p;\psi}\left(D_{a^+}^{p;\psi}u(x)\right)=u(x)-\sum_{k=1}^{n}c_k\left(\psi(x)-\psi(a)\right)^{p-k}$$

其中 $c_1, c_2,\ldots, c_n$ 为待定系数。

引理 2 [9]设 P 是正规锥，设 $\theta\le e<h$， $A:P_{h,e}\to E$ 是增 $\varphi-(h,e)$ 凹算子且 $Th\in P_{h,e}$。则算子 A 满有唯一不动点，且对于集合 $P_{h,e}$ 中任意给定的初值 x_0 构造迭代序列 $x_{n+1}=Ax_n$ 都有 $x_n\to x^*(n\to\infty)$。$x^*\in P_{h,e}$

引理 3 设 $y\in C[a,b]$，则下面方程：

$$\begin{cases} D_{a^+}^{\alpha;\psi}x(t)+(-1)^{k-1}y(t)=0, & t\in[a,b]. \\ x_\psi^{[i]}(a)=0, & i=0,1,\dots,n-k-1. \\ x_\psi^{[j]}(b)=0, & j=0,1,\dots,k-1. \end{cases} \tag{4}$$

有唯一解：

$$x(t)=\int_a^b G(\phi(t),\phi(s))\phi'(s)y(s)ds$$

其中 $G(t,s)$ 为：

$$G(t,s)=\eta(-1)^{k-1}\begin{cases} -(t-s)^{\alpha-1}+\sum_{i=0}^{k-1}\frac{\Gamma(\alpha)(1-s)^{\alpha-i-1}\upsilon_i(t)}{\Gamma(\alpha-i)}, & 0\le s\le t\le 1. \\ \sum_{i=0}^{k-1}\frac{\Gamma(\alpha)(1-s)^{\alpha-i-1}\upsilon_i(t)}{\Gamma(\alpha-i)}, & 0\le t<s\le 1. \end{cases} \tag{5}$$

其中 $\phi(t)=\frac{\psi(t)-\psi(a)}{\psi(b)-\psi(a)}$， $\upsilon_i(t)=\frac{\Gamma(\alpha-i)(t-1)^i}{\Gamma(\alpha-k)\Gamma(k-i)i!}\int_0^t u^{\alpha-k-1}(1-u)^{k-1-i}du\,(\mathrm{i}=0,1,\dots)$，常数 $\eta=\frac{(\psi(b)-\psi(a))^\alpha}{\Gamma(\alpha)}$。

证明：由引理 1，并带入条件 $x_\psi^{[i]}(a)=0\,(i=0,1,\dots,n-k-1)$。则：

$$x(t)=(-1)^k I_{a^+}^{\alpha;\psi}y(t)+\sum_{i=1}^{k}c_i(\phi(t))^{\alpha-i} \tag{6}$$

由 $\upsilon_i(t)$ 的定义可知 $\upsilon_i^{(j)}(1)=\delta_{ij}\,(0\le j\le k-1)$，不难证明函数组 $\upsilon_i(\phi(t))\,(i=0,1,\dots,k-1)$ 与 $(\phi(t))^{\alpha-i}\,(i=1,2,\dots,k)$ 可构成相同的线性空间，则存在 $\tilde{c}_1,\ \tilde{c}_2,\dots,\ \tilde{c}_k$ 将上式改写为：

$$x(t)=(-1)^k I_{a^+}^{\alpha;\psi}y(t)+\sum_{i=1}^{k}\tilde{c}_i\upsilon_i(\phi(t)) \tag{7}$$

带入边界条件 $x_\psi^{[j]}(b)=0\,(i=0,1,\dots,k-1)$ 可得：

$$\tilde{c}_j=(-1)^{k-1}(\psi(b)-\psi(a))^\alpha\int_a^b\frac{(1-\phi(s))^{\alpha-j-1}}{\Gamma(\alpha-j)}\phi'(s)y(s)ds \tag{8}$$

因此可得：

$$x(t)=\int_a^b G(\phi(t),\phi(s))\phi'(s)y(s)ds \tag{9}$$

引理 3 格林函数 $G(t,s)$ 具有以下性质：

$$\eta\zeta_1(1-s)\zeta_1(t)\le G(t,s)\le\eta\varrho\zeta_2(s)\zeta_1(t) \tag{10}$$

