Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2024, 13(5), 1933-1936
Published Online May 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2024.135181

关于“$3x+1$”问题的推证

杨邦绥

永州市造纸厂，湖南 永州

收稿日期：2024年4月13日；录用日期：2024年5月8日；发布日期：2024年5月14日

摘　要

对“$3x+1$”问题，通过[x]法、逆[x]法及其性质，确立[x]数，进行论证说明“$3x+1$”问题。

关键词

“$3x+1$”，[x]法，[x]数，[x]数树枝

Inference about the Issue of “$3x+1$”

Bangsui Yang

Yongzhou Paper Mill, Yongzhou Hunan

Received: Apr. 13th, 2024; accepted: May 8th, 2024; published: May 14th, 2024

Abstract

For the “$3x+1$” problem, using [x] method, inverse [x] method and their properties, this paper establish the number of [x], and provide arguments to explain the issue of “$3x+1$”.

Keywords

“$3x+1$”, [x] Method, [x] Number, Branches of [x] Number

文章引用：杨邦绥．关于“$3x+1$”问题的推证[J]．应用数学进展, 2024, 13(5): 1933-1936.
DOI: 10.12677/aam.2024.135181

1. 引言

“$3x+1$”问题是 20 世纪 30 年代在世界各地流传的数学推算问题：一个自然数，如果是偶数，则除以 2；如果是奇数，则乘以 3 加 1，循环往复，最后得到的结果必是 1 [1]。1950 年德国数学家卡拉兹(Callatz)在马萨诸塞州召开的国际数学家大会上提出来“$3x+1$”问题[2]，也称为“乌拉姆问题”或“角谷猜想”。

2. 定义

(一) 定义 1

任意正整数，若它是偶数使用 2^n 去除使其成奇数，若它是奇数便将它乘以 3 后加上 1，又用 2^n 去除使其成奇数，这种方法称为“[x]法”；将一个奇数乘以 2^n 后减去 1，再用 3 去除，若其结果是奇数的话，称这种方法为“逆[x]法”。

(二) 定义 2

一个正整数使用[x]法后将其得数再使用[x]法，照这样继续下去最后的结果是 1 的话，称这个数为“[x]数”；一个正整数对它使用[x]法后将其结果再使用[x]法……，反复对其使用[x]法后的结果永远都大于 1，则称这个数为“非[x]数”。

3. 性质

(一) 性质 1

由 $(4\alpha+1)\times 3+1=4(3\alpha+1)$ 知：任一正奇数用[x]法处理一次后的结果与这个数的 4 倍加 1 后用[x]法处理一次后的结果是相同的。

推论：

由性质 1 和[x]数的意义有：①若一个数是[x]数，对它使用[x]法和逆[x]法后的结果都是[x]数；②若一个非[x]数对它使用[x]法和逆[x]法后的结果也是非[x]数；③若一个正奇数是[x]数，将它乘以 2^n 后，仍然是[x]数。

(二) 性质 2

若对 α 使用[x]法一次后的结果为 b，写作“$\alpha \to b$”且 b 是唯一的得数，我们称它为[x]法的“唯一性”(以上 α、b 为正奇数，n 为正整数，下同)。

(三) 性质 3

将正奇数数列：1、3、5、……，$2n-1$ 中从第一项起，通过间隔一项，再取一项的方法，从而组成一数列，余下的项也组成一数列，有：

$$1、5、9、\cdots\cdots、4n-3 \tag{1}$$

$$3、7、11、\cdots\cdots、4n-1 \tag{2}$$

由 $(4n-3)\times 3+1=4\times(3n-2)$ 和 $(4n-1)\times 3+1=2\times(6n-1)$ 知，(1)式中任一个数的 3 倍加上 1 后，皆能被 4 整除；而(2)式中任一个数的 3 倍加上 1 后，只能被 2 整除，而不能被 4 整除。

(四) 性质 4

已知 $3^\alpha \times 2^n-1$ 不能被 3 整除，由定义 1 可知，被 3 整除的奇数不能使用逆[x]法。从而，易证不能被 3 整除的奇数可以使用逆[x]法。

(五) 性质 5

[x]数的树枝现象：将正奇数从小到大依次用[x]法处理，在这些繁杂的得数中，若有相同的数，只留一个，且用“→”连结，这些用“→”连结的数便像一棵树一样，如下图 1 所示[3]：

