Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2024, 13(5), 1927-1932
Published Online May 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2024.135180

一类拟线性椭圆方程的规范基态解

吴毛毛[1,2]

[1]浙江师范大学数学科学学院，浙江 金华
[2]嘉兴大学数据科学学院，浙江 嘉兴

收稿日期：2024年4月11日；录用日期：2024年5月4日；发布日期：2024年5月11日

摘 要

本文研究了拟线性椭圆方程

$$-\Delta u-\Delta\left(u^2\right)u=\lambda u+\sum_{i=1}^{k}|u|^{p_i-2}u-\sum_{i=1}^{l}|u|^{q_i-2}u,\quad x\in\mathbb{R}^N,$$

其中 $N\geq 3,\ 2<p_i<2+\frac{4}{N},\ \min_{1\leq i\leq k}p_i<q_i<\frac{4N}{N-2}$，应用变分方法证明了规范基态解的存在性。

关键词

拟线性椭圆方程，规范基态解，变分方法

Normalized Ground State Solution for a Class of Quasilinear Elliptic Equations

Maomao Wu

[1]School of Mathematics Sciences, Zhejiang Normal University, Jinhua Zhejiang
[2]College of Data Science, Jiaxing University, Jiaxing Zhejiang

Received: Apr. 11th, 2024; accepted: May 4th, 2024; published: May 11th, 2024

Abstract

We study the quasilinear elliptic equation

$$-\Delta u-\Delta\left(u^2\right)u=\lambda u+\sum_{i=1}^{k}|u|^{p_i-2}u-\sum_{i=1}^{l}|u|^{q_i-2}u,\quad x\in\mathbb{R}^N,$$

where $N\geq 3,\ 2<p_i<2+\frac{4}{N},\ \min_{1\leq i\leq k}p_i<q_i<\frac{4N}{N-2}$**, and establish the existence of normalized ground state solution.**

文章引用: 吴毛毛. 一类拟线性椭圆方程的规范基态解[J]. 应用数学进展, 2024, 13(5): 1927-1932.
DOI: 10.12677/aam.2024.135180

Keywords

Quasilinear Elliptic Equation, Normalized Ground State Solution, Variational Methods

1. 引言

拟线性椭圆方程

$$-\Delta u-\Delta\left(u^2\right)u=\lambda u+|u|^{p-2}u,\quad x\in\mathbb{R}^N \tag{1}$$

模拟了数学物理中的许多现象，可以刻画等离子物理中超流体膜的性态。此外，它在耗散量子力学、凝聚态理论、海森堡铁磁体和磁振子的量子理论中都有着重要的应用，详见文献[1] [2] [3]。

当λ给定时(固定频率问题)，方程(1)解的存在性和多重性在过去几十年得到了广泛且深入的研究。文献[4] [5]利用约束极小化方法证明了方程(1)存在正的基态解。文献[6] [7]利用变量替换的方法证明了方程(1)正解的存在性。文献[8]利用 Nehari 流形证明了方程(1)正解和变号解的存在性。文献[9] [10]利用扰动方法证明了无穷多解和无穷多变号解的存在性。其他相关结果参见这些文献的引用。

近年来，方程(1)规范解的存在性、个数及渐进性质吸引了国内外专家学者的注意。这里，规范解是指满足约束条件

$$\int_{\mathbb{R}^N}u^2\mathrm{d}x=a>0$$

的解，方程中的λ作为拉格朗日乘子。文献[11]证明了$4+\frac{4}{N}$是此类问题的质量临界指标。下面，我们将从质量次临界、质量临界和质量超临界三个方面简要介绍相关结果。

文献[11] [12] [13] [14] [15]研究了质量次临界情形，即$2<p<4+\frac{4}{N}$。当$2<p<2+\frac{4}{N}$时，文献[11]利用约束极小化方法证明了规范基态解的存在性，而文献[12]利用变量替换和指标理论证明了方程(1)存在无穷多规范解。当$2+\frac{4}{N}\le p<4+\frac{4}{N}$时，文献[11] [13] [14]证明了：质量较小时，极小能量等于零且不可达；质量较大时，极小能量小于零且可达，从而得到了规范基态解的存在性。文献[12]证明了质量越来越大时，方程(1)存在越来越多的规范解。其它结果参见文献[15]。