其中，函数 ζ_1,ζ_2 的表达式为 $\zeta_1(t)=t^{\alpha-k}(1-t)^k,\zeta_2(t)=t^{k-1}(1-t)^{\alpha-k-1}$， $\varrho=\max\{\varrho_1,\varrho_2\}$，这里

$$\varrho_1=\frac{1}{k!}(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k),\varrho_2=\frac{1}{(k-1)!}(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)。$$

证明：对于 $t=0$ 或者 $s=1$ 时，不难得出 $G(t,s)=0$，此时结论成立。当 $t\in(0,1)$ 时。为了方便求解，令 $\chi(t)=(\max\{t,0\})^{\alpha-1}$，则 $\chi\in C^k(-\infty,1]$，设：

$$\Lambda(t,s)=\frac{t-s}{t(1-s)} \tag{11}$$

因为

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma(\alpha)(1-s)^{\alpha-i-1}\upsilon_i(t)}{\Gamma(\alpha-i)}&=\frac{C_{k-1}^i\Gamma(\alpha)(t-1)^i(1-s)^{\alpha-i-1}}{\Gamma(k)\Gamma(\alpha-k)}\int_0^1 t^{\alpha-k}u^{\alpha-k-1}(1-tu)^{k-i-1}du\\&=\frac{\Gamma(\alpha)t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(k)\Gamma(\alpha-k)}\int_0^1 u^{\alpha-k-1}C_{k-1}^i\left(\frac{t-1}{t(1-s)}\right)^i\left(\frac{1}{t}-u\right)^{k-i-1}du\end{aligned} \tag{12}$$

由此可得

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{k-1}\frac{\Gamma(\alpha)(1-s)^{\alpha-i-1}\upsilon_i(t)}{\Gamma(\alpha-i)}&=\frac{\Gamma(\alpha)t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(k)\Gamma(\alpha-k)}\int_0^1 u^{\alpha-k-1}(\Lambda(t,s)-u)^{k-1}du\\&=\frac{\Gamma(\alpha)t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(k)\Gamma(\alpha-k)}\sum_{i=0}^{k-1}\frac{\Gamma(k)\Gamma(\alpha-k)\chi^{(i)}(1)(\Lambda(t,s)-1)^i}{\Gamma(\alpha)i!}\\&=t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-1}\sum_{i=0}^{k-1}\frac{\chi^{(i)}(1)(\Lambda(t,s)-1)^i}{i!}\end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}G(t,s)&=\eta(-1)^{k-1}(-\chi(\Lambda(t,s))+\sum_{i=0}^{k-1}\frac{\chi^{(i)}(1)(\Lambda(t,s)-1)^i}{i!}(1-s)^{\alpha-1}t^{\alpha-1}\\&=\frac{\eta\int_{\Lambda(t,s)}^1(u-\Lambda(t,s))^{k-1}\chi^{(k)}(u)du}{(k-1)!}(1-s)^{\alpha-1}t^{\alpha-1}\end{aligned} \tag{14}$$

如果 $0<\Lambda(t,s)<1$，此时有 $t>s$，由此可得

$$\begin{aligned}G(t,s)&\le\frac{\eta\int_{\Lambda(t,s)}^1(u-\Lambda(t,s))^{k-1}\chi^{(k)}(1)du}{(k-1)!}(1-s)^{\alpha-1}t^{\alpha-1}\\&\le\eta\varrho\zeta_1(t)\zeta_2(s)\end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}G(t,s)&=\frac{\eta\int_0^1\tau^{k-1}\varphi^{(k)}(\tau+\Lambda(t,s)(1-\tau))d\tau}{(k-1)!}(1-\Lambda(t,s))^k(1-s)^{\alpha-1}t^{\alpha-1}\\&\ge\eta\frac{\int_0^1\tau^{k-1}\chi^{(k)}(\tau)d\tau}{(k-1)!}(1-s)^{\alpha-1-k}t^{\alpha-1-k}s^k(1-t)^k\\&=\eta\frac{\Gamma(\alpha-1)}{\Gamma(\alpha-k)(k-1)!}\zeta_1(t)\zeta_1(1-s)\ge\eta\zeta_1(t)\zeta_1(1-s)\end{aligned} \tag{16}$$