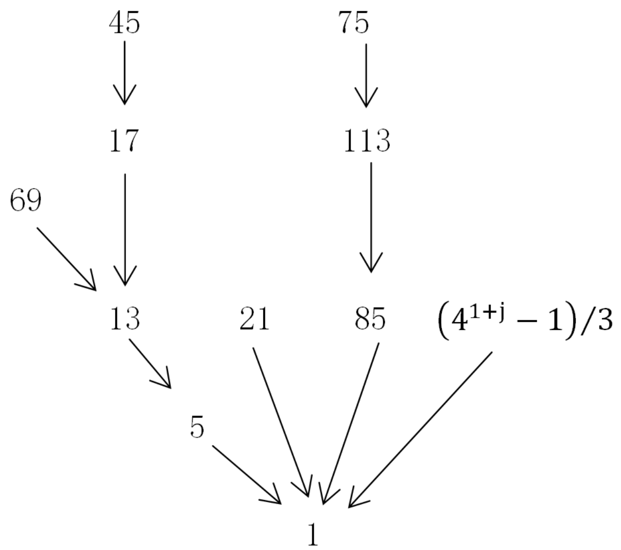

Figure 1. Schematic diagram of tree branch phenomenon with [*x*] number

图 1. [*x*]数的树枝现象示意图

$5=\left(4^2-1\right)/3$、$5\times4+1=21=\left(4^3-1\right)/3$、……、$\left(4^{1+j}-1\right)/3$(其中 j 是自然数)。

由上图可得几点重要性质，列举如下：

(1) 在“$\alpha\to b$”中当α不能被 3 整除且$b>1$时，α、b都是称这棵树的“枿”、“→”称作有向[*x*]线；(或者叫“枝”)。任一[*x*]数使用[*x*]法后的得数又被使用[*x*]法，……，其中到达最终数字 1 的有向[*x*]线是唯一的。

(2) 图中最底部 1 是这棵树的根，由根生出许多主枝，这些主枝中的第一个数(枿)依次为：5、21、85、……、$\left(4^{2+j}-1\right)/3$，由唯一性，知这些主枝之间不可能有“连理枝”。

(3) 由性质 4 我们便将能被 3 整除的数称为树枝的末梢数。

(4) 图中最底部 1 是这棵树的根，它与其它的数不同的是将 1 使用[*x*]法一次后的结果仍然是它本身 1。而大于 1 的奇数在使用[*x*]法一次后的结果，不一定是它本身(有大有小也有可能等于 1)。

4. 构想、定理以及其说明

(一) 构想

一个命题(或定理)虽然它的真实性和非真实性都无法证明，但如果能证明其有无限多个[*x*]数的真实性存在时，则对其视为成立。

(二) 定理

所有正整数都是[*x*]数。

(三) 分析说明

由推论知，只须证明所有正奇数都为[*x*]数即可。然而无法证明[*x*]数的真实性，通过观察[*x*]数的树枝图我们也可以把它看成是由根 1 不断使用逆[*x*]法来完成的，由推论知，图中的每一个数都是[*x*]数，主枝上的[*x*]数有无限多个，在这些数中，除了能被 3 整除外，同时又可以使用逆[*x*]法，且知其结果也是[*x*]数，如用同上方法继续计算，又可得无限多个[*x*]数，但在[*x*]数树枝图中，数是否包括整个正奇数，这无法判断。由性质 2 中的“唯一性”知，要判断一个正奇数是否是[*x*]数，只能将其不断使用[*x*]法，通过观察其最后结果是否等于 1 才可判断，然而正奇数有无限多个，要逐一用上述方法去判断，其是否为[*x*]数，这

难以完成。

由上述分析，可知正奇数中有无限多个[x]数存在，再由推论以及“构想”知定理，故推得“$3x + 1$”为真。

参考文献

[1] 徐品方. 引无数英雄竞折腰 $3x + 1$ 猜想[J]. 数学通报, 2002.

[2] 王树禾. 数学思想史[M]. 北京: 国防工业出版社, 2003.

[3] 杨邦绥. 关于角谷猜想之真伪性的探讨[J]. 理伦新探索, 2007(1): 139-140.