文献[13] [14] [16]研究了质量临界情形，即$p=4+\frac{4}{N}$。文献[13] [14]证明了极小能量不可达。文献[16]证明了质量较小时方程(1)不存在规范解。当质量较大时，文献[16]利用扰动方法证明了规范基态解的存在性，并给出了规范解的渐进性质。

对于质量超临界情形，即$p>4+\frac{4}{N}$，相关结果寥寥无几。当$N\le 3$且非线性项是 Sobolev 次临界的，文献[16]应用扰动方法和指标理论证明了规范基态解和无穷多规范解的存在性。其它结果参见文献[17]。

上述文献仅仅考虑了特殊的非线性项，当拟线性椭圆方程的非线性项同时涉及质量次临界、质量临界和质量超临界时，尚无相关结果。本文考虑带混合非线性项的拟线性椭圆方程

$$-\Delta u-\Delta\left(u^2\right)u=\lambda u+\sum_{i=1}^{k}|u|^{p_i-2}u-\sum_{i=1}^{l}|u|^{q_i-2}u,\quad x\in\mathbb{R}^N, \tag{2}$$

其中 $N\geq 3$，$2<p_i<2+\frac{4}{N}$，$\min\limits_{1\leq i\leq k} p_i<q_i<\frac{4N}{N-2}$。我们研究方程(2)规范基态解的存在性。值得注意的是，方程(2)对应的能量泛函更加复杂，研究过程中需要更精细的估计。记

$$X=\left\{u\in H^1\left(\mathbb{R}^N\right)\middle|\int_{\mathbb{R}^N}u^2|\nabla u|^2\mathrm{d}x<\infty\right\},$$

$$S_a=\left\{u\in X\middle|\int_{\mathbb{R}^N}u^2\mathrm{d}x=a>0\right\},$$

并定义泛函

$$I(u)=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^N}u^2|\nabla u|^2\mathrm{d}x-\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{p_i}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{p_i}\mathrm{d}x+\sum_{i=1}^{l}\frac{1}{q_i}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{q_i}\mathrm{d}x.$$

显然，要获得方程(2)的规范解，需找到泛函 I 限制在 S_a 上的临界点。

定理 1.1. 若 $u\in S_a$ 满足

$$\left(I|_{S_a}\right)'(u)=0\text{且}I(u)=\inf\left\{I(v)\middle|v\in S_a,\left(I|_{S_a}\right)'(v)=0\right\},$$

则称 u 是方程(2)的规范基态解。

本文的主要结果如下：

定理 1.2. $\forall a>0$，方程(2)存在一个规范基态解。

本文的记号： $\|\cdot\|_{L^q(\mathbb{R}^N)}$ 表示 $L^q\left(\mathbb{R}^N\right)$ 中的标准范数，$\rightharpoonup$ 表示弱收敛，$\to$ 表示强收敛，$o_n(1)$ 表示当 $n\to\infty$ 时趋于 0 的量。

2. 定理 1.2 的证明

首先回顾著名的 Gagliardo-Nirenberg 不等式(见[18], Theorem 2.1)。

引理 2.1. 设 $2<p<\frac{4N}{N-2}$。若 $u\in L^1\left(\mathbb{R}^N\right)$ 且 $\nabla u\in L^2\left(\mathbb{R}^N\right)$，则

$$\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{\frac{p}{2}}\mathrm{d}x\leq\frac{C(p,N)}{\|Q_p\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}^{\frac{p-2}{N+2}}}\left(\int_{\mathbb{R}^N}|u|\mathrm{d}x\right)^{\frac{4N-(N-2)p}{2(N+2)}}\left(\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{N(p-2)}{2(N+2)}},$$

其中

$$C(p,N)=\frac{p(N+2)}{\left[4N-(N-2)p\right]^{\frac{4-N(p-2)}{2(N+2)}}\left[2N(p-2)\right]^{\frac{N(p-2)}{2(N+2)}}},$$