如果 $\Lambda(t,s)\le 0$，此时有 $t\le s$，利用类似的方法上面的两个不等式依旧成立，则引理 3 得证。

定理 1 假设 P 是正规锥，$A:P_{h,e}\to E$ 是增 $\varphi-(h,e)$ 凹算子且 $Ah\in P_{h,e}$ 定义算子 $T_\lambda x=Ax+(1-\lambda)e$，则以下结论成立：

(1)：对任意 $\lambda\in[0,1]$，T_λ 有唯一不动点 $x_\lambda\in P_{h,\lambda e}$，且在 $P_{h,\lambda e}$ 中，任给初值 x_0，构造迭代序列 $x_{n+1}=T_\lambda x_n$，都有 $x_n\to x_\lambda\,(n\to\infty)$。

(2)：对任意 $0<\lambda_1\le\lambda_2<1$，则(1)中给出的给出对应的唯一解 $x_{\lambda_1},x_{\lambda_2}$ 满足关于 λ_1,λ_2,e 的不等式 $x_{\lambda_1}+\lambda_1 e\ge x_{\lambda_2}+\lambda_2 e$。

(3)：如果存在 $\beta\in(0,1)$ 使得 $\varphi(\tau)\ge\tau^{\beta}$ 则(1)中给出的给出对应的唯一解 x_λ 在 $\lambda\in(0,1)$ 上连续。

证明：根据算子 T_λ 的定义，不难证明 $T_\lambda:P_{h,\lambda e}\to E$ 是增算子且 $T_\lambda h\in P_{h,\lambda e}$。对任意的 $\lambda\in[0,1]$ 以及 $x\in P_{h,\lambda e},\tau\in(0,1)$，有

$$\begin{aligned}T_\lambda\left(\tau(x+\lambda e)-\lambda e\right)&=A\left(\tau(x+\lambda e)-\lambda e\right)+(1-\lambda)e\\&\ge A\left(\tau(x+e)-e\right)+(1-\lambda)e\\&\ge\varphi(\tau)(Ax+e)-\lambda e=\varphi(\tau)(T_\lambda x+\lambda e)-\lambda e\end{aligned}\tag{17}$$

因此，T_λ 是 $\varphi-(h,\lambda e)$ 算子。由引理 2 可知，结论(1)成立。由 $x_{\lambda_i}+\lambda_i e\in P_h\,(i=1,2)$，令 $\tau_*=\sup\left\{\tau>0\,\middle|\,x_{\lambda_1}+\lambda_1 e\ge\tau\left(x_{\lambda_2}+\lambda_2 e\right)\right\}$。则 $\tau_*>0$，如果 $\tau_*<1$，因为 $\lambda_2\ge\lambda_1$，则

$$\begin{aligned}x_{\lambda_1}+\lambda_1 e&\ge A\left(\tau_*\left(x_{\lambda_2}+\lambda_2 e\right)-\lambda_2 e\right)+e\\&\ge\varphi(\tau_*)\left(Ax_{\lambda_2}+e\right)=\varphi(\tau_*)\left(x_{\lambda_2}+\lambda_2 e\right)\end{aligned}\tag{18}$$

因为 $\varphi(\tau_*)>\tau_*$，这与我们的已知条件矛盾。因此 $t_*\ge1$。所以有 $x_{\lambda_1}+\lambda_1 e\ge x_{\lambda_2}+\lambda_2 e$，结论(2)成立。针对性质(3)，我们假设 $0<\lambda_1\le\lambda_2<1$，令 $\tilde{\tau}_*=\sup\left\{\tau>0\,\middle|\,x_{\lambda_2}+\lambda_2 e\ge\tau\left(x_{\lambda_1}+\lambda_1 e\right)\right\}$，则 $x_{\lambda_2}+\lambda_2 e\ge\tilde{\tau}_*\left(x_{\lambda_1}+\lambda_1 e\right)$，因为 $x_{\lambda_1}+\lambda_1 e\in P$，不难证明对任意 $\tau\in(0,1)$，有

$$\tau\left(x_{\lambda_1}+\lambda_1 e\right)-\lambda_2 e\ge\frac{\tau(1-\lambda_2)}{1-\lambda_1}\left(x_{\lambda_1}+e\right)-e\tag{19}$$

由此可得：

$$\begin{aligned}x_{\lambda_2}+\lambda_2 e&\ge A\left(\tilde{\tau}_*\left(x_{\lambda_1}+\lambda_1 e\right)-\lambda_2 e\right)+e\ge A\left(\frac{\tilde{\tau}_*(1-\lambda_2)}{1-\lambda_1}\left(x_{\lambda_1}+e\right)-e\right)+e\\&\ge\varphi\left(\frac{\tilde{\tau}_*(1-\lambda_2)}{1-\lambda_1}\right)\left(Ax_{\lambda_1}+e\right)\ge\left(\frac{\tilde{\tau}_*(1-\lambda_2)}{1-\lambda_1}\right)^{\beta}\left(x_{\lambda_1}+\lambda_1 e\right)\end{aligned}\tag{20}$$

如果 $\tilde{\tau}_*<\left(\frac{1-\lambda_2}{1-\lambda_1}\right)^{\frac{\beta}{1-\beta}}$，则有 $\left(\frac{\tilde{\tau}_*(1-\lambda_2)}{1-\lambda_1}\right)^{\beta}>\tilde{\tau}_*$，这与假设矛盾。因此有

$$x_{\lambda_2}+\lambda_2 e\ge\tilde{\tau}_*\left(x_{\lambda_1}+\lambda_1 e\right)\ge\left(\frac{1-\lambda_2}{1-\lambda_1}\right)^{\frac{\beta}{1-\beta}}\left(x_{\lambda_1}+\lambda_1 e\right)$$

根据结论(2)并考虑到 λ_1,λ_2 的相对性，令 u,v 分别是 $1,\left(\frac{1-\lambda_2}{1-\lambda_1}\right)^{\frac{\beta}{1-\beta}}$ 之间的最小值与最大值，不难得到对于任意的 $0<\lambda_1,\lambda_2<1$，有 $u\left(x_{\lambda_1}+\lambda_1 e\right)\le x_{\lambda_2}+\lambda_2 e\le v\left(x_{\lambda_1}+\lambda_1 e\right)$。设锥 P 的正规常数为 N，因此：

$$\begin{aligned}\left\|x_{\lambda_1}-x_{\lambda_2}\right\|&\le\left\|x_{\lambda_1}+\lambda_1 e-\left(x_{\lambda_2}+\lambda_2 e\right)\right\|+\left\|\lambda_1 e-\lambda_2 e\right\|\\&\le N|u-v|\cdot\left\|x_{\lambda_1}+\lambda_1 e\right\|+|\lambda_1-\lambda_2|\cdot\|e\|\end{aligned}\tag{21}$$

于是有 $\lim\limits_{\lambda_2\to\lambda_1}\left\|x_{\lambda_1}-x_{\lambda_2}\right\|=0$，因此性质(3)成立。

3. 主要结果

在实巴拿赫空间 E 中考虑主要定理，设 $E=\left\{x\,\middle|\,x\in C[a,b]\right\}$，且 E 的范数为 $\|x\|=\sup\{|x(t)|\,|\,t\in[a,b]\}$。

定义 $P=\left\{x\in E\left|x(t)\geq 0,\forall t\in[a,b]\right.\right\}$。显然，$P$ 是 E 中的正规锥。对任意 $t\in[a,b]$，令：

$$e(t)=\int_a^b G(\phi(t),\phi(s))q(s)\phi'(s)ds\leq \varrho\eta\int_a^b \zeta_1(\phi(t))\zeta_2(\phi(s))\phi'(s)q(s)ds$$

取 $h(t)=M^*\zeta_1(\phi(t))$，其中 $M^*=\varrho\eta\int_a^b\zeta_2(\phi(s))\phi'(s)q(s)ds$。显然有 $e(t)\leq h(t)$。由 $G(t,s)$ 的非负性和 $q(s)\geq 0(s\in[0,1])$，可知 $e(t)\geq 0$，进而有 $\theta\leq e\leq h$。

定义算子 $T_\lambda x=Ax+(1-\lambda)e$，其中算子 A 为：

$$(Ax)(t)=\int_a^b G(\phi(t),\phi(s))\phi'(s)f(s,x(s))ds-e(t)$$

定理 2 假设满足如下条件：

(i)：$f:[a,b]\times[-M^*,+\infty)\to[0,+\infty)$ 是连续函数，关于变量 $x\in[-M^*,+\infty)$ 递增，且对 $t\in[a,b]$ 有 $f(t,0)\not\equiv 0$。