Q_p 是方程

$$-\Delta u+1=u^{\frac{p}{2}-1},\quad x\in\mathbb{R}^N$$

唯一的非负径向解。

由引理 2.1 知，$\forall u\in X$，有

$$\frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^p\mathrm{d}x\leq K(p,N)\left(\int_{\mathbb{R}^N}u^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{4N-(N-2)p}{2(N+2)}}\left(\int_{\mathbb{R}^N}u^2|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{N(p-2)}{2(N+2)}},\tag{3}$$

其中 $K(p,N)>0$ 是依赖于 p 和 N 的常数。定义

$$m_a = \inf_{u \in S_a} I(u).$$

引理 2.2. $m_a > -\infty$。

证明： 由(3)可知，$\forall u \in S_a$，有

$$I(u) \ge \int_{\mathbb{R}^N} u^2 |\nabla u|^2 \mathrm{d}x - \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{p_i} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p_i} \mathrm{d}x$$
$$\ge \int_{\mathbb{R}^N} u^2 |\nabla u|^2 \mathrm{d}x - \sum_{i=1}^{k} K(p_i, N) a^{\frac{4N-(N-2)p_i}{2(N+2)}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} u^2 |\nabla u|^2 \mathrm{d}x \right)^{\frac{N(p_i-2)}{2(N+2)}}.$$

因为 $2 < p_i < 2 + \frac{4}{N}$，故 $0 < \frac{N(p_i-2)}{2(N+2)} < 1$。因此，泛函 I 在 S_a 上是下方有界的。故 $m_a > -\infty$。证毕。

引理 2.3. $m_a < 0$。

证明： 任取 $u \in S_a$。当 $s > 0$ 时，记

$$(s * u)(x) = s^{\frac{N}{2}} u(sx), \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

则 $s * u \in S_a$，并且

$$I(s*u) = \frac{s^2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \mathrm{d}x + s^{N+2} \int_{\mathbb{R}^N} u^2 |\nabla u|^2 \mathrm{d}x$$
$$- \sum_{i=1}^{k} \frac{s^{\frac{N(p_i-2)}{2}}}{p_i} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p_i} \mathrm{d}x + \sum_{i=1}^{l} \frac{s^{\frac{N(q_i-2)}{2}}}{q_i} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{q_i} \mathrm{d}x.$$

由已知条件，

$$\min_{1 \le i \le k} \frac{N(p_i-2)}{2} < \min\left\{ 2, \frac{N(q_1-2)}{2}, \cdots, \frac{N(q_l-2)}{2} \right\}.$$

故 $s > 0$ 充分小时，有 $I(s*u) < 0$。因此，$m_a < 0$。证毕。

为了证明 m_a 的可达性，我们需要如下引理(见[11], Lemma 4.3)。

引理 2.4. 定义泛函

$$\Phi(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^N} u^2 |\nabla u|^2 \mathrm{d}x.$$

若在 X 中 $u_n \rightharpoonup u$，则

$$\Phi(u) \le \liminf_{n \to \infty} \Phi(u_n).$$

引理 2.5. 极小 m_a 是可达的，即存在 $u \in S_a$ 使得 $I(u) = m_a$。

证明： 设 $\{u_n\} \subset S_a$ 是 m_a 的极小化序列。通过 Schwarz 对称化，不妨设 $\{u_n\}$ 是径向函数列。因为

$$m_a + o_n(1) = I(u_n)$$
$$\ge \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 \mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^N} u_n^2 |\nabla u_n|^2 \mathrm{d}x$$
$$- \sum_{i=1}^{k} K(p_i, N) a^{\frac{4N-(N-2)p_i}{2(N+2)}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} u_n^2 |\nabla u_n|^2 \mathrm{d}x \right)^{\frac{N(p_i-2)}{2(N+2)}},$$

并且 $0 < \frac{N(p_i-2)}{2(N+2)} < 1$，序列 $\{u_n\}$ 在 X 中有界。通过取子列，不妨设在 X 中 $u_n \rightharpoonup u$，在 $L^r(\mathbb{R}^N)$ 中