(ii)：对任意 $\tau\in(0,1),x\in[-M^*,+\infty),z\in[0,M^*]$，存在 $\varphi(\tau)\in(\tau,1]$ 使得：

$$f(t,\tau x+(\tau-1)z)\geq\varphi(\tau)f(t,x)$$

则有以下结论成立：

(1)：对任意 $\lambda\in[0,1]$，方程(3)在 $P_{h,\lambda e}$ 有唯一解 x_λ，且在 $P_{h,\lambda e}$ 中，任给初值 x_0，构造迭代序列 $x_{n+1}=T_\lambda x_n$，都有 $x_n\to x_\lambda\ (n\to\infty)$。

(2)：方程(3)的唯一解 x_λ 满足 $x_\lambda+\lambda e$ 随着 $\lambda\in[0,1]$ 的增加而减小。

(3)：如果存在 $\beta\in(0,1)$ 使得 $\varphi(\tau)\geq\tau^\beta$。则方程(3)的唯一解 x_λ 在 $\lambda\in(0,1)$ 上连续。

证明：很明显方程(3)的解可化为算子 T_λ 的不动点问题。根据假设，很明显有 $A:P_{h,e}\to E$。结合定理1，我们从三个方面来验证算子 A 满足相应条件。

首先，我们证明 $Ah\in P_{h,e}$。由 $G(t,s)$ 的性质和条件(i)，有：

$$\begin{aligned}(Ah)(t)+e(t)&=\int_a^b G(\phi(t),\phi(s))\phi'(s)f(s,h(s))ds\\&\leq\varrho\eta\int_a^b\zeta_1(\phi(t))\zeta_2(\phi(s))\phi'(s)f(s,h(s))ds\\&\leq\frac{\varrho\eta}{M^*}\int_a^b\zeta_2(\phi(s))\phi'(s)f(s,M^*)ds\cdot h(t)\end{aligned}\tag{22}$$

$$\begin{aligned}A(h)(t)&=\int_a^b G(\phi(t),\phi(s))\phi'(s)f(s,M^*\zeta_1(\phi(s)))ds\\&\geq\eta\int_a^b\zeta_1(\phi(t))\zeta_1(1-\phi(s))\phi'(s)f(s,0)ds\\&=\frac{\eta}{M^*}\int_a^b\zeta_1(1-\phi(s))\phi'(s)f(s,0)ds\cdot h(t)\end{aligned}\tag{23}$$

令：

$$l_1=\frac{\varrho\eta}{M^*}\int_a^b\zeta_2(\phi(s))\phi'(s)f(s,M^*)ds,\quad l_2=\frac{\eta}{M^*}\int_a^b\zeta_1(1-\phi(s))\phi'(s)f(s,0)ds.$$

则有 $l_2h(t)\leq Ah+e\leq l_1h(t)$。因此有 $Ah\in P_{h,e}$。第二步我们证明 $A:P_{h,e}\to E$ 是增算子。对任意的 $u,v\in P_{h,e}$ 假设 $u\geq v$，根据条件(i)可以得到：

$$\begin{aligned}(Au)(t)&=\int_a^b G(\phi(t),\phi(s))\phi'(s)f(s,u(s))ds-e(t)\\&\geq\int_a^b G(t,s)\phi'(s)f(s,v(s))ds-e(t)=(Au)(t)\end{aligned}$$

因此 $A:P_{h,e}\to E$ 是增算子。最后我们证明算子 A 是 $\varphi-(h,e)$ 算子。由条件(ii)可得：

$$\begin{aligned} A\left(\tau\left(x+e\right)-e\right) &= \int_a^b G\left(\phi\left(t\right),\phi\left(s\right)\right)\phi'\left(s\right) f\left(s,\tau x\left(s\right)+\left(\tau-1\right)e\left(s\right)\right)ds - e\left(t\right) \\ &\geq \varphi\left(\tau\right)\int_a^b G(\phi\left(t\right),\phi\left(s\right))\phi'\left(s\right) f\left(s,x\left(s\right)\right)ds - e\left(t\right) \\ &= \varphi\left(\tau\right)\left(A\left(x\right)+e\right)-e \end{aligned} \tag{24}$$

于是结论成立，根据定理 1，我们可知定理 2 的结论成立。

4. 应用举例

考虑如下问题：

$$\begin{cases} D_{1^+}^{\frac{7}{2};\log t} u\left(t\right)+2\lambda = t^2\left(x\left(t\right)+\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(t-1\right)\left(x\left(t\right)+1\right)^{\frac{1}{3}}, \quad t\in\left[1,e\right]. \\ u\left(1\right)=u\left(e\right)=u'\left(1\right)=u'\left(e\right)=0 \end{cases} \tag{25}$$

结论：对任意的 $\lambda\in\left[0,1\right]$，方程(25)在集合 $P_{h,\lambda e'}$ (这里为了将与自然对数 e 进行区分，我们将其写为 $e\left(t\right)$)上有唯一解，且 $x_\lambda+\lambda e'$ 随着 $\lambda\in\left[0,1\right]$ 增加而减小， x_λ 在 $\lambda\in\left(0,1\right)$ 连续。其中，$e'\left(t\right)=2\int_1^e G\left(\log t,\log s\right)s^{-1}ds,\ \ h\left(t\right)=\dfrac{32}{45\sqrt{\pi}}\left(\log t\right)^{\frac{3}{2}}\left(1-\log t\right)^2$。其中 $G\left(t,s\right)$ 为第二小节中将对应值带入的函数。

证明：与方程(3)对比，则不难得出 $\alpha=\dfrac{7}{2}$， $k=2$， $\left(\dfrac{d}{tdt}\right)u\left(t\right)\big|_{t=\xi}=0$， 区间 $\left[a,b\right]=\left[1,e\right]$， 函数 $\psi\left(t\right)=\log t,\ f\left(t,x\right)=t^2\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(t-1\right)\left(x+1\right)^{\frac{1}{3}}$， $q\left(s\right)=2$。于是有 $\eta=\dfrac{8}{15\sqrt{\pi}}$， $\varrho=\dfrac{5}{2}$。 $M^*=\dfrac{32}{45\sqrt{\pi}}\approx 0.401$，从而不难得出， $f\left(t,x\right)$ 满足 $f:\left[1,e\right]\times\left[-M^*,+\infty\right)\to\left[0,+\infty\right)$，且对任意的 $t\in\left[1,e\right]$， $f\left(t,x\right)$ 关于 x 是增的，则第三节中的条件(i)满足。另一方面，对任意的 $t\in\left[1,e\right]$ $\tau\in\left(0,1\right)$, $x\in\left[0,+\infty\right)$, 以及 $z\in\left[0,M^*\right]$，有：

$$\begin{aligned} f\left(t,\tau x+\left(\tau-1\right)z\right) &= t^2\left(\tau x+\left(\tau-1\right)z+\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(t-1\right)\left(\tau x+\left(\tau-1\right)z+1\right)^{\frac{1}{3}} \\ &\geq t^2\left(\tau\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)^{\frac{1}{2}}+\left(t-1\right)\left(\tau\left(x+1\right)\right)^{\frac{1}{3}} \geq \tau^{\frac{1}{3}} f\left(t,x\right) \end{aligned}$$

根据定理 2，可得结论正确。

5. 结论

本文研究了一类含有参数的 ψ-黎曼刘维尔型分数阶微分方程多点边值问题，在边界条件的形式进行了拓展。同时，在一类集合 $P_{h,e}$ 上的不动点定理基础之上，本文在含有参数的集合 $P_{h,\lambda e}$ 上对上述不动点定理进行了推广，得到了不动点的存在唯一性以及该不动点关于参数的单调性与连续性，丰富了含有参数的不动点理论。最后利用该结论证明了方程(3)在集合 $P_{h,\lambda e}$ 上有唯一解以及解关于参数的性质。

本文的方法只是从理论上研究了解的存在唯一性，没有给出的迭代序列的收敛速度，这可以作为后续的研究方向。另外，根据本文给出的关于格林函数性质的分析，也可以尝试使用其他的不动点理论来进行研究，得到一些非线性项具有其他性质时解的存在性与唯一性。

基金项目

山西省青年科学研究项目，项目编号 202103021223060。

参考文献

[1] Chen, Y., Liu, F.W., Yu, Q. and Li, T.Z. (2021) Review of Fractional Epidemic Models. *Applied Mathematical Modelling*, **97**, 281-307. https://doi.org/10.1016/j.apm.2021.03.044