$u_n \to u$，这里 $2<r<\frac{4N}{N-2}$。因此，由引理 2.4 可知

$$I(u) \le \liminf_{n\to\infty} I(u_n) = m_a. \tag{4}$$

我们断言 $u \in S_a$。事实上，(4)和引理 2.3 蕴含了 $u \ne 0$。假设

$$\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 = \delta \in (0,a).$$

令 $\tau = \frac{a}{\delta} > 1$ 及 $\tilde{u}(x) = u\left(\tau^{-\frac{1}{N}} x\right)$， $x \in \mathbb{R}^N$。则 $\tilde{u} \in S_a$，并且

$$\begin{aligned} I(\tilde{u}) &= \frac{1}{2}\tau^{1-\frac{2}{N}} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \mathrm{d}x + \tau^{1-\frac{2}{N}} \int_{\mathbb{R}^N} u^2 |\nabla u|^2 \mathrm{d}x \\ &\quad - \tau \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{p_i} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p_i} \mathrm{d}x + \tau \sum_{i=1}^{l} \frac{1}{q_i} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{q_i} \mathrm{d}x \\ &< \tau I(u) < I(u) \le m_a. \end{aligned}$$

这与 m_a 的定义矛盾。因此，$\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 = a$，即 $u \in S_a$。

因为 $u \in S_a$，故 $I(u) \ge m_a$，结合(4)，得 $I(u) = m_a$。证毕。

定理 1.2 的证明： 由引理 2.5 知，m_a 可达。设 $u \in S_a$ 是 m_a 的达到函数。由标准的论证，存在 $\lambda \in \mathbb{R}$ 使得

$$-\Delta u - \Delta(u^2) u = \lambda u + \sum_{i=1}^{k} |u|^{p_i-2} u - \sum_{i=1}^{l} |u|^{q_i-2} u, \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

因此，u 是方程(2)的规范基态解。

注 2.1. 规范基态解 u 对应的拉格朗日乘子 $\lambda < 0$。事实上，u 满足 Pohožaev 恒等式

$$\begin{aligned} &\frac{N-2}{2N} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \mathrm{d}x + \frac{N-2}{N} \int_{\mathbb{R}^N} u^2 |\nabla u|^2 \mathrm{d}x - \frac{\lambda}{2} \int_{\mathbb{R}^N} u^2 \mathrm{d}x \\ &= \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{p_i} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p_i} \mathrm{d}x - \sum_{i=1}^{l} \frac{1}{q_i} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{q_i} \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} 0 > m_a &= I(u) \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^N} u^2 |\nabla u|^2 \mathrm{d}x - \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{p_i} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p_i} \mathrm{d}x + \sum_{i=1}^{l} \frac{1}{q_i} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{q_i} \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{N} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \mathrm{d}x + \frac{2}{N} \int_{\mathbb{R}^N} u^2 |\nabla u|^2 \mathrm{d}x + \frac{\lambda}{2} \int_{\mathbb{R}^N} u^2 \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

从而 $\lambda < 0$。

3. 结语

本文应用变分方法研究了带混合非线性项的拟线性椭圆方程规范基态解的存在性，得到了一个创新性结果。需要指出的是，本文仅考虑了质量次临界的部分情形，即 $2 < p_i < 2 + \frac{4}{N}$。对于 $2 + \frac{4}{N} \le p_i < 4 + \frac{4}{N}$ 的情形，仍需进一步研究。

参考文献

[1] Kurihara, S. (1981) Large-Amplitude Quasi-Solitons in Superfluid Films. *Journal of the Physical Society of Japan*, **50**,

3262-3267. https://doi.org/10.1143/JPSJ.50.3262

[2] Makhankov, V. and Fedyanin V. (1984) Non-Linear Effects in Quasi-One-Dimensional Models of Condensed Matter Theory. *Physics Reports*, **104**, 1-86. https://doi.org/10.1016/0370-1573(84)90106-6