[2] Karaagac, B., Owolabi, K.M. and Nisar, K.S. (2020) Analysis and Dynamics of Illicit Drug Use Described by Fractional Derivative with Mittag-Leffler Kernel. *CMC-Computers*, *Materials & Continua*, **65**, 1905-1924. https://doi.org/10.32604/cmc.2020.011623

[3] Qureshi, S. and Yusuf, A. (2019) Modeling Chickenpox Disease with Fractional Derivatives: From Caputo to Atangana-Baleanu. *Chaos*, *Solitons & Fractals*, **122**, 111-118. https://doi.org/10.1016/j.chaos.2019.03.020

[4] Geng, L.L., Ji, Z.X., Yuan, Y.H. and Yin, Y.L. (2017) Fractional-Order Sparse Representation for Image Denoising. *IEEE*/*CAA Journal of Automatica Sinica*, **5**, 555-563. https://doi.org/10.1109/JAS.2017.7510412

[5] Urs, C. (2013) Coupled Fixed Point Theorems and Applications to Periodic Boundary Value Problems. *Miskolc Mathematical Notes*, **14**, 323-333. https://doi.org/10.18514/MMN.2013.598

[6] Yang, H., Agarwal, R.P., Nashine, H.K. and Liang, Y. (2017) Fixed Point Theorems in Partially Ordered Banach Spaces with Applications to Nonlinear Fractional Evolution Equations. *Journal of Fixed Point Theory and Applications*, **19**, 1661-1678. https://doi.org/10.1007/s11784-016-0316-x

[7] Ameen, I. and Novati, P. (2017) The Solution of Fractional Order Epidemic Model by Implicit Adams Methods. *Applied Mathematical Modelling*, **43**, 78-84. https://doi.org/10.1016/j.apm.2016.10.054

[8] Zhou, Y.M. and He, G.P. (2017) On the Uniqueness of Solutions for a Class of Fractional Differential Equations. *Applied Mathematics Letters*, **74**, 68-73. https://doi.org/10.1016/j.aml.2017.05.011

[9] Zhai, C.B. and Hao, M. (2012) Fixed Point Theorems for Mixed Monotone Operators with Perturbation and Applications to Fractional Differential Equation Boundary Value Problems. *Nonlinear Analysis*, **75**, 2542-2551. https://doi.org/10.1016/j.na.2011.10.048

[10] Kilbas, A.A., Srivastava, H.M. and Trujillo, J.J. (2006) Theory and Applications of Fractional Differential Equations. In *North-Holland Mathematics Studies*, Elsevier, Amsterdam, Vol. 204, 1-352.

[11] Vanterler da C. Sousa, J. and Capelas de Oliveira, E. (2018) On the Hilfer Fractional Derivative. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **60**, 72-91. https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2018.01.005

[12] Derbazi, C., Baitiche, Z., Benchohra, M. and Cabada, A. (2020) Initial Value Problem for Nonlinear Fractional Differential Equations with Caputo Derivative via Monotone Iterative Technique. *Axioms*, **9**, 2075-1680. https://doi.org/10.3390/axioms9020057

[13] Jiang, J.Q. and Wang, H.C. (2019) Existence and Uniqueness of Solutions for a Fractional Differential Equation with Multi-Point Boundary Value Problems. *Journal of Applied Analysis and Computation*, **9**, 2156-2168. https://doi.org/10.11948/20180286l

[14] Cardone, A., Dambrosio, R. and Paternoster, B. (2019) A Spectral Method for Stochastic Fractional Differential Equations. *Applied Numerical Mathematics*, **139**, 115-119. https://doi.org/10.1016/j.apnum.2019.01.009

[15] 吴强, 黄建华. 分数阶微积分[M]. 北京: 清华大学出版社, 2016.

[16] 冯海星, 翟成波. 一类含参数分数阶微分方程边值问题正解的性质研究[J]. 应用数学和力学, 2017, 38(7): 818-826.

[17] Liu, X.P., Jia, M. and Ge, W.G. (2017) The Method of Lower and Upper Solutions for Mixed Fractional Four-Point Boundary Value Problem with p-Laplacian Operator. *Applied Mathematics Letters*, **65**, 56-62. https://doi.org/10.1016/j.aml.2016.10.001

[18] Tang, X.S. (2016) Existence of Solutions of Four-Point Boundary Value Problems for Fractional Differential Equations at Resonance. *Journal of Applied Mathematics and Computation*, **51**, 145-160. https://doi.org/10.1007/s12190-015-0896-4