[3] Quispel, G. and Capel, H. (1982) Equation of Motion for the Heisenberg Spin Chain. *Physica A*: *Statistical Mechanics and its Applications*, **110**, 41-80. https://doi.org/10.1016/0378-4371(82)90104-2

[4] Liu, J. and Wang, Z.-Q. (2003) Soliton Solutions for Quasilinear Schrödinger Equations, I. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **131**, 441-448. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-02-06783-7

[5] Ruiz, D. and Siciliano, G. (2010) Existence of Ground States for a Modified Nonlinear Schrödinger Equation. *Nonlinearity*, **23**, 1221-1233. https://doi.org/10.1088/0951-7715/23/5/011

[6] Colin, M. and Jeanjean, L. (2004) Solutions for a Quasilinear Schrödinger Equation: A Dual Approach. *Nonlinear Analysis*, **56**, 213-226. https://doi.org/10.1016/j.na.2003.09.008

[7] Liu, J., Wang, Y. and Wang, Z.-Q. (2003) Soliton Solutions for Quasilinear Schrödinger Equations, II. *Journal of Differential Equations*, **187**, 473-493. https://doi.org/10.1016/S0022-0396(02)00064-5

[8] Liu, J., Wang, Y. and Wang, Z.-Q. (2004) Solutions for Quasilinear Schrödinger Equations via the Nehari Method. *Communications in Partial Differential Equations*, **29**, 879-901. https://doi.org/10.1081/PDE-120037335

[9] Liu, X., Liu, J. and Wang, Z.-Q. (2013) Quasilinear Elliptic Equations via Perturbation Method. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **141**, 253-263. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-2012-11293-6

[10] Jing, Y and Liu, H. (2022) Sign-Changing Solutions for a Modified Nonlinear Schrödinger Equation in $\mathbb{R}^N$. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, **61**, 144. https://doi.org/10.1007/s00526-022-02266-9

[11] Colin, M., Jeanjean, L. and Squassina, M. (2010) Stability and Instability Results for Standing Waves of Quasi-Linear Schrödinger Equations. *Nonlinearity*, **23**, 1353-1385. https://doi.org/10.1088/0951-7715/23/6/006

[12] Zhang, L., Li, Y. and Wang, Z.-Q. (2023) Multiple Normalized Solutions for a Quasi-Linear Schrödinger Equation via Dual Approach. *Topological Methods in Nonlinear Analysis*, **61**, 465-489. https://doi.org/10.12775/TMNA.2022.052

[13] Ye, H. and Yu, Y. (2021) The Existence of Normalized Solutions for L^2-Critical Quasilinear Schrödinger equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **497**, Article ID: 124839. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2020.124839

[14] Jeanjean, L. and Luo, T. (2013) Sharp Nonexistence Results of Prescribed L^2-Norm Solutions for Some Class of Schrödinger-Poisson and Quasi-Linear Equations. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, **64**, 937-954. https://doi.org/10.1007/s00033-012-0272-2

[15] Jeanjean, L. and Luo, T. and Wang, Z.-Q. (2015) Multiple Normalized Solutions for Quasi-Linear Schrödinger Equations. *Journal of Differential Equations*, **259**, 3894-3928. https://doi.org/10.1016/j.jde.2015.05.008

[16] Li, H. and Zou, W. (2023) Quasilinear Schrödinger Equations: Ground State and Infinitely Many Normalized Solutions. *Pacific Journal of Mathematics*, **322**, 99-138. https://doi.org/10.2140/pjm.2023.322.99

[17] Zhang, L., Chen, J. and Wang, Z-Q. (2023) Ground States for a Quasilinear Schrödinger Equation: Mass Critical and Supercritical Cases. *Applied Mathematics Letters*, **145**, Article ID: 108763. https://doi.org/10.1016/j.aml.2023.108763

[18] Agueh, M. (2008) Sharp Gagliardo-Nirenberg Inequalities via *p*-Laplacian Type Equations. *Nonlinear Differential Equations and Applications NoDEA*, **15**, 457-472. https://doi.org/10.1007/s00030-008-7021-4